Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 11 (1956)
Heft: 3

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Alle bisher bekannten Beispiele solcher Funktionen $f(x, y)$ haben aber, wie die überall stetigen Funktionen, die beiden folgenden Eigenschaften:

1. Sie sind in jedem abgeschlossenen Quadrat $|x|, |y| \leqq c$ beschränkt.
2. Sie nehmen in jedem abgeschlossenen Quadrat $|x|, |y| \leqq c$ ihre dortige untere Grenze $\inf f(x, y)$ und obere Grenze $\sup f(x, y)$ als Funktionswerte an.

Es dürfte daher die Bemerkung von Interesse sein, dass keine dieser beiden Eigenschaften für alle Funktionen der betrachteten Art gilt. Das soll durch zwei einfache, durch leichte Abänderung der Funktion (2) gebildete Beispiele belegt werden.

Zunächst ist die Funktion

$$F(x, y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^4)^2} \quad \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad F(0, 0) = 0 \tag{3}$$

wieder im Nullpunkt linear stetig, aber nicht stetig, und in allen anderen Punkten stetig. Wegen

$$F(y^2, y) = \frac{1}{4y} \quad \text{für} \quad y \neq 0$$

ist sie aber in keinem Quadrat $|x|, |y| \leqq c$ beschränkt.

Ebenfalls ist die Funktion

$$G(x, y) = \frac{x y^2}{(x^2 + y^4)(1 + x^2 + y^2)} \quad \text{für} \quad (x, y) \neq (0, 0), \quad G(0, 0) = 0 \tag{4}$$

im Nullpunkt linear stetig, aber nicht stetig, und in allen anderen Punkten stetig. Weiter gilt wegen

$$|G(x, y)| < \frac{1}{2}, \quad \lim_{y \to 0} G(\pm y^2, y) = \pm \frac{1}{2}$$

in jedem abgeschlossenen Quadrat $|x|, |y| \leqq c$

$$-\frac{1}{2} = \inf G(x, y) < G(x, y) < \sup G(x, y) = \frac{1}{2};$$

die Funktion (4) nimmt also weder ihre untere noch ihre obere Grenze als Funktionswert an.

HEINZ KÖNIG, Würzburg.

Ungelöste Probleme

Nr. 11. Herr MARTIN KNESER machte bei verschiedenen Gelegenheiten auf ein Problem aufmerksam, das nach erstem Augenschein einen fast elementaren Charakter zu haben scheint, dessen Lösung aber, wie wir von verschiedener Seite vernehmen, noch nicht restlos glückte. Es handelt sich hierbei um folgendes: Es sollen $P_1, \ldots, P_n$; $Q_1, \ldots, Q_n$ $2n$ Punkte des k-dimensionalen euklidischen Raumes bezeichnen, und für die Distanzen gelte $d(P_i, P_j) \leqq d(Q_i, Q_j)$ für jedes Indizespaar $1 \leqq i, j \leqq n$.

Bedeutet A bzw. B die Vereinigungsmenge der n Einheitskugeln mit den Mittelpunkten P_i $(i = 1, \ldots, n)$ bzw. Q_i $(i = 1, \ldots, n)$ und $V(A)$ bzw. $V(B)$ ihre Volumina, so gilt vermutlich $V(A) \leqq V(B)$.

Diese Aussage würde, falls sichergestellt, innerhalb der Masstheorie nützliche Dienste als Hilfssatz leisten.

Beispielsweise würde sich mühelos folgern lassen, dass das untere Minkowskische Mass einer beliebigen beschränkten Punktmenge sich bei dehnungsloser Abbildung

nicht vergrössern kann und damit mindestens so gross ist wie das Kolmogoroffsche Minimalmass. Darüber kann man nachlesen bei M. KNESER in einer jüngst erschienenen Abhandlung[1]).

Die vermutete Aussage ist nur in einigen Sonderfällen bewiesen worden. 1. $k = 1$ (Beweis durch Induktion nach n). 2. $n \leqq k + 1$. 3. Die Menge der P_i ist ähnlich zur Menge der Q_i [Beweis von G. BOULIGAND[2])]. 4. $k = 2$; die Menge der P_i lässt sich stetig in die Menge der Q_i so überführen, dass die Distanzen entsprechender Punkte nie abnehmen (nach brieflicher Mitteilung von W. HABICHT an M. KNESER).

H. HADWIGER.

Aufgaben

Aufgabe 232. Eine veränderliche Tangente eines Kegelschnitts schneide zwei feste Tangenten desselben in A und B. Über AB wird das Dreieck ABC errichtet, das zu einem festen Dreieck gleichsinnig ähnlich ist. Gesucht wird der geometrische Ort für die Spitze C. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht, und J. P. SYDLER, Zürich.

Lösung: Die Ordnung der Ortskurve ist gleich der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer Geraden in allgemeiner Lage. Es sei g eine solche und C ein Punkt auf ihr. Das Dreieck ABC, dessen Eckpunkte A und B auf den Tangenten t_1 bzw. t_2 des Kegelschnittes K liegen und das dem gegebenen Dreieck gleichsinnig ähnlich ist, ist durch C eindeutig bestimmt. Denn die Drehstreckung aus C um den Dreieckswinkel γ im gegebenen Sinn mit dem Streckungsverhältnis $\lambda = \overline{BC}/\overline{AC}$ muss A in B überführen. B ist also der Schnittpunkt der Transformierten t_1' von t_1 mit t_2. Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn $t_1' \parallel t_2$, das heisst, wenn $\sphericalangle(CA, CB)$ nach Grösse und Sinn dem Winkel (t_1, t_2) gleich ist. Bewegt sich C auf g, so verschiebt sich t_1' parallel und schneidet aus t_2 eine zu C ähnliche Punktreihe B aus. Dasselbe gilt für A. AB umhüllt also eine Parabel P, die t_1 und t_2 berührt. Ist K ein Mittelpunktskegelschnitt, so führen die beiden weiteren gemeinsamen Tangenten von K und P zu je einem Dreieck ABC, für welches AB Tangente von K ist. Der geometrische Ort von C ist also eine Kurve zweiter Ordnung, und zwar eine Hyperbel, da die beiden uneigentlichen Punkte reell sind.

Ist K eine Parabel, so hat diese mit P neben t_1, t_2 und der uneigentlichen Geraden nur *eine* gemeinsame Tangente, die zu einem Dreieck ABC mit C auf g führt; der geometrische Ort ist also eine Gerade.

Im oben erwähnten Ausnahmefall $t_1' \parallel t_2$ muss t_1' mit t_2 zusammenfallen, damit das Dreieck möglich wird. Das Verhältnis der Abstände des Punktes C von t_1 und t_2 muss dann nach Grösse und Vorzeichen einen bestimmten Wert λ haben; der geometrische Ort ist also eine Gerade durch den Schnittpunkt von t_1 und t_2.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Weitgehende Verallgemeinerungen dieser Resultate gibt J. P. SYDLER in seiner Arbeit: *Le triangle comme opérateur géométrique* (El. Math. *10*, 100–105 [1955]). Analytische Lösungen gaben C. BINDSCHEDLER und R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 233. D'un point M sur le diamètre AB d'une hyperbole équilatère on mène la tangente MT (A, B, T se trouvent sur la courbe). Démontrer

$$\frac{\overline{AT}^2}{\overline{BT}^2} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.$$

G. VLAHAVAS, London.

---

[1]) M. KNESER: *Einige Bemerkungen über das Minkowskische Flächenmass*, Arch. Math. *6*, 382–390 (387) (1955).

[2]) G. BOULIGAND, *Ensembles impropres et nombre dimensionnel*, Bull. Sci. Math. *52*, 320–344 (324) (1928).