Merkwürdiges vom Kontinuum

Autor(en): **Locher-Ernst, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 3

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18618

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XI Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 10. Mai 1956

Merkwürdiges vom Kontinuum

A: Das lineare Kontinuum, etwa die reellen Zahlen x mit $0 \leqq x \leqq 1$, ist, wie wir bewiesen haben, als eine geordnete Menge C mit den folgenden drei Eigenschaften charakterisierbar[1]):

1. Es gibt ein erstes und ein letztes Element;
2. es gibt keine Lücken, das heisst die Menge ist stetig;
3. es gibt eine abzählbare Teilmenge R derart, dass zwischen zwei beliebigen Elementen von C stets mindestens ein Element der Teilmenge R zu finden ist.

Wir haben eine Teilmenge R dieser Eigenschaft als eine Skelettmenge von C bezeichnet und nannten die übrigen Elemente von C irrational in bezug auf R.

B: Ein Umstand gibt mir noch zu denken. Zwischen zwei beliebigen Elementen von C liegt mindestens ein Element r von R. Das r kann ich somit als eine «Lücke» innerhalb der irrationalen Elemente betrachten. Nun sind diese nicht abzählbar. Wie soll es möglich sein, dass die Lücken zwischen den nicht zum Skelett gehörenden Elementen abzählbar sind, während doch die lückenbildenden Elemente nicht abgezählt werden können?

A: Zugegeben, das ist eine Schwierigkeit. Im Bereich des Transfiniten bestehen eben Tatsachen, die im Finiten unmöglich sind. Zum Beispiel enthält jede unendliche Menge echte Teilmengen, deren Elemente denjenigen der ganzen Menge umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können. Durch diese Eigenschaft kann man das Unendliche geradezu definieren.

B: Damit ist mein Bedenken nicht behoben. Soll ich mir vorstellen, dass jedes Skelettelement r gleichsam mit einem Klumpen von irrationalen Elementen behaftet sei, um die Nichtabzählbarkeit dieser Elemente gegenüber der Abzählbarkeit der r zu verstehen?

A: Das geht nicht. Gemäss Eigenschaft 3 lässt sich ein solcher Klumpen sofort auflösen, indem zwischen zwei beliebigen irrationalen Elementen doch mindestens ein Skelettelement liegt.

B: Dann gibt es keine Antwort auf meine Frage?

A: Es ist in der Tat nicht so leicht, sich vom Sachverhalt ein richtiges Bild zu machen. Zunächst müssen wir festhalten, dass die Skelettelemente r zwar abzählbar

[1]) Siehe zum Beispiel A. FRAENKEL, *Einleitung in die Mengenlehre* (Verlag Springer und Dover Publications, New York 1946), S. 154 f.

sind, bei jeder Abzählung $r_1, r_2, r_3, \ldots$ wird jedoch die natürliche Ordnung vollkommen zerstört. Das heisst, die Ordnung innerhalb der abzählenden Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ hat nichts zu tun mit der Ordnung, welche die r_i innerhalb C besitzen.

B: Das ist mir klar, aber was hilft es zur Abklärung meiner Frage?

A: Wie bereits bemerkt, hat man sich im Transfiniten mit Tatsachen abzufinden, die im Finiten unmöglich sind. Hierzu gehört nun auch der folgende Sachverhalt: *Die Elemente einer nicht abbrechenden Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ lassen sich derart umordnen, dass sie in der neuen Anordnung nichtabzählbar viele Lücken aufweisen.* In der Tat, einerseits kann man die rationalen Zahlen r mit $0 \leqq r \leqq 1$ zum Beispiel durch die Folge

$$\frac{0}{1} = 0, \frac{1}{1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

abzählen, anderseits ergeben dieselben Zahlen, nach ihrer Grösse geordnet, eine lineare Ordnung mit den irrationalen Zahlen zwischen 0 und 1 als nichtabzählbar vielen Lücken. Ein merkwürdiges, kaum in die Anschauung zu fassendes Phänomen.

B: Jetzt wird mir auch klar, was meiner Frage unausgesprochen zugrunde liegt, nämlich die Annahme, die Lücken und die lückenbildenden Elemente irgendwie in umkehrbar eindeutige Beziehung setzen zu können, was aber weder bei den r-Lücken zwischen den irrationalen Elementen noch bei der komplementären Menge der Lücken zwischen den r möglich ist, weil eine Lücke sich nie unmittelbar an ein Element der betreffenden Menge anschliessen lässt. L. LOCHER-ERNST.

Ein kurzer Beweis der Divergenz der unendlichen Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p_r}$

Schon EUKLID hat bewiesen, dass die Zahl der Primzahlen nicht endlich ist. EULER bewies, dass die unendliche Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} 1/p_r$ divergiert, wo $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ die Folge der Primzahlen ist.

Die folgende Beweisführung wird vom Begriff des unendlichen Produktes keinen Gebrauch machen.

Nehmen wir an, dass die gegebene Reihe konvergent ist. Dann gibt es eine natürliche Zahl k, so dass

$$\sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{p_r} = q < 1.$$

Wir teilen jetzt die natürlichen Zahlen in drei Klassen:

Klasse A enthält alle natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren alle die Ungleichung $p_j \geqq p_k$ befriedigen. Wir bezeichnen die Elemente dieser Klasse mit $n_1', n_2', \ldots, n_s', \ldots$.

Klasse B enthält alle natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren alle die Ungleichung $p_i < p_k$ befriedigen. Wir bezeichnen die Elemente dieser Klasse mit $n_1'', n_2'', \ldots, n_s'', \ldots$.

Klasse C enthält alle natürlichen Zahlen, die weder in A noch in B zu finden sind. Wir bezeichnen die Elemente dieser Klasse mit $n_1''', n_2''', \ldots, n_s''', \ldots$. Die Zahl 1 ist Element der Klasse C. Wenn n_s''' von 1 verschieden ist, so ist $n_s''' = n_u' n_v''$.