Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 11 (1956)
Heft: 3

Artikel: Merkwürdiges vom Kontinuum
Autor: Locher-Ernst, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18618

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 24.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XI Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 10. Mai 1956

Merkwürdiges vom Kontinuum

A: Das lineare Kontinuum, etwa die reellen Zahlen x mit $0 \leqq x \leqq 1$, ist, wie wir bewiesen haben, als eine geordnete Menge C mit den folgenden drei Eigenschaften charakterisierbar[1]):

1. Es gibt ein erstes und ein letztes Element;
2. es gibt keine Lücken, das heisst die Menge ist stetig;
3. es gibt eine abzählbare Teilmenge R derart, dass zwischen zwei beliebigen Elementen von C stets mindestens ein Element der Teilmenge R zu finden ist.

Wir haben eine Teilmenge R dieser Eigenschaft als eine Skelettmenge von C bezeichnet und nannten die übrigen Elemente von C irrational in bezug auf R.

B: Ein Umstand gibt mir noch zu denken. Zwischen zwei beliebigen Elementen von C liegt mindestens ein Element r von R. Das r kann ich somit als eine «Lücke» innerhalb der irrationalen Elemente betrachten. Nun sind diese nicht abzählbar. Wie soll es möglich sein, dass die Lücken zwischen den nicht zum Skelett gehörenden Elementen abzählbar sind, während doch die lückenbildenden Elemente nicht abgezählt werden können?

A: Zugegeben, das ist eine Schwierigkeit. Im Bereich des Transfiniten bestehen eben Tatsachen, die im Finiten unmöglich sind. Zum Beispiel enthält jede unendliche Menge echte Teilmengen, deren Elemente denjenigen der ganzen Menge umkehrbar eindeutig zugeordnet werden können. Durch diese Eigenschaft kann man das Unendliche geradezu definieren.

B: Damit ist mein Bedenken nicht behoben. Soll ich mir vorstellen, dass jedes Skelettelement r gleichsam mit einem Klumpen von irrationalen Elementen behaftet sei, um die Nichtabzählbarkeit dieser Elemente gegenüber der Abzählbarkeit der r zu verstehen?

A: Das geht nicht. Gemäss Eigenschaft 3 lässt sich ein solcher Klumpen sofort auflösen, indem zwischen zwei beliebigen irrationalen Elementen doch mindestens ein Skelettelement liegt.

B: Dann gibt es keine Antwort auf meine Frage?

A: Es ist in der Tat nicht so leicht, sich vom Sachverhalt ein richtiges Bild zu machen. Zunächst müssen wir festhalten, dass die Skelettelemente r zwar abzählbar

[1]) Siehe zum Beispiel A. FRAENKEL, *Einleitung in die Mengenlehre* (Verlag Springer und Dover Publications, New York 1946), S. 154 f.

sind, bei jeder Abzählung $r_1, r_2, r_3, \ldots$ wird jedoch die natürliche Ordnung vollkommen zerstört. Das heisst, die Ordnung innerhalb der abzählenden Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ hat nichts zu tun mit der Ordnung, welche die r_i innerhalb C besitzen.

B: Das ist mir klar, aber was hilft es zur Abklärung meiner Frage?

A: Wie bereits bemerkt, hat man sich im Transfiniten mit Tatsachen abzufinden, die im Finiten unmöglich sind. Hierzu gehört nun auch der folgende Sachverhalt: *Die Elemente einer nicht abbrechenden Folge $r_1, r_2, r_3, \ldots$ lassen sich derart umordnen, dass sie in der neuen Anordnung nichtabzählbar viele Lücken aufweisen.* In der Tat, einerseits kann man die rationalen Zahlen r mit $0 \leqq r \leqq 1$ zum Beispiel durch die Folge

$$\frac{0}{1} = 0, \frac{1}{1} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$$

abzählen, anderseits ergeben dieselben Zahlen, nach ihrer Grösse geordnet, eine lineare Ordnung mit den irrationalen Zahlen zwischen 0 und 1 als nichtabzählbar vielen Lücken. Ein merkwürdiges, kaum in die Anschauung zu fassendes Phänomen.

B: Jetzt wird mir auch klar, was meiner Frage unausgesprochen zugrunde liegt, nämlich die Annahme, die Lücken und die lückenbildenden Elemente irgendwie in umkehrbar eindeutige Beziehung setzen zu können, was aber weder bei den r-Lücken zwischen den irrationalen Elementen noch bei der komplementären Menge der Lücken zwischen den r möglich ist, weil eine Lücke sich nie unmittelbar an ein Element der betreffenden Menge anschliessen lässt. L. LOCHER-ERNST.

Ein kurzer Beweis der Divergenz der unendlichen Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{p_r}$

Schon EUKLID hat bewiesen, dass die Zahl der Primzahlen nicht endlich ist. EULER bewies, dass die unendliche Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} 1/p_r$ divergiert, wo $p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots$ die Folge der Primzahlen ist.

Die folgende Beweisführung wird vom Begriff des unendlichen Produktes keinen Gebrauch machen.

Nehmen wir an, dass die gegebene Reihe konvergent ist. Dann gibt es eine natürliche Zahl k, so dass

$$\sum_{r=k}^{\infty} \frac{1}{p_r} = q < 1.$$

Wir teilen jetzt die natürlichen Zahlen in drei Klassen:

Klasse A enthält alle natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren alle die Ungleichung $p_j \geqq p_k$ befriedigen. Wir bezeichnen die Elemente dieser Klasse mit $n_1', n_2', \ldots, n_s', \ldots$.

Klasse B enthält alle natürlichen Zahlen, deren Primfaktoren alle die Ungleichung $p_i < p_k$ befriedigen. Wir bezeichnen die Elemente dieser Klasse mit $n_1'', n_2'', \ldots, n_s'', \ldots$.

Klasse C enthält alle natürlichen Zahlen, die weder in A noch in B zu finden sind. Wir bezeichnen die Elemente dieser Klasse mit $n_1''', n_2''', \ldots, n_s''', \ldots$. Die Zahl 1 ist Element der Klasse C. Wenn n_s''' von 1 verschieden ist, so ist $n_s''' = n_u' n_v''$.