

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 11 (1956)  
**Heft:** 2

**Rubrik:** Aufgaben

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

4 teilbare Zahl, von der noch nicht entschieden werden konnte, ob sie eine  $H$ -Zahl ist oder nicht, ist unseres Wissens  $n = 92$ .

H. HADWIGER.

*Berichtigung zu Nr. 9.* Die beiden in der Tafel (Seite 16) angegebenen Tetraeder I und II besitzen das Volumen  $V = 1/2$ ; damit diese, wie vorgesehen, das Volumen  $V = 1$  aufweisen, sind die drei Kanten  $a, b$  und  $c$  je mit dem Faktor  $\sqrt[3]{2}$  zu multiplizieren. Auf dieses Versehen wurde von Herrn F. FAEHNDRICH (Bern) aufmerksam gemacht.

## Aufgaben

**Aufgabe 229.** Man bestimme den Pferchkreis der Höhenschnittpunkte aller Dreiecke, welche einem festen Kreis  $(M, r)$  eingeschrieben sind, und bei welchen

- a) eine Ecke auf diesem Kreis ein fester Punkt ist,
- b) die Ecken beliebig auf diesem Kreis liegen können.

R. LAUFFER, Graz.

*Lösung:* a)  $A$  sei ein fester Peripheriepunkt und  $M$  der Mittelpunkt des gegebenen Kreises  $k$ .  $AQ$  sei eine Schwerlinie im einbeschriebenen Dreieck  $ABC$ . Für den Schwerpunkt  $S$  gilt  $AS:AQ = 2:3$ . Der Pferchkreis  $k_1$  der Schwerpunkte steht also mit dem Kreis  $k$  in einer Homothetie mit dem Mittelpunkt  $A$  und mit der Charakteristik  $2/3$ . Der Mittelpunkt von  $k_1$  teilt die Strecke  $MA$  im Verhältnis  $1:2$ , und der Halbmesser von  $k_1$  beträgt  $2r/3$ . Auf der Euler-Geraden  $MS$  liegt auch der Höhenschnittpunkt  $H$ , und zwar so, dass  $MH:MS = 3:1$ . So steht der Pferchkreis der Höhenschnittpunkte in einer Homothetie mit  $k_1$  mit dem Mittelpunkt  $M$  und mit der Charakteristik  $3/1$ . Der Mittelpunkt des Pferchkreises ist also  $A$  und sein Halbmesser  $2r$ .

b) Der Schwerpunkt eines dem Kreis  $k$  einbeschriebenen beliebigen Dreiecks ist immer ein innerer Punkt von  $k$ . Der Pferchkreis der Schwerpunkte ist also  $k$  selbst. Der Pferchkreis der Höhenschnittpunkte steht mit  $k$  in einer Homothetie, deren Mittelpunkt  $M$  und deren Charakteristik  $3/1$  ist. Der Mittelpunkt des Pferchkreises ist also  $M$  und sein Halbmesser  $3r$ .

Falls wir die entarteten Dreiecke auch in Betracht ziehen, so gehören auch die Randpunkte der erwähnten Pferchkreise zu den Schwerpunkten bzw. Höhenschnittpunkten.

J. SCHOPP, Budapest.

Die Lösungen von A. BAGER (Hjørring) und J. ERDÖSI (Budapest) beruhen auf der Tatsache, dass das Spiegelbild von  $H$  bezüglich einer Dreiecksseite auf dem Umkreis liegt.  $H$  liegt daher auf der zu  $k$  bezüglich  $BC$  symmetrischen Kreisscheibe.  $H$  gehört daher immer zur Vereinigungsmenge  $V$  aller mit  $k$  kongruenten Scheiben, die Punkte mit  $k$  gemeinsam haben.  $V$  ist ein Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $3r$ . Bleibt  $A$  fest, so gehört  $H$  zur Vereinigungsmenge  $V'$  aller Scheiben, die  $A$  enthalten und zu  $k$  kongruent sind.  $V'$  ist ein Kreis mit Mittelpunkt  $A$  und Radius  $2r$ .

Das Resultat von b) ergibt sich auch unmittelbar aus der Formel

$$HM = r \sqrt{1 - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma},$$

für  $\beta = \gamma \rightarrow 0$  und  $\alpha \rightarrow \pi$ .

Weitere Lösungen sandten E. PETHES (Budapest) und I. ZANA (Budapest).

**Aufgabe 230.** Bekanntlich hat die Gleichung  $\varphi(n) = a$ , wo  $\varphi(n)$  die Anzahl der zu  $n$  teilerfremden Zahlen  $< n$  bedeutet und  $a$  eine (notwendig) gerade Zahl ist, nicht immer eine Lösung; zum Beispiel für  $a = 34$  gibt es keine Lösung  $n$ . Man beweise, dass es unendlich viele gerade Zahlen  $a$  gibt, für die die Gleichung keine Lösung besitzt.

M. G. BEUMER, Enschede (Holland).

*Lösung:* Ist  $\varphi(n) = a = 2b$  und  $b > 1$  eine ungerade Zahl, also  $\varphi(n)$  nicht durch 4 teilbar, so gilt

$$2b = p^e(p-1), \quad e \geq 0, \quad (1)$$

wo  $p$  eine ungerade Primzahl ist. Es sind also nur die Lösungen  $n = p^{e+1}$  und  $n = 2p^{e+1}$  möglich. Ist  $b = q^s$ , wo  $q$  eine von 3 verschiedene ungerade Primzahl ist, so kann (1) nur für  $e=0$  gelten, denn  $p=q$  führt auf einen Widerspruch, weil  $q-1 \neq 2q^{s-e}$ . Also ist in diesem Fall  $p = 2q^s + 1$ . Ist  $2q^s + 1 = 2b + 1$  keine Primzahl, so existiert also für  $b = q^s$  keine Lösung der Gleichung  $\varphi(n) = 2b$ .

W. SIERPIŃSKI (Warschau) behandelt folgende Fälle: 1.  $b = 5^{2k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Wegen  $5^{2k} = 25^k \equiv 1 \pmod{3}$  ist  $2b+1 \equiv 0 \pmod{3}$ , also keine Primzahl. 2.  $b = 5^{6k+5}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Wegen  $5^{6(k+1)} \equiv 1 \pmod{7}$  (Fermat!) ist  $5^{6k+5} \equiv 3 \pmod{7}$ , also  $2b+1 \equiv 0 \pmod{7}$ .

G. PAZDERSKI (Halle/Saale) gibt das Beispiel  $b = 7^k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Wegen  $7^k \equiv 1 \pmod{3}$  ist  $2b+1 \equiv 0 \pmod{3}$ .

A. BAGER (Hjørring), U. DIETER (Kiel), R. LAUFFER (Graz), K. MOSONYI (Szeged) und W. SIERPIŃSKI setzen  $b = q = 3k+1$ . Nach einem elementar beweisbaren Spezialfall des Dirichletschen Satzes gibt es unendlich viele solche Primzahlen  $q$ . Nun ist  $2b+1 = 3(2k+1)$ , also keine Primzahl. Wie W. SIERPIŃSKI mitteilt, ist es nicht bekannt, ob unendlich viele Primzahlen  $q$  existieren, für die  $\varphi(n) = 2q$  lösbar ist, was zum Beispiel für  $q = 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, 113$  der Fall ist. Die Bestimmung aller  $b$ , für die  $\varphi(n) = 2b$  keine Lösung hat, ist also mit den heutigen Mitteln nicht möglich.

Ein weiteres Beispiel,  $b = 2 \cdot 7 \cdot 3^{2k}$  ( $k = 2, 3, \dots$ ), hat W. GASCHÜTZ, Kiel, angegeben.

**Aufgabe 231.** Auf was für einer Linie bewegt sich ein Wanderer in ebenem, waagrechtem Gelände, wenn er mit gleichbleibender Geschwindigkeit ständig seinem Schatten nachgeht?

W. WUNDERLICH, Wien.

*Lösung des Aufgabenstellers:* Bezeichne  $\beta$  die (mittlere) geographische Breite,  $\delta$  die Sonnendecklinination,  $\sigma$  den veränderlichen Stundenwinkel und  $c$  die Wandergeschwindigkeit in km/h. Zur Verwendung gelangt ein rechtes kartesisches Normalkoordinaten-system  $x, y, z$ , dessen Ursprung  $O$  mit dem Mittagsstandort zusammenfällt; die  $x$ -Achse weise nach Osten, die  $y$ -Achse nach Norden und die nach oben weisende  $z$ -Achse diene als Schattenzeiger. Die Änderung der Schattenrichtung überblickt man am besten, wenn man auf dem Lichtstrahl durch  $O$  einen Punkt  $P$  in der festen Entfernung 1 ins Auge fasst: Im Laufe des Tages überstreicht die Strecke  $OP$  gleichförmig den Mantel eines Drehkegels mit der Öffnung  $\pi - 2\delta$ , dessen Achse parallel zur Erdachse ist, also nach Norden hin unter dem Winkel  $\beta$  ansteigt; der Grundriss  $P'$  von  $P$  bewegt sich auf einer Ellipse  $k'$  und  $P'O$  gibt die Schattenrichtung der  $z$ -Achse, also die Fortschreitrichtung des Wanderers an<sup>1)</sup>.

Die darstellend-geometrische Auswertung dieses Gedankens ermöglicht eine schnelle Beantwortung der gestellten Frage mit Hilfe einer graphischen Integration und erlaubt unmittelbar eine Beurteilung der Bahnform in qualitativer Hinsicht. Je nach der Lage der Ellipse  $k'$  zum Ursprung  $O$  sind – unter Beschränkung auf nördliche Breiten – sieben Fälle zu unterscheiden:

1.  $0 < |\delta| < \beta < \pi/2$  ( $O$  innerhalb  $k'$ ). Die Tagesbahn ist ein zur  $x$ -Achse symmetrischer Bogen einer periodischen Kurve vom Aussehen einer verschlungenen Zykloide.
2.  $0 = \delta < \beta < \pi/2$  ( $O$  = Mitte von  $k'$ ). Bogen eines zentrisch-symmetrischen Ovals.
3.  $0 < |\delta| = \beta < \pi/2$  ( $O$  auf  $k'$ ). Bogen einer Kurve vom Aussehen einer gespitzten Zykloide.
4.  $0 < \beta < |\delta|$  ( $O$  ausserhalb  $k'$ ). Bogen einer Kurve vom Aussehen einer gestreckten Zykloide.

<sup>1)</sup> Vgl. die ähnlichen Überlegungen zur «analematischen Sonnenuhr», El. Math. 7, 114–115 (1952).

5.  $0 = \beta < |\delta|$  ( $k' =$  Strecke). Bogen einer Kurve vom Aussehen einer Sinuswelle.
6.  $0 = \beta = \delta$  ( $k' =$  Strecke durch  $O$ ). Abschnitt der  $x$ -Achse.
7.  $\beta = \pi/2$  ( $k' =$  Kreis um  $O$ ). Kreis.

Die rechnerische Auswertung, ausgehend von den leicht angebbaren Koordinaten

$$\begin{aligned} X &= -\cos \delta \sin \sigma, \\ Y &= \sin \delta \cos \beta - \cos \delta \sin \beta \cos \sigma, \\ Z &= \sin \delta \sin \beta + \cos \delta \cos \beta \cos \sigma \end{aligned}$$

des Hilfspunktes  $P$ , verlangt die Integration des Differentialgleichungssystems

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}, \\ dx^2 + dy^2 = C^2 d\sigma^2 \quad \text{mit} \quad C = 12 c/\pi. \end{array} \right.$$

Elimination von  $dy$  führt auf

$$x = -C \int_0^\sigma \frac{X d\sigma}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = -\frac{C}{\cos \beta} \int \frac{dZ}{\sqrt{1 - Z^2}} = \frac{C}{\cos \beta} \arccos Z = \frac{C}{\cos \beta} (\zeta - \zeta_0).$$

Man hat also das merkwürdige Resultat, dass die Abszisse  $x$  des Wanderers proportional zur Änderung der Zenitdistanz  $\zeta$  (oder der Höhe  $h = \pi/2 - \zeta$ ) der Sonne ist. – Für die Ordinate  $y$  findet man

$$y = -C \int_0^\sigma \frac{Y d\sigma}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = C \int \frac{\cos \delta \sin \beta \cos \sigma - \sin \delta \cos \beta}{\sqrt{1 - (\sin \delta \sin \beta + \cos \delta \cos \beta \cos \sigma)^2}} d\sigma,$$

was sich durch die Substitution  $\cos \sigma = u$  auf ein im allgemeinen elliptisches Integral zurückführen lässt. In den Sonderfällen 2, 3, 5, 6 und 7 ist elementare Integration möglich.

W. WUNDERLICH, Wien.

## Neue Aufgaben

265. An einem Punkt greifen drei koplanare Kräfte an, die sich aufheben. Diese drei Kräfte lassen sich in zwei reguläre Kräftetripel zerlegen. Wie kann man diese Tripel finden? (Unter einem regulären Kräftetripel sollen drei gleichgrosse koplanare Kräfte verstanden werden, die gegeneinander je einen Winkel von  $120^\circ$  aufweisen.)  
H. SCHILT, Biel.
266. Man beweise folgende, für ein beliebiges Dreieck gültige Formeln:

1. 
$$h_a + h_b + h_c = 2R + 4r + \frac{r^2}{R} + 2R \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$
2. 
$$s^2 - (2R + r)^2 = 4R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

[ $R =$  Umkreisradius,  $r =$  Inkreisradius,  $h =$  Höhe,  $s = (a + b + c)/2$ ]. Hieraus ergeben sich zwei Charakterisierungen des rechtwinkligen Dreiecks, von denen die zweite,  $s = 2R + r$ , besonders einfach ist.  
A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

267. Von zwei kongruenten Ellipsen mit dem Achsenverhältnis  $\lambda \leq 2 - \sqrt{3}$ , die sich decken, soll die eine um ihren Mittelpunkt so weit gedreht werden, dass die beiden Kurven fünf flächengleiche Gebiete begrenzen. (Man gebe entweder eine rein konstruktive Lösung oder berechne den Drehwinkel.)

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht ZH.

268. Consider the elements  $1, 2, \dots, n$  and let be given an integer  $k$  with  $3 \leq k \leq n$ . To be determined is the minimal system  $A$  of  $(i, j)$ -ambos ( $1 \leq i < j \leq n$ ) with the property that each combination

$$\mu_k \equiv (i_1, i_2, \dots, i_k), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$$

contains at least one ambo from  $A$ .

PAUL TURAN, Budapest.

269. Let  $\sigma(n)$  denote, as usual, the sum of the divisors of  $n$ . Prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n! + 1)}{n! + 1} = 1.$$

LEO MOSER, Edmonton (Kanada) and J. LAMBEK, Montreal.

270.  $P_n$  sei das Produkt, gebildet aus den Seiten und allen Diagonalen eines dem Einheitskreis eingeschriebenen  $n$ -Ecks. Welches ist der grösstmögliche Wert von  $P_n$ ?

E. TROST, Zürich.

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Buelrainstrasse 51, Winterthur.

- Über dem spitzwinkligen Dreieck  $ABC$  in der Projektionsebene ist das rechtwinklige Tetraeder zu errichten. (Die drei Kanten  $SA = a$ ,  $SB = b$ ,  $SC = c$  bilden ein sogenanntes rechtwinkliges Dreibein.)  
[Die Normalprojektion  $S'$  der Spitze  $S$  ist Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $ABC$ , denn  $a \perp E(b, c)$ , folglich  $a' \perp BC$  usw.]
- Bildet man mit drei von  $S$  ausgehenden, gegebenen Kanten  $a, b, c$  Tetraeder, so hat das in  $S$  rechtwinklige maximales Volumen. (Grösstmögliches Zelt mit drei verschieden langen Stangen.)  
[Ohne Differentialrechnung: Wählt man eine Seitenfläche, z. B.  $SAB$  als Grundfläche, so ist diese, unabhängig von der Höhe, am grössten, wenn  $\angle(a, b) = 90^\circ$  ist; die Höhe ist, unabhängig von der Grundfläche, am grössten, wenn sie gleich  $c$  ist. – Stellt man das maximale Tetraeder nun wieder auf die Grundfläche und hält außer  $a, b, c$  auch seine Höhe fest, so können die Punkte  $A, B, C$  noch auf konzentrischen Kreisen um den Höhenfusspunkt  $F$  wandern, und das Dreieck  $ABC$  ist dann am grössten (nach Aufgabe 1!), wenn  $F$  Höhenschnittpunkt ist. Durch diese sehr elementare Lösung von Aufgabe 183 der «Elemente» ist auch diese für die Schulstube gewonnen.]
- Für das rechtwinklige Tetraeder mit den Seitenflächen  $f_1, f_2, f_3$  und der Grundfläche  $g$  gilt der «Pythagoreische» Satz

$$g^2 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2.$$

- Sind die Grundkanten eines rechtwinkligen Tetraeders  $u, v$  und  $w$ , so gilt für das Volumen die «Heronsche» Formel

$$V = \frac{1}{6} \sqrt{(S^2 - u^2)(S^2 - v^2)(S^2 - w^2)},$$

wo  $S^2$  den Ausdruck  $\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$  bedeutet.

- Über dem Dreieck  $ABC$  ist das rechtwinklige Dreibein nach oben zu errichten.  
 $A(5; 6; 4)$ ,  $B(9; 9; 9)$ ,  $C(14; 1; 2)$ .  
[ $S(5,799; 4,177; 6,655)$ .]