

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 11 (1956)
Heft: 2

Artikel: Wie man aus einer Kugel zwei zu ihr kongruente Kugeln herstellen kann
Autor: Locher-Ernst, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-18617>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik

und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

El. Math.

Band XI

Nr. 2

Seiten 25–48

Basel, 10. März 1956

Wie man aus einer Kugel zwei zu ihr kongruente Kugeln herstellen kann

1. Einleitung. Die neuere Entwicklung der Mathematik brachte Ergebnisse zutage, die man sich vor 60 Jahren nicht hätte träumen lassen. Ein solches Resultat ist der folgende berühmt gewordene, im Jahre 1947 von R. M. ROBINSON¹⁾ bewiesene Satz:

Eine Vollkugel lässt sich in fünf paarweise punktfremde Teile A, B, C, D, E derart aufteilen, dass man durch geeignete Drehungen und eine Translation sowohl aus den zwei Teilen A und C als auch aus den drei Teilen B, D und E je eine zur ursprünglichen kongruente Vollkugel erhält.

Somit kann man bloss durch Anwenden geeigneter Bewegungen aus einer Vollkugel deren zwei gleichgrosse herstellen. Dabei kann man es so einrichten, dass der eine Teil E nur aus einem Punkte besteht.

Mit diesem merkwürdigen Satz kam eine Reihe von Untersuchungen – in erster Linie von S. BANACH, A. TARSKY und W. SIERPIŃSKI – zum Abschluss, die von einer Arbeit von F. HAUSDORFF²⁾ ausgingen. In der Abhandlung von ROBINSON werden die Hauptmomente der Entwicklung kurz festgehalten. Es sei hier auch auf die anregende Arbeit von H. HADWIGER³⁾ hingewiesen, in der diese Entwicklung anschaulich geschildert wird.

Das Ziel der folgenden Darstellung, die sich eng an die Arbeit von ROBINSON anschliesst, besteht darin, einem grösseren Kreis in ausführlicher, möglichst elementarer Form vollen Einblick zu vermitteln, wie der angegebene Sachverhalt zustande kommt. Die Lektüre der bewunderungswerten Abhandlung von ROBINSON, die noch weitergehende Ergebnisse enthält, dürfte dann keine Schwierigkeiten mehr bieten.

2. Die von unabhängigen Rotationen erzeugte Gruppe. Wir betrachten die Drehungen einer Kugel um ihren Mittelpunkt um irgendwelche Achsen durch beliebige Winkel. Diese Drehungen bilden eine Gruppe. Bedeuten φ, ψ zwei solche Drehungen, und übt man auf die Kugel zuerst die Drehung φ , dann die Drehung ψ aus, so lässt sich das «Produkt» $\varphi\psi$, was die Endlage jedes Punktes der Kugel betrifft, durch eine einzige Drehung ersetzen, wobei im allgemeinen die Drehungen $\varphi\psi$ und $\psi\varphi$ verschieden sind.

¹⁾ R. M. ROBINSON, *On the Decomposition of Spheres*, *Fundamenta Mathematicae* 34, 246–260 (1947).

²⁾ F. HAUSDORFF, *Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen*, *Math. Ann.* 75, 428–433 (1914).

³⁾ H. HADWIGER, *Der Inhaltsbegriff, seine Begründung und Wandlung in älterer und neuerer Zeit*. Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern, 11. Band, 1954.

Wie wir später zeigen werden, kann man beliebig viele Rotationen, zum Beispiel vier, etwa $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, angeben, die voneinander *unabhängig* sind. Das soll heissen: Übt man auf die Kugel irgendeine Folge von Drehungen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ aus, wobei jedes ξ eine der Grössen $\varphi_i, \varphi_i^{-1}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ist, so ergibt sich niemals die ursprüngliche Ausgangslage, es sei denn, das Produkt $\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_s$ stelle in den Faktoren $\varphi_i, \varphi_i^{-1}$ die Einheit dar.

Wie sich zeigen wird, ist die Existenz solcher unabhängiger Drehungen, die übrigens plausibel erscheint, ein wesentlicher Kern der ganzen Sache.

Wir nehmen an, dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ vier unabhängige Drehungen seien. Die Lage ihrer Achsen und die Grösse ihrer Drehwinkel sind für den Beweisgang nicht wesentlich.

Bei der Drehung φ_i geht ein Punkt u der Kugeloberfläche S in einen bestimmten Punkt von S über, den wir mit $u \varphi_i$ bezeichnen. Allgemein ist $u \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_s$ der Punkt, der aus dem Ausgangspunkt u folgendermassen entsteht: u wird der Drehung ξ_1 unterworfen, der erhaltene Punkt dann der Drehung ξ_2 usw. Dabei bedeutet hier wie im folgenden ξ_i immer eine der acht Grössen $\varphi_1^{\pm 1}, \varphi_2^{\pm 1}, \varphi_3^{\pm 1}, \varphi_4^{\pm 1}$. Durch Bilden aller Produkte solcher Art erhält man die ganze von den Elementen φ_i erzeugte Gruppe, die mit G bezeichnet werde.

3. Äquivalenzklassen. Ausgehend von einem beliebigen Punkt u der Kugeloberfläche S bilden wir alle Punkte $u \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_s$. Zwei Punkte, die mittels irgendeiner Operation der Gruppe G zusammenhängen, nennen wir äquivalent. Alle paarweise äquivalenten Punkte bilden eine *Äquivalenzklasse*. Zu einem beliebigen Ausgangspunkt u von S gehört eine bestimmte Äquivalenzklasse, nämlich diejenige, die aus den Punkten besteht, welche aus u durch die Wirkung aller Produkte $\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_s$ entstehen. Eine Äquivalenzklasse enthält nur abzählbar viele Punkte.

Nimmt man dann einen ihr nicht angehörenden Punkt u' von S als Ausgangspunkt, so erhält man aus ihm eine weitere Äquivalenzklasse, usw.

Zwei Äquivalenzklassen sind punktfremd. Denn aus

$$u' \xi'_1 \xi'_2 \cdots \xi'_r = u \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_s$$

würde

$$u' = u \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_s \xi_r'^{-1} \xi_{r-1}'^{-1} \cdots \xi_1'^{-1}$$

folgen, das heisst u' würde – gegen Annahme – der durch u bestimmten Klasse angehören.

Durch die Gruppe G wird somit die Kugeloberfläche in eine Menge von paarweise punktfremden Äquivalenzklassen zerlegt. Diese Menge aller Klassen ist natürlich nicht abzählbar. Wir werden später aus jeder Klasse einen und nur einen Punkt herausgreifen, also das Auswahlaxiom benützen.

Ist v ein Punkt von S , der bei der Operation $\alpha = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_r$ fest bleibt, so nennen wir v einen Fixpunkt.

Ist v ein Fixpunkt, etwa für α , also $v \alpha = v$, dann ist auch jeder zu v äquivalente Punkt ein Fixpunkt. Beweis: Aus $v \alpha = v$ folgt $v \beta \beta^{-1} \alpha \beta = v \beta$, wobei β eine beliebige Operation der Gruppe G ist. Das heisst, $v \beta$ ist ein Fixpunkt der Operation $\beta^{-1} \alpha \beta$.

Jede Äquivalenzklasse besteht somit entweder aus lauter Nicht-Fixpunkten oder aus lauter Fixpunkten.

4. Eindeutige Darstellung der Punkte einer Klasse. Zuerst betrachten wir eine Äquivalenzklasse von Nicht-Fixpunkten. Ist u irgendein Punkt einer solchen Klasse, dann ist jeder andere Punkt dieser Klasse eindeutig in der Form $u\beta$ darstellbar, wobei β ein Produkt von Faktoren $\varphi_i, \varphi_i^{-1}$ darstellt, das in diesen nicht kürzbar ist.

Beweis: Wäre $u\beta = u\beta'$ mit in den φ_i nicht identischen β und β' , so würde aus $u = u\beta'\beta^{-1}$ folgen, dass u ein Fixpunkt ist oder dass $\beta'\beta^{-1}$ die Einheitsoperation (Ausgangslage) darstellt. Ersteres ist gegen die Annahme, und letzteres würde besagen, dass die G erzeugenden vier Drehungen nicht unabhängig sind.

Etwas komplizierter ist es, eine eindeutige Darstellung der Punkte einer Klasse von Fixpunkten zu gewinnen.

Wir prüfen dazu alle Operationen in G , die in der betrachteten Klasse einen Fixpunkt haben, auf ihre Länge und nehmen eine unter den kürzesten. Das heisst, die ausgewählte Operation ist eine solche, die möglichst wenig Faktoren $\varphi_i^{\pm 1}$ aufweist. Es sei ϑ eine solche. (Ob es mehrere kürzeste gibt, interessiert uns nicht.) v sei ein Fixpunkt von ϑ , also $v\vartheta = v$. Dann gilt:

Jede Kugeldrehung der Gruppe G , die v als Fixpunkt besitzt, hat die Form $\alpha = \vartheta^n$ (n ganz).

Beweis: Zunächst stellen wir fest, dass der erste und letzte Faktor von ϑ nicht invers sein können, da es sonst eine Operation $\sigma^{-1}\vartheta\sigma$ gäbe, die kürzer als ϑ wäre und in der betrachteten Klasse auch einen Fixpunkt (nämlich $v\sigma$) hätte. Somit beginnen ϑ und ϑ^{-1} nicht mit demselben Faktor.

Da α nach Voraussetzung wie ϑ den Fixpunkt v hat, somit α und ϑ dieselbe Drehachse besitzen, ist $\alpha\vartheta = \vartheta\alpha$, weil das Ergebnis zweier Drehungen mit gleicher Drehachse von deren Reihenfolge unabhängig ist.

Nun haben wir zwei Möglichkeiten zu prüfen: Entweder ist $\alpha\vartheta$ in den φ_i kürzbar oder nicht kürzbar.

Nehmen wir zuerst den Fall, dass $\alpha\vartheta$ nicht kürzbar ist. Dann ist auch $\vartheta\alpha$ nicht zu kürzen, weil sonst $\alpha\vartheta = \vartheta\alpha$ eine nicht-identische Beziehung zwischen den φ_i darstellen würde, während doch die φ_i unabhängig sind. Aus $\alpha = \vartheta\alpha\vartheta^{-1} = \vartheta\alpha'$ ersieht man, dass in diesem Falle die Drehung α jedenfalls mit dem Block ϑ beginnt. Da $\vartheta\alpha'$ nicht kürzbar ist, lässt sich wegen $\alpha'\vartheta = \vartheta\alpha'$ auch $\alpha'\vartheta$ nicht kürzen, wegen $\alpha' = \vartheta\alpha'\vartheta^{-1}$ somit $\alpha' = \vartheta\alpha''$. Wiederholen dieser Überlegung zeigt, dass $\alpha = \vartheta^n$ mit natürlichem n . ($n = 0$, das heisst $\alpha = 1$, schliessen wir aus.)

Im andern Falle, wo $\alpha\vartheta$ kürzbar ist, nehmen wir $\alpha\vartheta^{-1}$, das dann nicht kürzbar ist, weil erster und letzter Faktor von ϑ nicht invers sind. Mit derselben Schlussweise wie vorhin ergibt sich wegen $\alpha\vartheta^{-1} = \vartheta^{-1}\alpha$, dass $\alpha = \vartheta^{-n}$ mit natürlichem n . Damit ist der Satz bewiesen. Aus ihm ergibt sich:

Jeder Punkt einer Klasse von Fixpunkten kann eindeutig in der Form $v\beta$ geschrieben werden, wobei β nicht mit dem Block ϑ beginnt und auch nicht mit dem Inversen des letzten Faktors von ϑ . v bedeutet dabei einen Fixpunkt einer kürzesten Operation ϑ der Klasse.

Beweis: Wegen $v\vartheta^m = v$ (m ganz) könnten wir einen oder mehrere eventuell vorhandene Blöcke ϑ am Anfang von β einfach weglassen. Würde $\vartheta\beta$ kürzbar sein, so könnten wir statt β das Produkt $\vartheta^m\beta$ mit genügend grossem m zu Hilfe nehmen, würden kürzen und die schliesslich sich ergebende Form als unser β nehmen. Dieses hat die gewünschte Eigenschaft.

Es bleibt noch zu zeigen, dass diese Darstellung eindeutig ist. Aus $v\beta = v\beta'$, wobei β und β' die genannten Eigenschaften haben, folgt $v\beta'\beta^{-1} = v$, somit gemäss dem eben Bewiesenen $\beta'\beta^{-1} = \vartheta^n$. Für $n > 0$ zeigt $\beta' = \vartheta^n\beta$, dass β' gegen Voraussetzung mit dem Block ϑ beginnen müsste, da $\vartheta\beta$ nicht kürzbar ist. $n > 0$ ist somit nicht möglich. Für $n < 0$ betrachten wir $\beta = \vartheta^{-n}\beta'$; aus denselben Gründen ist auch dies, also $n < 0$, nicht möglich. Es bleibt $n = 0$, das heisst $\beta' = \beta$, was zu beweisen war.

5. Gefordertes System von Kongruenzen. Wir werden die Oberfläche S als Punktmenge in vier Teilmengen A_1, A_2, A_3, A_4 aufteilen, wobei jeder Punkt von S einer und nur einer der Teilmengen A_i angehört: $S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$. Wir werden also jedem Punkt von S genau eine der Nummern 1, 2, 3, 4 zuweisen. Es wird sich als möglich erweisen, die Zerlegung so vorzunehmen, dass zwischen den Teilen die folgenden, sonderbar genug erscheinenden Kongruenzen bestehen:

$$\begin{aligned} A_1 &\cong A_1 + A_2, & \text{somit auch } A_2 + A_3 + A_4 &\cong A_3 + A_4, \\ A_2 &\cong A_1 + A_2, & \text{somit auch } A_1 + A_3 + A_4 &\cong A_3 + A_4, \\ A_3 &\cong A_3 + A_4, & \text{somit auch } A_1 + A_2 + A_4 &\cong A_1 + A_2, \\ A_4 &\cong A_3 + A_4, & \text{somit auch } A_1 + A_2 + A_3 &\cong A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Eine solche Kongruenz ist wie folgt zu verstehen: Es gibt eine Drehung φ_1 , durch welche A_1 genau in $A_1 + A_2$ übergeht, ferner eine Drehung φ_2 , durch welche A_2 genau in $A_1 + A_2$ übergeht, usw. Es gibt also vier Drehungen, welche diese Kongruenzen bewirken:

$$\begin{aligned} A_1\varphi_1 &= A_1 + A_2, & A_3\varphi_3 &= A_3 + A_4, \\ A_2\varphi_2 &= A_1 + A_2, & A_4\varphi_4 &= A_3 + A_4. \end{aligned}$$

Selbstverständlich gilt dann auch zum Beispiel

$$(A_2 + A_3 + A_4)\varphi_1 = A_3 + A_4; \quad \text{ferner } A_1 \cong A_2, \quad A_3 \cong A_4.$$

Die Kugeloberfläche S erscheint so in zwei Teile $A_1 + A_2$ und $A_3 + A_4$ zerlegt, wobei jeder dieser beiden Teile in je zwei ihm selbst kongruente Teile aufgespalten werden kann.

Man kann also von $S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ zum Beispiel die Teile A_2 und A_4 entfernen und aus dem Rest A_1, A_3 durch zwei Drehungen wieder die ganze Oberfläche gewinnen!

Durch Komplementbildung und Verbinden erhält man aus den vier zunächst bloss geforderten Kongruenzen

$$A_1 \cong A_1 + A_2, \quad A_2 \cong A_1 + A_2, \quad A_3 \cong A_3 + A_4, \quad A_4 \cong A_3 + A_4 \quad (1)$$

das folgende vollständige System:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &\cong A_2 \cong A_1 + A_2 \cong A_1 + A_2 + A_4 \cong A_1 + A_2 + A_3, \\ A_3 &\cong A_4 \cong A_3 + A_4 \cong A_2 + A_3 + A_4 \cong A_1 + A_3 + A_4. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Es erweist sich als nützlich, zum Beispiel zur Kongruenz $A_1 \cong A_1 + A_2$ und der gleichbedeutenden $A_2 + A_3 + A_4 \cong A_3 + A_4$ eine Relation R_1 einzuführen, die den Ziffern des Bereiches $\{1, 2, 3, 4\}$ Ziffern desselben Bereiches zuordnet:

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1|2 \\ 2|3|4 \rightarrow 3|4 \end{array} \right.$$

Das soll heissen: Der Ziffer 1 ist die Ziffer 1, aber auch 2 zugeordnet, der Ziffer 2 sind 3 und 4, der Ziffer 3 auch 3 und 4, der Ziffer 4 auch 3 und 4 zugeordnet. Die durch R_1 vermittelten Zuordnungen schreiben wir einzeln auch wie folgt:

$$1 R_1 1, \quad 1 R_1 2, \quad 2 R_1 3, \quad 2 R_1 4, \quad 3 R_1 3, \quad 3 R_1 4, \quad 4 R_1 3, \quad 4 R_1 4.$$

Allgemeiner sei eine Relation R folgendermassen erklärt: Jeder der vier Ziffern 1, 2, 3, 4 werden durch R eine oder mehrere der Ziffern 1, 2, 3, 4 zugeordnet; dabei sollen in den zugeordneten Ziffern wirklich alle Ziffern 1, 2, 3, 4 vorkommen.

Die einer Kongruenz zwischen den Teilmengen A_i entsprechende Relation R heisse *normal*. Sie hat die Form

$$R \left\{ \begin{array}{l} K \rightarrow L \\ K^* \rightarrow L^* \end{array} \right.,$$

wobei K und L je die Mengen aus einer, zwei oder drei der Ziffern 1, 2, 3, 4 bedeuten; K^* und L^* sind die Komplemente von K und L bezüglich $\{1, 2, 3, 4\}$.

Den vier geforderten Kongruenzen (1) entsprechen die folgenden vier normalen Relationen R :

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1|2 \\ 2|3|4 \rightarrow 3|4 \end{array} \right., \quad R_2 \left\{ \begin{array}{l} 2 \rightarrow 1|2 \\ 1|3|4 \rightarrow 3|4 \end{array} \right., \quad R_3 \left\{ \begin{array}{l} 3 \rightarrow 3|4 \\ 1|2|4 \rightarrow 1|2 \end{array} \right., \quad R_4 \left\{ \begin{array}{l} 4 \rightarrow 3|4 \\ 1|2|3 \rightarrow 1|2 \end{array} \right.$$

Es gelten somit beispielsweise die Zuordnungen

$$1 R_2 3, \quad 1 R_2 4, \quad 3 R_3 4, \quad 2 R_3 1 \quad \text{usf.}$$

Gilt $k R_i k$, so heisst k eine Fixziffer von R_i .

6. Produkte von R -Relationen. Die zu einer Relation R inverse Relation R^{-1} sei folgendermassen definiert: Wenn $k R l$, dann $l R^{-1} k$. Somit:

$$R_1^{-1} \left\{ \begin{array}{l} 1|2 \rightarrow 1 \\ 3|4 \rightarrow 2|3|4 \end{array} \right., \quad R_2^{-1} \left\{ \begin{array}{l} 1|2 \rightarrow 2 \\ 3|4 \rightarrow 1|3|4 \end{array} \right., \quad R_3^{-1} \left\{ \begin{array}{l} 3|4 \rightarrow 3 \\ 1|2 \rightarrow 1|2|4 \end{array} \right., \quad R_4^{-1} \left\{ \begin{array}{l} 3|4 \rightarrow 4 \\ 1|2 \rightarrow 1|2|3 \end{array} \right.$$

Das Produkt $R R'$ zweier Relationen R, R' erklären wir wie folgt:

Es gilt $k R R' l$ dann und nur dann, wenn es ein x gibt, für welches $k R x$ und $x R' l$ richtig sind.

Diese Multiplikation ist assoziativ, aber im allgemeinen nicht kommutativ; ferner ist $R R^{-1}$ im allgemeinen nicht die Identität (das heisst $i \rightarrow i$ für $i = 1, 2, 3, 4$).

Eine Relation R heisse *vereinend*, wenn $k R l$ gilt für mindestens ein festes l und $k = 1, 2, 3, 4$.

Wir brauchen die beiden folgenden Sätze, die fast selbstverständlich sind:

a) Multipliziert man zwei Relationen, von denen mindestens eine vereinend ist, so ist auch das Produkt vereinend.

b) Das Produkt zweier normaler Relationen ist entweder normal oder vereinend.

Beweis zu a): Es sei R eine vereinende Relation, R' irgendeine:

$$R \left\{ \begin{array}{l} 1|2|3|4 \rightarrow i \\ \dots\dots\dots \end{array} \right., \quad R' \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow k|\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Also $j R i$ für $j = 1, 2, 3, 4$. Durch R' werden der Ziffer i eine oder mehrere der Ziffern 1, 2, 3, 4 zugeordnet, zum Beispiel die Ziffer l . Also $j R R' l$ für jedes j , das heisst $R R'$ ist vereinend. Aber auch $R' R$ vereinend, da $j R' R i$ für jedes j .

Beweis zu b): Es seien

$$R \left\{ \begin{array}{l} K \rightarrow L \\ K^* \rightarrow L^* \end{array} \right., \quad R' \left\{ \begin{array}{l} M \rightarrow N \\ M^* \rightarrow N^* \end{array} \right.$$

zwei normale Relationen. K, L, M, N bedeuten also irgendwelche echte Teilmengen des Bereiches $\{1, 2, 3, 4\}$ und K^*, L^*, M^*, N^* die Komplemente von K bzw. L, M, N bezüglich $\{1, 2, 3, 4\}$. Zum Beispiel $K = 1|3$ und $K^* = 2|4$.

Erster Fall: $M \equiv L$, also auch $M^* \equiv L^*$. Dann ergibt sich als Produkt die normale Relation

$$R R' \left\{ \begin{array}{l} K \rightarrow N \\ K^* \rightarrow N^* \end{array} \right.$$

Zweiter Fall: $M \equiv L^*$, also auch $M^* \equiv L$. Dann erhält man als Produkt die normale Relation

$$R R' \left\{ \begin{array}{l} K \rightarrow N^* \\ K^* \rightarrow N \end{array} \right.$$

Dritter Fall: M ist weder mit L noch mit L^* identisch. Dann hat aber M oder M^* sowohl mit L als auch mit L^* mindestens je eine gemeinsame Ziffer. Es genügt, den ersten Fall zu prüfen. x sei eine gemeinsame Ziffer von M und L , y eine gemeinsame Ziffer von M und L^* . Wegen $K R x, x R' N$ und $K^* R y, y R' N$ gilt somit $j R R' N$ für jedes $j = 1, 2, 3, 4$. $R R'$ ist somit vereinend, womit b) bewiesen ist.

Wir werden jetzt, ausgehend von R_1, R_2, R_3, R_4 Produkte

$$R = X_1 X_2 \dots X_s \tag{3}$$

bilden, wobei jeder Faktor X_i eine der acht Grössen $R_1^{\pm 1}, R_2^{\pm 1}, R_3^{\pm 1}, R_4^{\pm 1}$ ist. Der folgende Satz ist nun entscheidend:

Jedes Produkt (3) besitzt mindestens eine Fixziffer. Beweis: Jede vereinende Relation besitzt eine Fixziffer. Wegen der Sätze a) und b) brauchen wir somit nur den Fall zu prüfen, in welchem das Produkt zweier normaler Relationen wieder normal ist. In diesem Falle bedeutet nun die Produktbildung genau das Verbinden zweier Kongruenzen zu einer neuen Kongruenz. Zum Beispiel: Aus $A_1 \cong A_1 + A_2$ und $A_1 + A_2 \cong A_2$ folgt $A_1 \cong A_2$ sowie $A_2 + A_3 + A_4 \cong A_1 + A_3 + A_4$.

Dem entspricht exakt die Bildung des Produkts $R_1 R_2^{-1}$:

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 1|2 \\ 2|3|4 \rightarrow 3|4 \end{array} \right., \quad R_2^{-1} \left\{ \begin{array}{l} 1|2 \rightarrow 2 \\ 3|4 \rightarrow 1|3|4 \end{array} \right., \quad \text{also } R_1 R_2^{-1} \left\{ \begin{array}{l} 1 \rightarrow 2 \\ 2|3|4 \rightarrow 1|3|4 \end{array} \right.$$

Ein solches Produkt könnte somit nur dann keine Fixziffer haben, wenn sich aus den den Relationen R_1, R_2, R_3, R_4 entsprechenden Kongruenzen (1) durch Komplementbildung und Verbinden eine Kongruenz zwischen komplementären Teilen von S herleiten liesse. Zum Beispiel $A_1 + A_3 \cong A_2 + A_4$. Nun sind aber alle durch Komplementbildung und Verbinden aus (1) hervorgehenden Kongruenzen im System (2) gegeben und keine fordert die Kongruenz komplementärer Teile von S . (Eine solche ist übrigens unmöglich.) Dieser Fall kann also nicht eintreffen. Demnach hat jedes Produkt (3) mindestens eine Fixziffer. (Man könnte diesen Sachverhalt ohne Zurückgreifen auf die Kongruenzen auch durch direktes Ausrechnen der Produkte aus unseren Faktoren R_i, R_i^{-1} bestätigen. Dieses Verfahren ist aber für die Untersuchung allgemeiner Kongruenzsysteme nicht ohne weiteres anwendbar und lässt den eigentlichen Grund der Sache nicht sichtbar werden.)

7. Herstellen der geforderten Kongruenzen. Es ist jetzt nicht mehr schwierig, die Kugeloberfläche S so in vier Teilmengen A_1, A_2, A_3, A_4 aufzuteilen, dass die Kongruenzen (1) bestehen. Wir denken uns dazu beliebige vier unabhängige Rotationen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ gegeben. G sei die von ihnen erzeugte Gruppe.

Zuerst betrachten wir die Äquivalenzklassen, die aus Nicht-Fixpunkten bestehen. Aus jeder greifen wir einen beliebigen Punkt heraus, den wir mit 1 belegen. Alle diese Punkte rechnen wir zur Teilmenge A_1 . Die weiteren Punkte einer solchen Klasse werden nun ausgehend vom gewählten Anfangspunkt u nach folgender Vorschrift sukzessive verteilt: Ist α irgendeine Operation von G , und gehört der Punkt $u \alpha$ zu A_k , so werfe man den Punkt $u \alpha \varphi_i^{\pm 1}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), wobei $\alpha \varphi_i^{\pm 1}$ nicht kürzbar sei, in eine Teilmenge A_l , für welche $k R_i^{\pm 1} l$ gilt. $u \alpha \varphi_i^{\pm 1}$ liegt also nur dann in A_l , wenn $k R_i^{\pm 1} l$ gilt.

Ausgehend von u in A_1 also zum Beispiel: $u \varphi_1$ in A_1 (oder in A_2), $u \varphi_1 \varphi_2$ in A_3 oder A_4 (bzw. in A_1 oder A_2) usf.

Die Verteilung kann somit auf verschiedene Arten erfolgen. Wir wählen bei jedem Schritt eine der Möglichkeiten. Wesentlich ist nur, dass die Bedingung $k R_i^{\pm 1} l$ beachtet wird.

Damit sind sämtliche Punkte aller Klassen von Nicht-Fixpunkten in den Teilmengen A_1, A_2, A_3, A_4 untergebracht. Da jeder solcher Punkt eindeutig in der Form $u \beta$ erhalten werden kann, ist ein Widerspruch ausgeschlossen.

Eine gewisse Schwierigkeit bietet die Verteilung der Fixpunkte. Es sei irgendeine Äquivalenzklasse von Fixpunkten gegeben. v sei ein Punkt in ihr, der Fixpunkt einer kürzesten Operation ϑ der Klasse ist. Es sei $\vartheta = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_t$, wobei dieses Produkt als nicht kürzbar angenommen wird. Wir bilden aus $v_1 = v$ den Zyklus von Punkten

$$v_1 \xi_1 = v_2, \quad v_2 \xi_2 = v_3, \quad \dots, \quad v_t \xi_t = v_1. \quad (4)$$

Letzteres gilt wegen $v \vartheta = v$. Das Produkt $R = X_1 X_2 \cdots X_t$ der entsprechenden Relationen R_i hat mindestens eine Fixziffer, etwa k . Somit gibt es Ziffern x_2, x_3, \dots, x_t ,

für welche

$$k X_1 x_2, \quad x_2 X_2 x_3, \quad \dots, \quad x_t X_t k$$

gilt. Wir werfen nun $v_1 = v$ in A_k , v_2 in die Teilmenge mit der Nummer x_2 , v_3 in die Teilmenge mit der Nummer x_3 usw., schliesslich v_t in die Teilmenge mit der Nummer x_t . Damit sind die Punkte des Zyklus (4) untergebracht. Ausser diesem Zyklus enthält die betrachtete Klasse keinen weiteren, da jeder Punkt der Klasse gemäss Abschnitt 4 eindeutig in der Form $v\beta$ erhalten wird, wobei β die dort angegebenen Eigenschaften hat. (Aus $v\beta' = v\beta$ würde nämlich $\beta = \vartheta^n \beta'$ folgen; β besitzt aber nicht diese Form.) Die übrigen Punkte der Klasse können wir somit nach der Vorschrift für die Nicht-Fixpunkte verteilen.

Damit ist jeder Punkt von S in eine der Teilmengen A_i untergebracht. Wie wir die Vorschrift auch anwenden, ist keine der Teilmengen leer. A_1 ist von vornherein nicht leer, wegen $1R_2^{-1}2$ auch A_2 nicht. Nun können wir $2R_13$ oder $2R_14$ nehmen. Wählen wir $2R_13$, dann ist A_3 nicht leer, wegen $3R_4^{-1}4$ auch A_4 nicht. Wählen wir aber $2R_14$, so ist A_4 nicht leer und wegen $4R_3^{-1}3$ auch A_3 nicht.

Die Verteilung ist so beschaffen, dass genau die Kongruenzen (1) gelten: Die Rotation φ_1 führt A_1 genau in $A_1 + A_2$ über usw. Es ist selbstverständlich, dass man aus A_1 durch φ_1 wirklich alle Punkte von A_1 und A_2 erhält. Prüfen wir das zum Beispiel an irgendeinem Nicht-Fixpunkt a_2 aus A_2 . a_2 hat seine Nummer 2 auf Grund von $a_2 = u\beta$ erhalten. Endet nun β mit φ_1 , also $a_2 = u\beta'\varphi_1$, so ist $u\beta'$ genau derjenige Punkt in A_1 , aus dem durch φ_1 der Punkt a_2 hervorgeht. Endet β nicht mit φ_1 , so ist es aber der nach R_1^{-1} in A_1 enthaltene Punkt $u\beta\varphi_1^{-1}$, aus dem a_2 hervorgeht. Ähnlich überlegt man für einen Fixpunkt a_2 .

Damit ist der Satz über die Zerlegung von S vollständig bewiesen.

8. Der Satz über die Vollkugel. Die Oberfläche S einer Kugel vom Radius r werde in der beschriebenen Art in vier Teilmengen A_i zerlegt. Alle Punkte auf dem Radius, der nach einem Punkte in A_i führt – ausser dem Kugelmittelpunkt O – belegen wir wie den Endpunkt mit der Nummer i . Damit ist die Vollkugel, abgesehen von O , in vier Teilmengen B_1, B_2, B_3, B_4 aufgeteilt. Nennen wir eine Vollkugel, aus der man den Mittelpunkt entfernt hat, mittenleer, so gilt also:

Eine mittenleere Vollkugel kann in vier Teilmengen B_1, B_2, B_3, B_4 aufgeteilt werden, so dass man sowohl aus den Teilen B_1 und B_3 als auch aus den Teilen B_2 und B_4 durch je zwei Drehungen je eine zur ursprünglichen kongruente mittenleere Vollkugel erhält.

Der Mittelpunkt O erfordert eine besondere Behandlung. Durch eine geeignete Änderung unserer früheren Aufteilung lässt sich auch O einbeziehen.

Wir gehen zurück auf unsere Zerlegung der Kugeloberfläche S und nehmen eine geringfügige Abänderung vor. Es wird davon nur eine einzige Klasse von Nicht-Fixpunkten betroffen. Es sei u irgendein Punkt dieser Klasse, den wir auch mit E bezeichnen, $E \equiv u$. Diesen belegen wir mit keiner Nummer, hingegen werfen wir

$$\begin{aligned} u\varphi_1 &\text{ in } A_3 \text{ oder } A_4, & u\varphi_1^{-1} &\text{ in } A_1, \\ u\varphi_2 &\text{ in } A_3 \text{ oder } A_4, & u\varphi_2^{-1} &\text{ in } A_2, \\ u\varphi_3 &\text{ in } A_1 \text{ oder } A_2, & u\varphi_3^{-1} &\text{ in } A_1 \text{ oder } A_2 \text{ oder } A_4, \\ u\varphi_4 &\text{ in } A_1 \text{ oder } A_2, & u\varphi_4^{-1} &\text{ in } A_1 \text{ oder } A_2 \text{ oder } A_3. \end{aligned}$$

Ausser diesen acht Punkten erfolge die weitere Verteilung genau wie früher. Dann gilt

$$A_1 \varphi_1 = A_1 + A_2 + E, \quad A_3 \varphi_3 = A_3 + A_4,$$

$$A_2 \varphi_2 = A_1 + A_2 + E, \quad A_4 \varphi_4 = A_3 + A_4.$$

Denn $u \varphi_1^{-1}$ geht durch die Drehung φ_1 in E über, ebenso $u \varphi_2^{-1}$ durch φ_2 .

Nehmen wir jetzt eine Vollkugel mit dem Mittelpunkt O und dem Radius r . Alle Punkte, deren Abstand von O zwischen 0 und r liegt, numerieren wir mit $1, 2, 3, 4$ wie zu Beginn dieses Abschnitts. Die Punkte von S tragen ausser E die soeben erklärte Numerierung. Alle Punkte mit der Nummer 1 fassen wir in die Menge A zusammen, entsprechend sind B, C', D die Mengen der Punkte mit der Nummer 2 bzw. 3 und 4 . Die Vollkugel ist so in die sechs Teile A, B, C', D, E und O aufgeteilt. Nach Konstruktion gilt

$$A \varphi_1 = A + B + E, \quad B \varphi_2 = A + B + E, \quad C' \varphi_3 = C' + D, \quad D \varphi_4 = C' + D.$$

Da O bei jeder Rotation in sich übergeht, ist auch $(C' + O) \varphi_3 = C' + O + D$, mit $C' + O = C$ somit $C \varphi_3 = C + D$. Die Vollkugel erscheint so in die fünf Teile A, B, C, D, E zerlegt, so dass man aus A und C durch die Drehungen φ_1 und φ_3 wieder eine gleichgrosse Vollkugel erhält, aber ebenso aus B, D und E durch die Drehung φ_2 von B , die Drehung φ_4 von D und die Translation von E nach O . Damit ist unser Satz bewiesen. Es lässt sich, wie ROBINSON zeigte, unschwer einsehen, dass für eine solche Zerlegung mindestens fünf Teile nötig sind.

9. Rückblick. Die Hauptmomente des Beweises für die merkwürdigen Sachverhalte sind die folgenden: Die Existenz unabhängiger Rotationen und die daraus sich ergebende Möglichkeit der eindeutigen Darstellung der Punkte einer Äquivalenzklasse, das Auswahlaxiom und der Satz über das Vorhandensein einer Fixziffer eines Produktes von R -Relationen, der sich daraus ergibt, dass die geforderten Kongruenzen nicht die Kongruenz komplementärer Teile einer Kugeloberfläche zur Folge haben können.

Es bleibt zu wünschen, vier möglichst einfache unabhängige Rotationen zu finden, für die man die äquivalenten Punkte auf der Kugeloberfläche und deren Numerierung mit $1, 2, 3, 4$ einigermaßen anschaulich überblicken könnte.

10. Existenz unabhängiger Rotationen. Wir werden zuerst die Existenz von zwei unabhängigen Rotationen beweisen. Diesen Fund verdankt man in der Hauptsache HAUSDORFF¹⁾.

In die z -Ebene eines rechtwinkligen $x y z$ -Systems legen wir die Gerade g , welche mit der z -Achse den Winkel $\tau/2$ bildet und dem ersten und dritten Quadranten der $x z$ -Ebene angehört. Über die Grösse τ verfügen wir später. Es sei φ die Drehung um g durch 180° , ψ die Drehung um die z -Achse – im positiven Sinne der $x y$ -Ebene – durch 120° . Diese Drehungen werden dargestellt durch

$$\left. \begin{aligned} \varphi: \quad x' &= -x \cos \tau + z \sin \tau, & y' &= -y, & z' &= x \sin \tau + z \cos \tau; \\ \psi: \quad x' &= \lambda x - \mu y, & y' &= \mu x + \lambda y, & z' &= z. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

¹⁾ F. HAUSDORFF, *Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen*, Math. Ann. 75, 428–433 (1914).

Dabei ist $\lambda = -1/2$ und $\mu = \sqrt{3}/2$.

Die Rotationen der von φ und ψ erzeugten Gruppe haben wegen $\varphi^2 = 1$ und $\psi^3 = 1$ eine der folgenden vier Formen:

$$\pi = \varphi \psi^{m_1} \varphi \psi^{m_2} \dots \varphi \psi^{m_h}$$

oder $\pi_1 = \psi^m \pi \varphi$ oder $\pi_2 = \pi \varphi$ oder $\pi_3 = \psi^m \pi$,

wobei m und m_i ($i = 0, 1, \dots, h$) entweder 1 oder 2 sind.

Keines dieser Produkte kann die Identität darstellen, das heisst, zwischen φ und ψ bestehen einzig die Relationen $\varphi^2 = \psi^3 = 1$, sofern man τ geeignet wählt. Es genügt, dies für die Form π zu zeigen. Denn aus $\pi_1 = 1$ würde $\varphi \pi_1 \varphi = \pi' = 1$ folgen, aus $\pi_2 = 1$ auch $\varphi \pi_2 \varphi = \pi'_3 = 1$ und aus $\pi_3 = 1$ ergäbe sich $\psi^{3-m} \pi_3 \psi^m = \pi' = 1$, wobei π' und π'_3 Produkte der gleichen Art wie π bzw. π_3 sind.

Es genügt also, zu zeigen, dass bei geeignetem τ das Produkt π niemals die Identität darstellt. π ist ein Produkt aus Faktoren der Form $\psi_1 = \varphi \psi$ und $\psi_2 = \varphi \psi^2$.

Nach (5) erhält man, wenn $\cos \tau$ und $\sin \tau$ mit c und s abgekürzt werden:

$$\psi_1 \begin{cases} x' = -\lambda c x + \mu y + \lambda s z \\ y' = -\mu c x - \lambda y + \mu s z \\ z' = s x + c z \end{cases}, \quad \psi_2 \begin{cases} x' = -\lambda c x - \mu y + \lambda s z \\ y' = +\mu c x - \lambda y - \mu s z \\ z' = s x + c z \end{cases}. \quad (6)$$

ψ_1 und ψ_2 unterscheiden sich nur dadurch, dass μ und $-\mu$ vertauscht sind. Wir untersuchen, in welchen Punkt die Operation π als Produkt der Faktoren ψ_1 und ψ_2 den Ausgangspunkt $P_0(0, 0, 1)$ überführt.

P_0 gehe bei Wirken des ersten Faktors in P_1 , P_1 bei Wirken des zweiten Faktors in P_2 usw. über. Nach (6) gilt:

$$P_1: x_1 = \lambda s, \quad y_1 = \pm \mu s, \quad z_1 = c.$$

Allgemein ergeben sich für P_k die Koordinaten

$$x_k = s (a_k c^{k-1} + \dots), \quad y_k = s (b_k c^{k-1} + \dots), \quad z_k = c_k c^k + \dots. \quad (7)$$

Hier sind die Klammern Polynome in c vom Grade $k-1$ und z_k ist ein Polynom in c vom Grade k . In der Tat ist dies für $k=1$ richtig mit

$$a_1 = \lambda, \quad b_1 = \pm \mu, \quad c_1 = 1.$$

Nach Einsetzen von (7) in (6) erhält man für P_{k+1} :

$$x_{k+1} = s [\lambda (c_k - a_k) c^k + \dots],$$

$$y_{k+1} = s [\pm \mu (c_k - a_k) c^k + \dots],$$

$$z_{k+1} = (c_k - a_k) c^{k+1} + \dots.$$

Somit haben auch die Koordinaten von P_{k+1} die Form (7) mit

$$a_{k+1} = \lambda (c_k - a_k), \quad b_{k+1} = \pm \mu (c_k - a_k), \quad c_{k+1} = c_k - a_k.$$

Also

$$c_{k+1} - a_{k+1} = (1 - \lambda) (c_k - a_k) = \frac{3}{2} (c_k - a_k) = \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}.$$

Die Koordinate z_n des Punktes P_n ist also ein Polynom von n -tem Grade in c :

$$z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} (\cos \tau)^n + \dots$$

Ein Produkt π kann somit den Punkt P_0 nur dann wieder in P_0 überführen, wenn das genannte Polynom den Wert 1 hat. Das ist aber nur für höchstens n Werte von $c = \cos \tau$ möglich. Wir denken uns für jedes n diese Werte von $\cos \tau$ ausgeschlossen, womit nur abzählbar viele Werte betroffen werden. Da der Wertevorrat von $\cos \tau$ nicht abzählbar ist, gibt es beliebig viele, sogar nicht-abzählbar viele $\cos \tau$, also auch τ , für welche *kein* Produkt π die Identität darstellt. Damit ist bewiesen, dass zwischen φ und ψ ausser $\varphi^2 = \psi^3 = 1$ tatsächlich keine Relation besteht, sofern τ entsprechend gewählt wird.

Die Rotationen $\psi_1 = \varphi \psi$ und $\psi_2 = \varphi \psi^2$ sind selbst nicht unabhängig voneinander; zum Beispiel gilt

$$(\psi_2 \psi_1^{-1})^3 = (\varphi \psi \varphi)^3 = 1.$$

Hingegen stellen $\omega_1 = \psi_1^2$ und $\omega_2 = \psi_2^2$ zwei vollständig unabhängige Rotationen dar.

Betrachten wir nämlich irgend ein Produkt aus den Faktoren $\omega_1, \omega_1^{-1}, \omega_2, \omega_2^{-1}$, das in diesen nicht kürzbar ist, und setzen für diese die Form in den φ, ψ ein, also

$$\omega_1 = \varphi \psi \varphi \psi, \quad \omega_1^{-1} = \psi^2 \varphi \psi^2 \varphi, \quad \omega_2 = \varphi \psi^2 \varphi \psi^2, \quad \omega_2^{-1} = \psi \varphi \psi \varphi,$$

kürzen in den φ, ψ , soweit man kürzen kann, so bleiben der Produkthanfang und das Produktende von den Formen $\varphi \psi, \psi \varphi, \varphi \psi^2, \psi^2 \varphi$ davon unberührt.

Die vier Operationen

$$\delta_1 = \omega_1 \omega_2, \quad \delta_2 = \omega_1 \omega_2^2, \quad \delta_3 = \omega_1 \omega_2^3, \quad \delta_4 = \omega_1 \omega_2^4$$

sind nicht unabhängig, wie die Relation $\delta_3^{-1} \delta_2 \delta_3^{-1} \delta_4 = 1$ zeigt. Hingegen stellen

$$\varphi_1 = \omega_1 \omega_2 \omega_1 \omega_2, \quad \varphi_2 = \omega_1 \omega_2^2 \omega_1 \omega_2^2, \quad \varphi_3 = \omega_1 \omega_2^3 \omega_1 \omega_2^3, \quad \varphi_4 = \omega_1 \omega_2^4 \omega_1 \omega_2^4$$

vier unabhängige Rotationen dar, wie wir sie früher vorausgesetzt haben. Der Grund ist derselbe wie der soeben für die Unabhängigkeit von ω_1 und ω_2 angegebene.

Wie sich in diesem Abschnitt herausstellte, ist unser Satz somit letzten Endes eine Folge der Nichtabzählbarkeit des Wertevorrats $(-1, +1)$ von $\cos \tau$. Auch hier erweist sich die Nichtabzählbarkeit des Kontinuums, dieses unerschöpflichen Borns der Geometrie, als wesentlich.