Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **11 (1956)**

Heft 1

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Spezialfälle enthalten sind, und schrieb über dieses Gebiet 1938 ein umfangreiches Buch, in welchem unter anderem auch kühnste Vermutungen und Behauptungen ausgesprochen sind, die bis heute noch keineswegs allgemein abgeklärt werden konnten. Erst vor zwei Jahren brachte der finnische Mathematiker LARS AHLFORS weiteres Licht in die Teichmüllerschen Probleme. Heute steht fest, dass unter bestimmten Voraussetzungen stets eine derart geforderte Abbildung mit kleinstem Dilatationsquotienten existiert, wobei interessanterweise bei dieser Extremalenabbildung der Quotient für alle Punkte des Bereiches konstant bleibt. OSWALD TEICHMÜLLER, dessen Probleme die heutige Funktionentheorie noch Jahre hindurch beschäftigen werden, ist im November 1943 im Alter von erst 30 Jahren im Krieg gefallen. Mit ihm hat die Mathematik unserer Zeit allzu früh einen ihrer hervorragendsten Vertreter verloren.

Es steht uns nicht zu, die weitere mögliche Entwicklung unseres Forschungsgebietes zu diskutieren; doch dürfen wir mit Bestimmtheit behaupten, dass die Lehre der konformen Abbildung auch in Zukunft als integrierender Teil der Mathematik, sowohl in rein theoretischer wie in angewandter Richtung, neue und fruchtbare Resultate zeitigen wird.

HANS P. KÜNZI, Zürich.

Ungelöste Probleme

Nr. 9. Herr L. LOCHER-ERNST machte wiederholt auf eine reizvolle Fragestellung aufmerksam (Briefwechsel mit dem Unterzeichneten), welche hier vorgelegt werden soll. Wir betrachten Geraden, die durch den Ursprung eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems des gewöhnlichen Raumes hindurchlaufen und mit den drei Koordinatenachsen Winkel bilden, die mit π kommensurabel sind. Es gibt unendlich viele Geraden dieser Art, doch sind sie fast alle trivial in dem Sinne, als sie in Koordinatenebenen liegen. Im Hinblick auf mannigfaltige Zusammenhänge mit andern geometrischen Fragen sind nur die nicht trivialen Lösungen wichtig, das heisst diejenigen Geraden der bezeichneten Art, die durch das Innere von Raumoktanten hindurchlaufen. Es gibt nun, wie uns Herr LOCHER-ERNST mitteilte, genau 36 verschiedene nichttriviale Geraden mit kommensurablen Achsenwinkeln. Das Problem, dessen Lösung unseres Wissens noch aussteht, geht dahin, für diese Behauptung einen mit einfachen geometrischen Mitteln auskommenden Beweis zu finden.

Unsere Frage lässt sich in arithmetischer Einkleidung wie folgt formulieren: Man ermittle alle Lösungen α, β und γ der Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

unter der Nebenbedingung, dass

$$\alpha = u\pi, \quad \beta = v\pi, \quad \gamma = w\pi \qquad \left(0 < u, v, w < \frac{1}{2}\right)$$

gilt, wobei u, v und w drei rationale Zahlen des rechts angegebenen Intervalls bedeuten. Wenn Lösungen, die durch Permutation ineinander übergehen, identifiziert

werden, gibt es genau zwei Lösungen, nämlich die in der untenstehenden Tafel unter I und II eingetragenen.

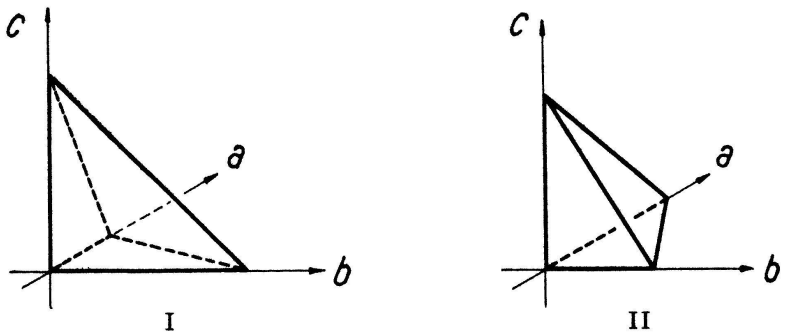
	u	v	w
I	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
II	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$

L. SCHLÄFLI[1]) erwähnt diese Tatsache, ohne eine weitere Begründung anzugeben. In der Tat wurde ein Beweis später von P. GORDAN[2]) gegeben, der aber Hilfsmittel aus der Kroneckerschen Theorie der Kreisteilungsgleichungen beansprucht. Dort steht unser Problem im engsten Zusammenhang mit der algebraischen Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen, einer Aufgabe also, die schon zuvor von F. KLEIN auf anderem Wege gelöst worden war.

Mit naheliegender Verwertung des angegebenen Resultats lassen sich aus I 12 Geraden und aus II 24 Geraden der eingangs festgelegten Art gewinnen, so dass sich insgesamt 36 solche ergeben.

Von den mannigfaltigen Sachverhalten, die mit unserem Theorem in engster Verbindung stehen, erwähnen wir den folgenden: Wie viele Tetraeder vom Volumen $V=1$ und mit ausschliesslich mit π kommensurablen Flächenwinkeln gibt es? Beschränkt man sich lediglich auf Tetraeder mit einer Rechtwinkelecke (vgl. die untenstehende Abbildung), so gibt es genau zwei solche, wenn kongruente und spiegelsymmetrische Lösungen identifiziert werden. Bezeichnen a, b und c die Längen der drei Kanten, die von der Rechtwinkelecke auslaufen, und identifiziert man die drei Winkel α, β und γ mit denjenigen, die von der nach aussen weisenden Normalen der Gegenseitenfläche der Rechtwinkelecke mit den Kanten a, b und c gebildet werden, so entsprechen die Lösungen I und II oben den nachfolgend in der Tafel eingetragenen Tetraedern I und II, die auch abgebildet sind (Verkürzung 1:2).

	a	b	c
I	$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$	$\sqrt[6]{18}$	$\sqrt[6]{18}$
II	$\sqrt[3]{3(\sqrt{5}+2)}$	$\sqrt[3]{3(\sqrt{5}-2)}$	$\sqrt[3]{3}$



I II

[1]) L. SCHLÄFLI, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd. 1, S. 268.

[2]) P. GORDAN, *Über endliche Gruppen linearer Transformationen*, Math. Ann. *12*, 23–46 (1877).

Wenn die bis heute noch nicht erwiesene Vermutung richtig ist, dass die von M. DEHN im Jahre 1901 aufgestellten notwendigen Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder auch hinreichend sind, so müsste sich die Zerlegungsgleichheit der beiden Tetraeder I und II mit dem Einheitswürfel feststellen lassen. Diese Bestätigung dürfte eine recht delikate elementargeometrische Aufgabe darstellen!

H. HADWIGER.

Aufgaben

Aufgabe 226. Die Bewegungsgruppe des ebenen quadratischen Gitters lässt sich durch die beiden Elemente A und B erzeugen, die folgenden Relationen genügen:

$$A^4=1, \quad B^2=1, \quad (AB)^4=1.$$

Die beiden Elemente $U=A^2B$ und $V=ABA$ erzeugen die Translationen in der x- und y-Richtung. Man zeige ohne Geometrie und ohne Matrizen rein gruppentheoretisch:

1. U und V sind vertauschbar.
2. U und V sind von unendlicher Ordnung.
3. Zwischen U und V besteht keine weitere Relation.

A. SPEISER, Basel.

Lösung: $\mathfrak{E}$ sei eine unendliche Gruppe mit zwei Erzeugenden A und B, die die Relationen

$$A^4=1, \quad B^2=1, \quad (AB)^4=1 \tag{1}$$

(und vielleicht noch andere) erfüllen. Wir setzen $U=A^2B$, $V=ABA$ und bekommen leicht mittels (1)

$$U^{-1}V^{-1}UV=BA^2A^{-1}BA^{-1}A^2BABA=(BA)^4=A^{-1}(AB)^4A=1.$$

Die Elemente U und V sind also vertauschbar und erzeugen daher eine Abelsche Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{E}$. Man hat auch die folgenden Relationen:

$$AUVA^{-1}=A^{-1}BAB=V^{-1}U, \tag{2}$$

$$AU^{-1}VA^{-1}=ABA^{-1}B=VU, \tag{3}$$

$$AV^{-1}UA^{-1}=BVUB^{-1}=BABA^{-1}=U^{-1}V^{-1}, \tag{4}$$

$$AV^{-1}U^{-1}A^{-1}=BV^{-1}UB^{-1}=BA^{-1}BA=U^{-1}V. \tag{5}$$

In jeder Gruppe mit zwei Erzeugenden A und B ist die Kommutatorgruppe der von $A^{-1}B^{-1}AB$ erzeugte Normalteiler, das heisst die von allen Konjugierten des Elements $A^{-1}B^{-1}AB$ erzeugte Untergruppe. Nun zeigen (2), (3), (4), (5), dass die Transformationen mit A oder B die Elemente UV, $U^{-1}V$, UV^{-1} und $U^{-1}V^{-1}$ permutieren. (Die Transformation mit B ist wegen $B^2=1$ involutorisch.) Diese vier Elemente bilden somit ein vollständiges System von Konjugierten. Wegen

$$U^{-1}V^{-1}=(UV)^{-1}, \quad UV^{-1}=(U^{-1}V)^{-1}=A^{-1}B^{-1}AB$$

ist also die Kommutatorgruppe die von UV und $U^{-1}V$ erzeugte Abelsche Untergruppe $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{H}$.