

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1955)  
**Heft:** 2

**Rubrik:** Ungelöste Probleme

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 25.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

normalen Durchmessers von  $\bar{\pi}$ .  $s_1$  sei die Richtung von  $H$  nach  $F_1$  (in Pfeilrichtung orientiert!) und  $\nu_1$  die dazu normale Ebene durch  $U^s$ .  $\bar{\pi}$  hat für die Sehstrahlrichtung  $s_1$  den scheinbaren Umriss  $u^s$  in  $\pi$ , der wahre Umriss liegt in  $\nu_1$ . Durch  $A^s$  und  $B^s$  werden die zu  $s_1$  parallelen Geraden gelegt und mit der in Richtung  $s_1$  sichtbaren Hälfte von  $\bar{\pi}$  in  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  geschnitten. Der durch  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  gelegte Grosskreis von  $\bar{\pi}$  liefert bei Projektion in Richtung  $s_1$  eine Ellipse in  $\pi$ , die durch  $A^s$  und  $B^s$  geht und  $u^s$  in diametralen Punkten berührt, wobei  $A^s$  und  $B^s$  von den Berührungs punkten nicht getrennt werden. Diese Ellipse ist nach Hilfssatz 2 eindeutig bestimmt und ist daher mit  $c^s$  identisch.  $c^s$  und der Grosskreis durch  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  sind durch die Sehstrahlen affin aufeinander bezogen, und da  $A^s$  und  $B^s$  Endpunkte konjugierter Durchmesser von  $c^s$  sind, sind  $U^s\bar{A}$  und  $U^s\bar{B}$  zwei zueinander normale Räden von  $\bar{\pi}$ <sup>1)</sup>.

Diese mit  $c^s$  durchgeführte Konstruktion lässt sich für  $a^s$  und  $b^s$  wiederholen. Man erhält so zur Sehstrahlrichtung  $s_1$  drei Punkte  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  auf  $\bar{\pi}$ , die mit  $U^s$  ein räumliches orthogonales Dreibein bilden. Daher ist  $\bar{\pi}$  eine mögliche Lage der gesuchten Einheitskugel und  $U^s, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$  eine mögliche Lage des gesuchten räumlichen Dreibeins  $UABC$ . Andere Lagen gehen daraus durch Parallelverschiebung in Richtung  $s_1$  hervor. Dreht man diese Dreibeine um die Nebenachse von  $u^s$ , bis  $s_1$  in die Richtung  $s_2 \parallel [HF_2]$  gelangt, so erhält man die zur Sehstrahlrichtung  $s_2$  gehörigen Dreibeine. Sie sind mit den früheren gleichsinnig kongruent. Als Länge der Einheitsstrecke im Raum ergibt sich beide Male die Länge der halben Nebenachse von  $u^s$ .

Ist statt  $U$  die Gegenecke von  $U$  unsichtbar (Untersicht statt Obersicht), so ergeben sich zur Sehstrahlrichtung  $s_1$  Achsenkreuze, die zu den vorher gefundenen bezüglich  $\nu_1$  spiegelbildlich liegen; analog für  $s_2$ .

In gleicher Weise lässt sich der Satz von POHLKE in dem (praktisch uninteressanten) Sonderfall beweisen, dass zum Beispiel  $U^s, B^s, C^s$  auf einer Geraden liegen.  $A^s$  liegt dann auf  $u^s$ ,  $\bar{A}$  in  $\nu_1$  bzw.  $\nu_2$ ; die Projektion des Grosskreises durch  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  berührt  $u^s$  in  $A^s$  und im diametralen Punkt und geht durch  $B^s$ , sie ist daher  $c^s$ .

FRITZ HOHENBERG, Graz.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 4.** Unter der Länge eines konvexen Rotationskörpers verstehen wir die Ausdehnung des Körpers in Richtung der Achse, also den Abstand der beiden auf der Achse liegenden Pole.

Herr H. BIERI (Bern) hat verschiedene Extremalprobleme gelöst, die sich auf derartige Rotationskörper mit fest vorgeschriebener Länge beziehen. Bis heute offen geblieben sind aber beispielsweise die beiden folgenden Fragen: Welcher konvexe Rotationskörper vorgeschriebener Länge hat bei gegebenem Integral der mittleren

<sup>1)</sup> Man könnte auch auf Hilfssatz 2 verzichten und so schliessen: Durch  $u^s$  geht ein Sehstrahlenzyylinder  $\zeta_u$ , der  $\pi$  längs eines Kreises  $k$  in  $\nu_1$  berührt; durch  $c^s$  geht ein Sehstrahlenzyylinder  $\zeta_c$ , der  $\zeta_u$  längs zweier Erzeugenden berührt.  $\zeta_c$  berührt  $\pi$  in den beiden Schnittpunkten dieser Erzeugenden mit  $k$ , daher zerfällt die Schnittkurve von  $\zeta_c$  mit  $\pi$  in zwei Kreise auf  $\pi$ .  $c$  sei einer dieser Kreise,  $A$  und  $B$  seien die Schnittpunkte von  $c$  mit den Sehstrahlen durch  $A^s$  und  $B^s$ . Die ebenen Schnitte  $c$  und  $c^s$  von  $\zeta_u$  sind affin aufeinander bezogen, daher sind  $A$  und  $B$  Endpunkte zueinander normaler Durchmesser von  $c$ .

Krümmung: a) kleinste Oberfläche? b) grösste Oberfläche? Wegen einer Vermutung zu a) vgl. H. BIERI: *Ein  $(M, F)$ -Problem mit Nebenbedingung*, Experientia 9, H. 6, 207 (Basel 1953).  
H. HADWIGER, Bern.

*Berichtigung.* In Nr. 2 der Rubrik «Ungelöste Probleme» [El. Math. 9, Nr. 6, 134 (1954)] muss der Ausdruck für  $D_3$  natürlich

$$D_3 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}} = 0,8880\dots$$

heissen.

(Red.)

## Aufgaben

**Aufgabe 200.** Zeige, dass das Volumen  $V_n(d)$  einer Kugel in  $n$  Dimensionen und mit einem Durchmesser  $d$  gegeben ist durch

$$V_n(d) = \frac{d^n}{\Gamma^*(n+1)} \quad \text{wo} \quad \Gamma^*(n+1) = \prod_{k=2, 4, 6, \dots} \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n}{1 + \frac{n}{k}} \right\}.$$

[Wird das Produkt für  $\Gamma^*(n+1)$  über alle natürlichen  $k$  erstreckt, so ergibt sich die bekannte Eulersche Formel für die Gamma-Funktion  $\Gamma(n+1)$ ]. B. VAN DER POL, Genf.

*Lösung:* Es genügt, die Behauptung für die Einheitskugel zu beweisen. Der Schnitt einer  $n$ -dimensionalen Einheitskugel mit einer Hyperebene im Abstand  $\cos\alpha$  vom Mittelpunkt ist eine  $(n-1)$ -dimensionale Kugel vom Radius  $\sin\alpha$ . Daraus folgt die Rekursionsformel

$$V_n = \int_0^\pi V_{n-1} \sin^n \alpha \, d\alpha = J_n V_{n-1} \quad \text{mit} \quad J_n = \int_0^\pi \sin^n \alpha \, d\alpha.$$

Sie gilt, wenn man  $V_0 = 1$  setzt, auch noch für  $n = 1$ . Also ist  $V_n = J_1 J_2 \dots J_n$ .

Durch partielle Integration ergibt sich

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}, \tag{1}$$

und daraus folgt

$$\frac{V_n}{V_{n-2}} = J_n J_{n-1} = \frac{n-1}{n} J_{n-1} J_{n-2} = \dots = \frac{1}{n} J_1 J_0 = \frac{2\pi}{n}.$$

Nach (1) ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{J_{m-1}}{J_m} = 1$$

und daher

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{4}{n} \cdot \frac{J_0}{J_1} = \frac{4}{n} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \left[ \prod_{k=1}^N \left( \frac{2k}{2k+1} \right)^2 \right] (2N+1).$$

Ferner ist

$$\frac{1}{n} = \left[ \prod_{k=1}^N \frac{n+2k}{n-2+2k} \right] \frac{1}{n+2N};$$