

Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 6

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

G' durch dieselbe Verschiebung hervorkommt als G' von G (Figur 5), so haben wir eine dreifache Kreislagerung von der Dichte $3 \cdot 8\pi/7\sqrt{15}$ vor uns usw.

Die folgende Bemerkung rührt von FEJES TÓTH her. Eine neue Richtung in der Theorie der regulären Figuren versucht, die Regularität durch irgendeine Extremaleigenschaft zu erfassen. So sind zum Beispiel mehrere Extremaleigenschaften verschiedener Figurengitter bekannt. Die oben angegebene zweifache Kreislagerung lässt vermuten, dass sich durch eine natürliche Extremalforderung auch ein reguläres, aber nicht gitterförmiges Punktsystem charakterisieren lässt.

A. HEPPEs, Budapest.

Kleine Mitteilungen

Verallgemeinerung eines elementaren Satzes von Laplace

Auf LAPLACE geht der folgende Satz der Himmelsmechanik zurück: Es sei ein System von drei nicht-kollinearen gravitierenden Massenpunkten gegeben. Dann gehen die Kräfte, die je zwei Massenpunkte auf den jeweiligen dritten ausüben, durch ein und denselben Punkt, und dieses Kräftezentrum fällt dann und nur dann mit dem Massenmittelpunkt des Systems zusammen, wenn die Massenpunkte auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen. – Wir wollen hier nun zeigen, dass dieser Satz (wie so viele Sätze der Himmelsmechanik) keineswegs für die Gravitation charakteristisch ist, sondern für praktisch alle Zentralkräfte gilt in der folgenden Form: Es sei ein System von drei nicht-kollinearen Massenpunkten gegeben, die wechselseitig mit Kräften aufeinander wirken, die nur von den gegenseitigen Abständen abhängen. Dann gehen die Kräfte, die je zwei Massenpunkte auf den dritten ausüben, sämtlich durch ein und denselben Punkt. Sind überdies die Kräfte zwischen je zwei Massenpunkten streng monotone Funktionen des Abstandes und sind sie den Massen proportional, so fällt das Kräftezentrum dann und nur dann in den Massenmittelpunkt, wenn die Massenpunkte auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks liegen.

Der Beweis erfolgt sehr einfach durch Ausrechnen. Es seien m_1, m_2, m_3 die drei Massen, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ ihre Ortsvektoren und $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3$ die Kräfte, die bzw. auf den ersten, zweiten, dritten Massenpunkt einwirken. Schliesslich bezeichnen wir mit F_{12}, F_{23}, F_{31} die Beträge der Kraft bzw. zwischen dem ersten und zweiten Massenpunkt usw. Dann gilt

$$\mathfrak{R}_1 = F_{12} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + F_{13} \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} \quad \text{usw.}$$

Wir setzen

$$\frac{F_{12}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{1}{f_3} \quad \text{usw.}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{f_3} + \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{f_2} \\ &= \frac{1}{f_2 f_3} \{f_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + f_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)\} \\ &= \frac{1}{f_2 f_3} \{f_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1) + f_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + f_3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)\} \\ &= \frac{1}{f_2 f_3} \{f_1 \mathbf{r}_1 + f_2 \mathbf{r}_2 + f_3 \mathbf{r}_3\} - \frac{f_1 + f_2 + f_3}{f_2 f_3} \mathbf{r}_1 \\ &= f_1 \frac{f_1 + f_2 + f_3}{f_1 f_2 f_3} \left\{ \frac{f_1 \mathbf{r}_1 + f_2 \mathbf{r}_2 + f_3 \mathbf{r}_3}{f_1 + f_2 + f_3} - \mathbf{r}_1 \right\} \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Hieraus lesen wir den ersten Teil der Behauptung ab: Bei zyklischer Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 geht der Vektor

$$\mathbf{r}_* = \frac{f_1 \mathbf{r}_1 + f_2 \mathbf{r}_2 + f_3 \mathbf{r}_3}{f_1 + f_2 + f_3}$$

in sich selbst über. Der entsprechende Punkt liegt also auf jeder der drei Kraftlinien.

Zum Beweise des zweiten Teils setzen wir

$$\frac{1}{f_3} = \frac{F_{12}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \frac{m_1 m_2}{\varphi_3} \quad \text{usw.},$$

wobei nach Voraussetzung die φ_i nur noch von den wechselseitigen Abständen, aber nicht mehr von den Massen abhängen. Führen wir diesen Ausdruck in den für \mathbf{r}_* ein, so ergibt sich:

$$\mathbf{r}_* = \frac{\varphi_1 m_1 \mathbf{r}_1 + \varphi_2 m_2 \mathbf{r}_2 + \varphi_3 m_3 \mathbf{r}_3}{\varphi_1 m_1 + \varphi_2 m_2 + \varphi_3 m_3}.$$

Man rechnet nun leicht nach, dass dieser Vektor mit dem für den Massenmittelpunkt genau dann übereinstimmt, wenn $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$. Wegen der streng monotonen Abhängigkeit der wechselseitigen Kräfte von den Abständen bedeutet das aber, dass die Massenpunkte ein gleichseitiges Dreieck zu bilden haben.

Es sei noch angemerkt, dass der Laplacesche Satz keinerlei tieferen Zusammenhang mit LAGRANGES Lösung des Dreikörperproblems besitzt. Bei dieser bilden die drei gravitierenden Massenpunkte in jedem Augenblick ein gleichseitiges Dreieck, das zu allen Zeiten ein und derselben raumfesten Ebene angehört. Merkwürdigerweise ist diese etwas künstlich anmutende Möglichkeit in der Natur verwirklicht: Die Trojaner, eine Gruppe kleiner Planeten, bilden mit Jupiter und mit der Sonne beständig ein gleichseitiges Dreieck. Da die Trojaner eine gegen Sonne und Jupiter vernachlässigbar kleine Masse besitzen, so fällt der Massenmittelpunkt des Dreiecks praktisch mit dem der Seite Sonne–Jupiter zusammen. Auf diesen ist also die Kraft gerichtet, die Sonne und Jupiter gemeinsam auf die Trojaner ausüben.

Literatur

WINTNER, A., *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, §§ 403–406 (Princeton University Press, 1941). Dort findet man weitere Literaturhinweise.

R. KURTH, Bern.

Die Konfiguration des Pascalschen Sechsecks

Die Konfiguration des Pascalschen Sechsecks wird in der Literatur oft behandelt, zum Beispiel von DINGELDEY¹⁾ und BAKER²⁾.

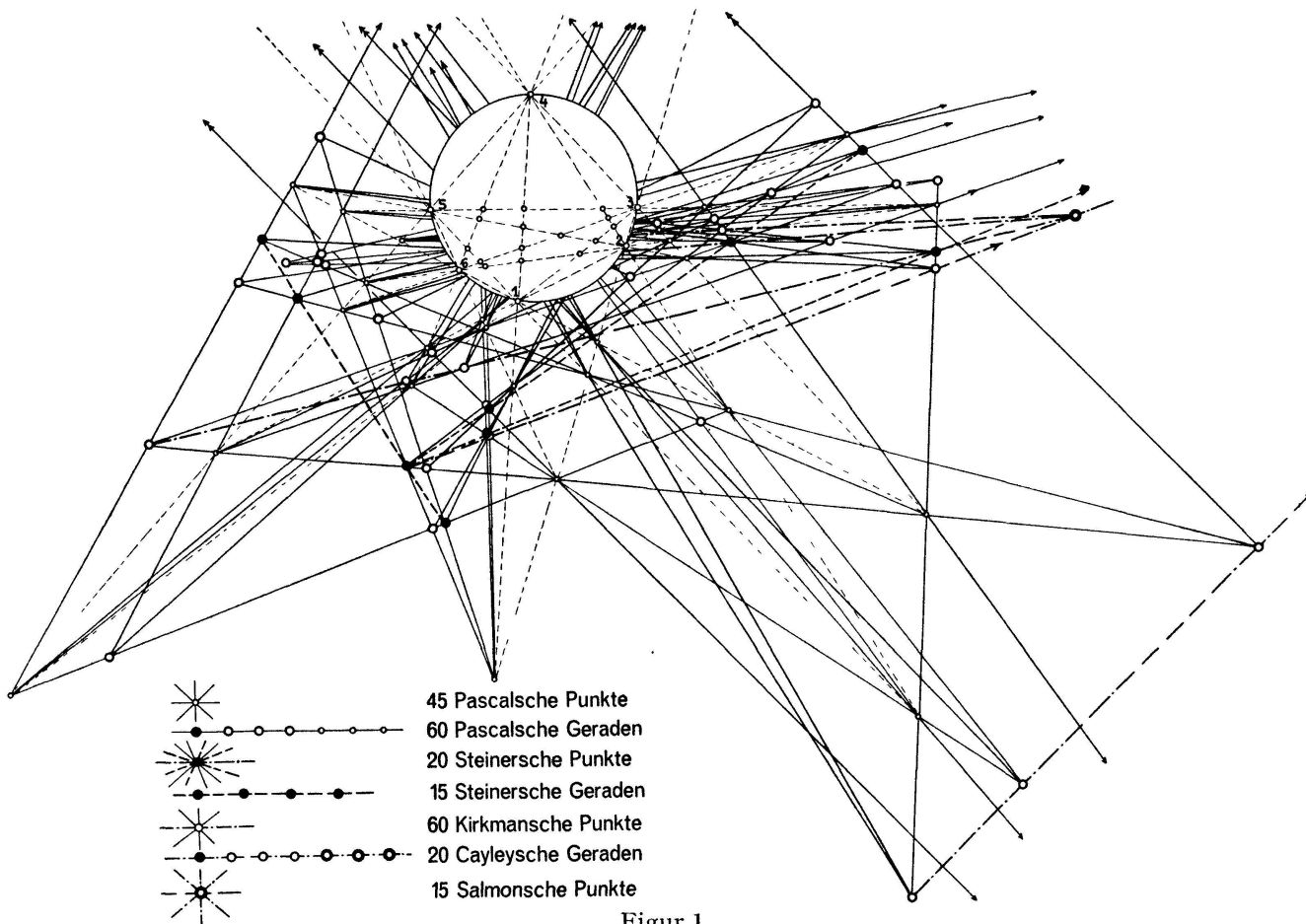
Eine Zeichnung, in der alle 60 Pascalschen Geraden zu sehen sind, habe ich bisher noch nirgends gefunden. Sollte sie irgendwo existieren, so wird sie wohl schwer zugänglich sein.

In den Figuren 1 und 2 ist diese Konfiguration hinsichtlich der Pascalschen Geraden vollständig gezeichnet. Es ist wohl nicht möglich, das Innere und Äussere des Kegelschnittes in einer einzigen Abbildung darzustellen. Ohne die Angaben, die in dem Buch von KLUG³⁾ gemacht werden, hätte ich die beiden Abbildungen nicht herstellen können.

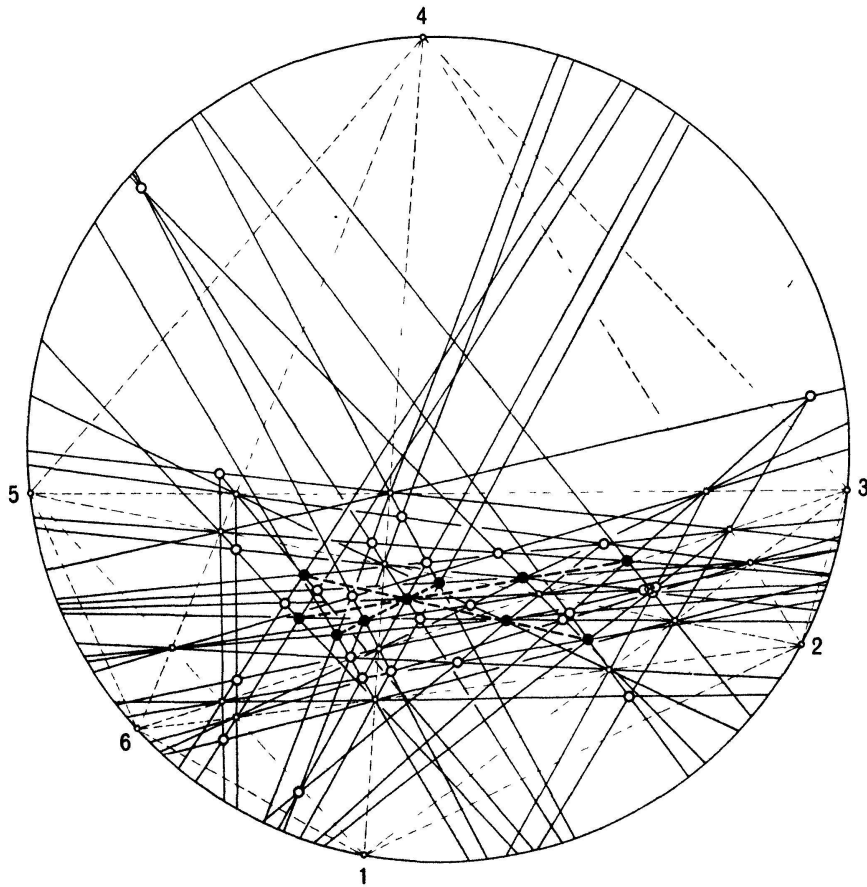
¹⁾ F. DINGELDEY, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, 2. Teil (Leipzig 1930).

²⁾ H. F. BAKER, *Principles of Geometry*, Bd. 2, 2. Aufl. (Cambridge 1954).

³⁾ L. KLUG, *Die Konfiguration des Pascalschen Sechsecks* (Kolozsvár 1898).



Figur 1



Figur 2

Wie bekannt, gibt es

- 45 Pascalsche Punkte,
- 60 Pascalsche Geraden,
- 60 Kirkmansche Punkte,
- 20 Steinersche Punkte,
- 15 Steinersche Geraden,
- 20 Cayleysche Geraden,
- 15 Salmonsche Punkte.

Die in Betracht kommenden Konfigurationen sind:

60 Pascalsche Geraden und 45 Pascalsche Punkte ergeben die Konfiguration $(60_3, 45_4)$.

60 Pascalsche Geraden und 60 Kirkmansche Punkte ergeben die Konfiguration $(60_3, 60_3)$.

Diese besteht aus 6 Desarguesschen $(10_3, 10_3)$.

15 Steinersche Geraden und 20 Steinersche Punkte ergeben die Konfiguration $(15_4, 20_3)$.

20 Cayleysche Geraden und 15 Salmonsche Punkte ergeben die Konfiguration $(20_3, 15_4)$.

15 Steinersche + 20 Cayleysche Geraden und 20 Steinersche + 15 Salmonsche Punkte ergeben die Konfiguration $(35_4, 35_4)$.

60 Pascalsche + 20 Cayleysche Geraden und 60 Kirkmansche + 20 Steinersche Punkte ergeben die Konfiguration $(80_4, 80_4)$.

Die beiden Figuren enthalten:

	innerhalb des Kreises	ausserhalb des Kreises	
Pascalsche Punkte	15	25	5 ausserhalb der Figur
Pascalsche Geraden	60		
Kirkmansche Punkte	28	30	2 ausserhalb der Figur
Steinersche Punkte	10	9	1 ausserhalb der Figur
Steinersche Geraden	3	3	Rest nicht gezeichnet
Cayleysche Geraden	-	5	Rest nicht gezeichnet
Salmonsche Punkte	-	1	Rest nicht gezeichnet

Um die Figuren nicht zu überlasten, ist eine grössere Zahl von Punkten und Geraden weggelassen. Die Anordnung der in Figur 1 unten gezeichneten Punkte und Geraden ist selbstverständlich nur schematisch zu verstehen.

Man kann die Pascalsche Konfiguration auch für das regelmässige Sechseck zeichnen. Dabei sind 6 Pascalsche Geraden unendlich fern und 3mal je 4 fallen zusammen, so dass man nur 45 dieser Geraden zeichnen kann. 18 Kirkmansche Punkte sind unendlich fern, während 6 in den Mittelpunkt des Kreises fallen.

Einen weiteren Spezialfall erhält man, wenn der Kegelschnitt in zwei Geraden zerfällt. K. WANKA, Wien.

Ungelöste Probleme

Nr. 8. Anlässlich eines Vortrages im Mathematischen Kolloquium Winterthur im Sommer 1947 erörterte H. HOPF¹⁾ verschiedene Sätze über stetige Funktionen auf der Kugelfläche. Es zeigt sich, dass verschiedene ältere und neuere Aussagen dieser Art mit einem zentralen Satz in engste Beziehung gebracht werden können, der auch vom erwähnten Referenten als eventuell gültig gestreift wurde, dessen Nachweis aber

¹⁾ El. Math. 2, 119-120 (1947).