Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1955)
Heft: 6

Artikel: Volumschätzung für die einen Eikörper überdeckenden und unterdeckenden Parallelotope

Autor: Hadwiger, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18086

qualités morales et humaines. C'était un homme d'une grande bonté, profondément généreux et altruiste. A ses assistants qui débutaient dans l'enseignement, il disait volontiers: «... surtout n'oubliez jamais qu'il faut aimer ses élèves.» Et, montrant l'exemple, il n'a jamais cessé d'aimer ses élèves, s'intéressant à eux pendant leurs études et après leurs études, sans jamais se départir de sa bienveillance coutumière ni de ce respect de la personnalité d'autrui qui est si nécessaire à tout professeur.

Altruisme, bienveillance, générosité! Toutes ces qualités se retrouvent dans l'influence exercée par GUSTAVE DUMAS dans son activité en marge de l'université, en particulier à la Société mathématique suisse, dont il fut membre depuis sa fondation en 1910 et qu'il a présidée durant les années 1922 et 1923. Il faudrait parler aussi de son rôle au Cercle mathématique de Lausanne, dont il fut l'un des fondateurs, au Colloque des mathématiciens romands et au Groupe rhodanien, où il apportait son appui toujours si précieux et où il s'était attiré tant de solides amitiés.

Entouré de l'affection de ses enfants et de ses amis, il s'est endormi paisiblement le 11 juillet 1955. Nous prions sa famille de croire à notre très vive et chaude sympathie, et nous conserverons pieusement le souvenir de cette belle et riche personnalité, toute éprise d'idéal. GEORGES DE RHAM.

Volumschätzung für die einen Eikörper überdeckenden und unterdeckenden Parallelotope

Es sei A ein eigentlicher konvexer Körper[1]) des k-dimensionalen euklidischen Raumes vom Volumen $V(A)$. In der folgenden Note geben wir einen einfachen rekursiven Beweis der beiden folgenden Aussagen:

Es gibt ein gerades Parallelotop[2]) P, das den Eikörper A überdeckt, dessen Volumen $V(P)$ so klein ist, dass die Ungleichung

$$V(P) \leqq k!\, V(A) \quad [A \subset P] \tag{a}$$

besteht[3]). Ferner gibt es ein gerades Parallelotop Q, das den Eikörper A unterdeckt, dessen Volumen $V(Q)$ so gross ist, dass die Ungleichung

$$V(Q) \geqq \left(\frac{1}{k}\right)^k V(A) \quad [Q \subset A] \tag{b}$$

erfüllt wird[4]).

[1]) Abgeschlossene, konvexe und beschränkte Punktmenge.

[2]) Intervall, in angepassten rechtwinkligen Koordinaten z_i durch $a_i \leqq z_i \leqq b_i$; $i = 1, \ldots, k$ charakterisiert.

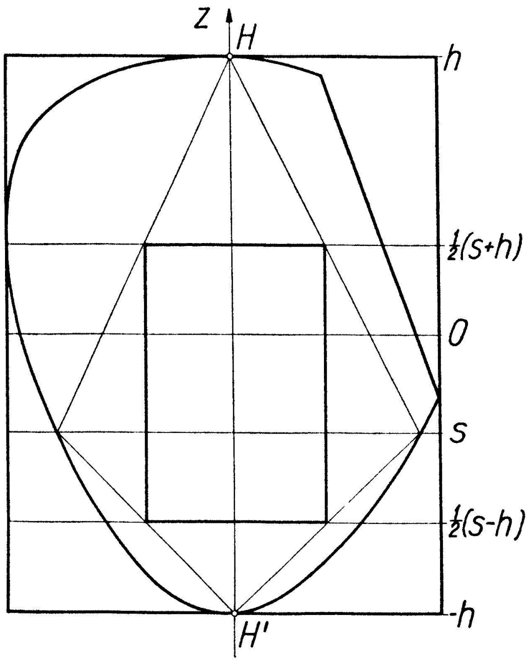
[3]) Der Fall $k = 2$ ist besonders einfach zu diskutieren. Vergleiche G. PÓLYA–G. SZEGÖ [1] 109 (5.10), (Lemma I); dort ist ein einfacher Beweis von H. RADEMACHER angegeben. Hier kann die Konstante $k! = 2$ übrigens nicht durch eine kleinere ersetzt werden. Für ein Dreieck A gilt stets $V(P) \geqq 2\, V(A)$. Im Falle $k = 3$ wurde die Aussage auch von K. RADZISZEWSKI [2] gewonnen.

[4]) Im Falle $k = 3$ und unter der weiteren Bedingung, dass A eine Symmetrieebene aufweist, wurde von K. RADZISZEWSKI [2] das wesentlich schärfere Ergebnis $V(Q) \geqq (2/9)\, V(A)$ erzielt. Im Falle $k = 2$ gewinnt der gleiche Verfasser $V(Q) \geqq (1/2)\, V(A)$. Hier kann die Konstante $(1/2)$ auch nicht vergrössert werden. Ist A ein Dreieck, so gilt stets $V(Q) \leqq (1/2)\, V(A)$.

Es darf angenommen werden, dass Parallelotope P und Q mit einer gemeinsamen Kantenrichtung (*a*) und (*b*) simultan erfüllen[1]). Dies folgt aus der Beweiskonstruktion, indem die beiden Höhen der Parallelotope P und Q in der Richtung der z-Achse liegen, also parallel ausfallen.

Beweis: Die Behauptungen (a) und (b) sind im Falle $k=1$ richtig und trivial. Es sei $k>1$, und wir treffen die induktive Annahme, dass unsere Aussagen bereits für die Dimension $k-1$ sichergestellt seien.

Es liege nun der k-dimensionale Fall vor. Wir gehen von einer Durchmessersehne HH' des Eikörpers A der Länge $2h$ aus. Eine solche ist die Verbindungsstrecke zweier Punkte H und H', welche die grösste Distanz realisieren, die durch die Punktepaare des Eikörpers geliefert werden. Man beachte hier und nachfolgend die nebenstehende Abbildung, die sich auf den Fall $k=2$ bezieht. Die Mitte der Sehne HH' wählen wir als Ursprung eines Koordinatensystems und lassen die Sehne in die z-Achse fallen. Es bezeichne $E(t)$ die auf der z-Achse orthogonal stehende $(k-1)$-dimensionale Ebene $z=t$. Nach Konstruktion sind dann $E(h)$ und $E(-h)$ parallele Stützebenen von A.



In der Tat muss der Eikörper ganz im (abgeschlossenen) Parallelstreifen zwischen $E(h)$ und $E(-h)$ liegen, da er andernfalls einen Punkt enthalten müsste, der entweder von H oder aber von H' eine Entfernung aufweisen würde, die den Wert $2h$ übersteigt, im Widerspruch zur Definition des Durchmessers.

Durch Orthogonalprojektion von A auf $E(0)$ entsteht dort ein $(k-1)$-dimensionaler Eikörper A_0 vom $(k-1)$-dimensionalen Volumen $V_0(A_0)$. Nach der induktiven Voraussetzung gibt es im Raum $E(0)$ ein gerades Parallelotop P_0, so dass $A_0 \subset P_0$ gilt und die Ungleichung

$$V_0(P_0) \leqq (k-1)!\, V_0(A_0) \tag{aa}$$

besteht. Andererseits gilt aber die Beziehung

$$2h\, V_0(A_0) \leqq k\, V(A). \tag{ab}$$

Um dies einzusehen, denken wir uns zunächst den bezüglich $E(0)$ symmetrischen Eikörper $\bar{A}$, der aus A durch eine Steinersche Symmetrisierung an der Ebene $E(0)$ hervorgeht. Aus den einfachsten Eigenschaften dieser Transformation folgt $H, H' \subset \bar{A}$ und $A_0 \subset \bar{A}$. Bilden wir die konvexe Hülle von H, H' und A_0, so entsteht ein symmetrischer Doppelkegelkörper X, und es gilt demnach auch $X \subset \bar{A}$, also $V(X) \leqq V(\bar{A})$. Da aber weiter $V(\bar{A}) = V(A)$ ist, folgt so (ab).

---

[1]) Im Falle $k=2$ liegen dann P und Q parallel. Mit (a) und (b) gewinnt man $V(P)/V(Q) \leqq 8$. Verlangt man, dass P und Q sogar parallel und ähnlich (homothetisch) ausfallen sollen, so ist dies nach G. PÓLYA–G. SZEGÖ [1] (5.10) (Lemma II) noch möglich mit $V(P)/V(Q) \leqq 9$.

Nach Konstruktion und der vorliegenden elementargeometrischen Sachlage ergibt sich jetzt leicht, dass A durch ein gerades Parallelotop P überdeckt ist, dessen Querschnittparallelotop in $E(0)$ mit P_0 identisch, dessen Höhe $2h$ und dessen Volumen demnach

$$V(P) = 2h\, V_0(P_0) \quad [A \subset P] \tag{ac}$$

ist. Die Verbindung der Relationen (aa), (ab) und (ac) ergibt die Behauptung (a).

Einen neuen Ausgangspunkt wählen wir mit der Volumenformel

$$V(A) = \int_{-h}^{h} V_0[A \cap E(t)]\, dt,$$

wobei wir über die mit t stetig variierenden $(k-1)$-dimensionalen Volumina der Schnitteikörper $A \cap E(t)$ integrieren.

Nach dem Mittelwertsatz lässt sich ein s $(-h < s < h)$ so angeben, dass mit der Setzung $A \cap E(s) = A_{00}$ die Beziehung

$$2h\, V_0(A_{00}) = V(A) \tag{ba}$$

besteht. Nach der induktiven Annahme gibt es im Raum $E(s)$ ein gerades Parallelotop Q_0, so dass $Q_0 \subset A_{00}$ gilt und die Ungleichung

$$V_0(Q_0) \geqq \left(\frac{1}{k-1}\right)^{k-1} V_0(A_{00}) \tag{bb}$$

besteht. Bilden wir jetzt die konvexe Hülle von H, H' und Q_0, so entsteht eine Doppelpyramide Y, und es gilt $Y \subset A$. Ist $0 < \lambda < 1$, so sind die Durchschnitte

$$S_\lambda = Y \cap E\,[(1-\lambda)\, s + \lambda h],$$

$$S'_\lambda = Y \cap E\,[(1-\lambda)\, s - \lambda h]$$

zwei in der z-Richtung übereinanderstehende translationsgleiche Parallelotope, die aus Q_0 durch ähnliche Verkleinerung im Verhältnis $1:(1-\lambda)$ hervorgehen. S_λ und S'_λ bilden offensichtlich Grund- und Deckfläche eines geraden Parallelotops Q_λ der Höhe $2\lambda h$, das, wie nach Konstruktion klar wird, in A enthalten ist und dessen Volumen durch

$$V(Q_\lambda) = 2\lambda h\, (1-\lambda)^{k-1}\, V_0(Q_0) \tag{bc}$$

gegeben ist. Setzen wir speziell $\lambda = 1/k$ und $Q_\lambda = Q$, so ergibt sich in Verbindung von (ba), (bb) und (bc) die Behauptung (b). H. HADWIGER, Bern.

Literatur

[1] G. PÓLYA – G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics,* Ann. Math. Stud. Princeton *27* (1951).

[2] K. RADZISZEWSKI, *Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux figures convexes,* Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska [A] *6*, 5–18 (1953).