

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1955)  
**Heft:** 5: Zum 60.Geburtstag von Rolf Nevanlinna

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Kleine Mitteilungen

### Über eine unstetige Funktion $f(x, y)$

Es sei  $\mathbf{x} \sim (x, y)$  und  $f(\mathbf{x}) \sim f(x, y)$ .

Dann haben wir formal wie im Eindimensionalen die

*Definition:*  $f(\mathbf{x})$  heisst stetig in einem Punkt  $\mathbf{x}_0$ , wenn  $f(\mathbf{x})$  in einer Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  definiert ist und wenn gilt

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_v) = f(\mathbf{x}_0)$$

für alle gegen  $\mathbf{x}_0$  konvergente Folgen  $\{\mathbf{x}_v\}$ .

Die Unstetigkeit der Funktion

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

(Plückerisches Konoid) im Nullpunkt kann man bekanntlich also dadurch zeigen, dass man etwa zwei konvergente Punktfolgen  $\{\mathbf{x}_v\} \sim \{(x_v, y_v)\}$  auswählt, deren zugehörige Folgen  $f(\mathbf{x}_v)$  im Punkte  $(0, 0)$  verschiedene Grenzwerte haben.

Zunächst ist es sinnvoll, an der Stelle  $(0, 0)$  der Funktion (1) den Wert 0 zuzuordnen, denn (1) hat längs der beiden Koordinatenachsen die Werte

$$\left. \begin{array}{l} f(0, y) = 0, \\ f(x, 0) = 0. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Die Unstetigkeit im Punkt  $(0, 0)$  erkennen wir nun so: Wir wählen etwa eine Punktfolge auf der  $x$ -Achse ( $y = 0$ ), das heisst

$$\{\mathbf{x}_v\} \sim \{(x_v, 0)\}$$

mit

$$\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = 0.$$

Dann ist

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_v) = 0. \quad (3)$$

Andererseits betrachten wir eine Punktfolge auf der Geraden

$$y = a x \quad (\text{mit } a \neq 0),$$

also

$$\{\mathbf{x}_v\} \sim \{(x_v, a x_v)\}$$

mit

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{x}_v = (0, 0).$$

Dann gehört dazu

$$\lim_{v \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_v) = \frac{a}{1 + a^2} \neq 0. \quad (4)$$

Nach unserer Definition ist nun möglich, dass es auch Funktionen  $g(x, y)$  geben kann, bei denen alle längs der Geraden

$$y = \alpha x \quad (\alpha \text{ beliebig})$$

genommenen Punktfolgen  $\{\mathbf{x}_v\}$  mit

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{x}_v = (0, 0)$$

zugehörige Grenzwerte

$$\lim_{v \rightarrow \infty} g(\mathbf{x}_v) = g(0, 0) \quad (5)$$

haben können, so dass also im Nullpunkt Stetigkeit vermutet werden könnte. Trotzdem aber kann es dann gewisse Kurven geben, längs deren die darauf liegenden Punktfolgen  $\{\mathbf{x}_v\}$ , wieder mit

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{x}_v = (0, 0),$$

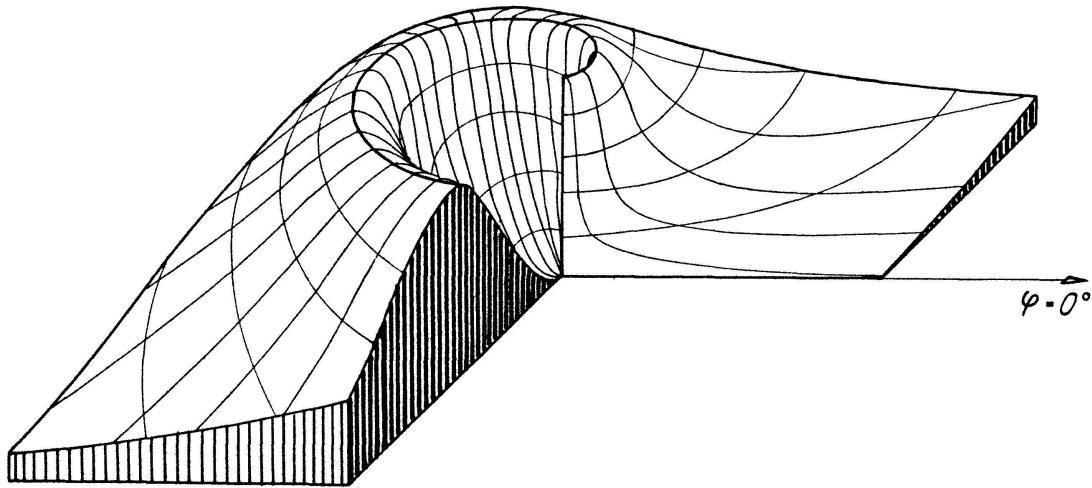
einen Grenzwert

$$\lim_{v \rightarrow \infty} g(\mathbf{x}_v) \neq g(0, 0) \quad (6)$$

zur Folge haben, womit also per definitionem diese Funktionen

$$g(\mathbf{x}) \sim g(x, y)$$

im Nullpunkt als unstetig erkannt sind.



Figur 1

Es ist nun interessant, dass man das Beispiel einer solchen Funktion leicht erhält, indem man in der Gleichung (1) an Stelle der kartesischen Koordinaten  $x, y, z$  direkt die Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  schreibt. Man erhält so die Funktion

$$z = g(r, \varphi) = \frac{r \varphi}{r^2 + \varphi^2}. \quad (7)$$

Dabei wird man wieder sinnvoll  $g(0, 0) = 0$  definieren sowie verlangen müssen (um eine eindeutige Funktion zu erhalten)

$$0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Den Geraden

$$y = \alpha x$$

entsprechen dabei die Radialstrahlen  $\varphi = c = \text{const.}$

Haben wir also darauf Punktfolgen  $\{\mathbf{x}_v\} \sim \{(r_v, c)\}$  mit

$$\lim_{v \rightarrow \infty} r_v = 0,$$

so gilt dort für (7)

$$\lim_{v \rightarrow \infty} g(\mathbf{x}_v) = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{r_v c}{r_v^2 + c^2} = 0. \quad (8)$$

Bewegen wir uns aber etwa auf einer *archimedischen Spirale* gegen den Nullpunkt,

$$\underline{r = \varphi},$$

so wird für die Punktfolge

$$\{\mathbf{x}_v\} \sim \{(\varphi_v, \varphi_v)\}$$

mit

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \varphi_v = 0$$

der zugehörige Grenzwert

$$\lim_{v \rightarrow \infty} g(x_v) = \lim_{v \rightarrow \infty} g(\varphi_v, \varphi) = \frac{1}{2} \neq 0. \quad (9)$$

Übrigens lautet die Gleichung (7) in kartesischen Koordinaten unter Beibehaltung des dort Gesagten

$$z = g(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arctg} y/x}{x^2 + y^2 + (\operatorname{arctg} y/x)^2}. \quad (10)$$

Figur 1 zeigt im Ausschnitt die «analytische Landschaft» dieser Funktion in skizzenhafter axonometrischer Darstellung.

HANS WAGNER, Karlsruhe.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 7.** Wir fragen uns: Gibt es einen Satz der ebenen kombinatorischen Geometrie, der wie folgt lautet: Werden je  $k$  Kreisbereiche einer endlichen Menge sich gegenseitig nicht überdeckender kongruenter Kreise der Ebene durch eine geeignete Gerade getroffen, so gibt es eine Gerade, die alle Kreisbereiche der Menge trifft? Welchen Wert hat die Stichzahl  $k$ , wenn ein derartiger Satz überhaupt existiert?

Man kann leicht einsehen, dass jedenfalls  $k \geq 5$  sein müsste. In der Tat: Betrachtet man die Menge der 5 Kreise, deren Mittelpunkte die Ecken eines regulären Fünfecks bilden und deren Radien gleich der halben Fünfeckseite sind, so weisen je 4 Kreise eine gemeinsame Sekante auf, während dies für alle 5 Kreise nicht der Fall ist.

Hat die Kreismenge die zusätzliche Eigenschaft, dass eine separierende Richtung in der Ebene so vorhanden ist, dass jede parallele Gerade höchstens einen Kreis der Menge trifft, so gilt die Aussage bereits mit  $k = 3$ . In diesem Fall können die Kreise übrigens durch Eibereiche beliebiger Form und Grösse ersetzt werden. Dies ist eine Verschärfung eines Resultats von P. VINCENSINI<sup>1)</sup>, welche von V. L. KLEE jr. stammt<sup>2)</sup>.

H. HADWIGER.

*Nachtrag zu Nr. 6.* Herr H. LENZ (München) teilte uns mit, dass die im letzten Absatz angegebene vermutete Schätzung  $N_k(n) < n(k+1)/2$  unrichtig ist. Ein von ihm konstruiertes Beispiel zeigt, dass jedenfalls  $N_k(n) \geq (k-1)n - (k+1)(k-2)/2$  für  $n > k$  gelten muss; für  $k > 3$  und grosse  $n$  resultiert die Unrichtigkeit der Vermutung.

## Aufgaben

**Aufgabe 216.** Gegeben sind zwei windschiefe Strecken  $AB$  und  $CD$ . Man konstruiere zwei berührend aneinanderschliessende Kreisbögen vom gleichen Radius, von denen der eine  $AB$  in  $A$ , der andere  $CD$  in  $C$  berührt.

J. STROMMER, Budapest.

*Lösung:* Die beiden sich berührenden Kreise  $k_1$  und  $k_2$  liegen auf der Kugel  $K$ , die  $AB$  in  $A$  und  $CD$  in  $C$  berührt. Das Zentrum  $M$  von  $K$  ergibt sich, indem man die Schnitt-

<sup>1)</sup> Atti del Quarto Congresso dell'Unione Mat. Ital. 1951, II, 454–464.

<sup>2)</sup> Common Secants for Plane Convex Sets, Proc. Amer. Math. Soc. 5, 639–641 (1954).