Elementargeometrischer Nachweis des "gefährlichen" Drehzylinders beim räumlichen Rückwärtseinschnitt

Autor(en): **Krames, Josef**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **10 (1955)**

Heft 5: **Zum 60.Geburtstag von Rolf Nevanlinna**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-18083

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

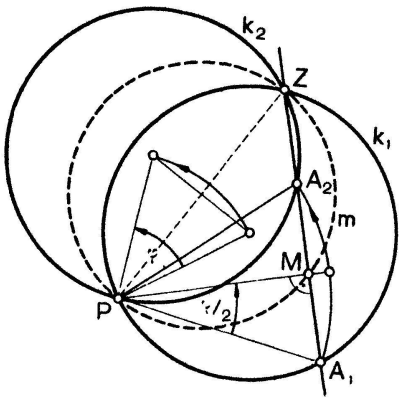
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Elementargeometrischer Nachweis des «gefährlichen» Drehzylinders beim räumlichen Rückwärtseinschnitt

1. Die Aufgabe, durch ein gegebenes Dreieck ABC ein Dreikant abc von gegebener Gestalt zu legen (räumlicher Rückwärtseinschnitt) hat bekanntlich vier Lösungen (sofern je zwei zur Ebene von ABC symmetrische Dreikante nur einfach gezählt werden). Zwei der wesentlich verschiedenen Lösungen können auch zusammenfallen, nämlich, wie S. FINSTERWALDER[1]) als erster gezeigt hat, genau dann, wenn der Dreikantscheitel S auf dem «gefährlichen Zylinder» liegt, der den ABC umschriebenen Kreis zum Normalschnitt hat. Einen anderen, methodisch verbesserten Beweis dieser Tatsache lieferte W. WUNDERLICH in einer vom Verfasser angeregten Arbeit[2]). Während FINSTERWALDER noch mit unendlich kleinen Grössen verschiedener Ordnung operiert, verwendet WUNDERLICH die Eigenschaften des Nullsystems, das mit einer zwangsläufigen Raumbewegung in jedem Augenblick verbunden ist. Es fehlte aber noch ein bloss auf elementare Hilfsmittel gestützter Nachweis. Diese Lücke soll hier geschlossen werden, wobei vor allem einfache Beziehungen zwischen perspektiv liegenden kongruenten Dreiecken zur Anwendung kommen.



Figur 1

2. Wir betrachten zuerst einen Kreis k_1 und verdrehen ihn um einen seiner Umfangspunkte P durch einen beliebigen Winkel φ in die Lage k_2 (Figur 1). Darnach geht die Drehsehne jedes Umfangspunktes A_1 von k_1, das heisst die Verbindungsgerade dieses Punktes mit seiner Endlage A_2, durch den zweiten Schnittpunkt Z von k_1 und k_2. Diesbezüglich sei bloss auf den Kreis m verwiesen, auf dem die Mitten M aller Strecken A_1A_2 liegen (siehe Figur 1).

Liegt jedoch der Drehpol P weder auf dem Umfang von k_1 noch im Unendlichen und wird auch von der Annahme $\varphi = \pm\pi$ abgesehen, dann umhüllen die Drehsehnen A_1A_2 eine nicht zerfallende Kurve zweiter Klasse, nämlich jene, die P zum Brennpunkt und m zum Scheitelkreis hat. Es gibt daher in diesem Falle nie mehr als zwei Verbindungsgeraden entsprechender Punkte von k_1 und k_2, die durch einen Punkt Z gehen. Nun bilden insbesondere drei Paare entsprechender Punkte von k_1 und k_2 zwei gleichsinnig kongruente Dreiecke, und solche können (samt ihren Umkreisen) durch eine Verdrehung innerhalb ihrer Ebene zur Deckung gebracht werden. Daraus ergibt sich folgender

Hilfssatz[3]). *Zwei (in derselben Ebene befindliche) gleichsinnig kongruente Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, deren Seiten nicht paarweise parallel sind* (Figur 2), *liegen dann*

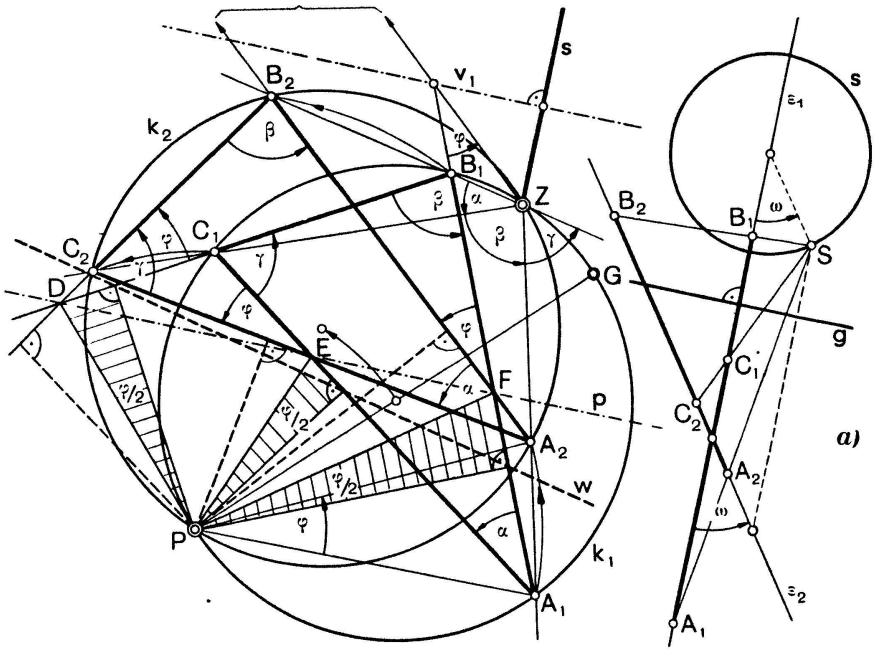
[1]) S. FINSTERWALDER, *Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie*, Jber. dtsch. Math. Ver. *6* 1–44 (1899).

[2]) W. WUNDERLICH, *Über den «gefährlichen» Rückwärtseinschnitt*, Jber. dtsch. Math. Ver. *53*, 41–48 (1943).

[3]) Wie unschwer nachzuweisen ist, gilt dieser Satz auch für gleichsinnig *ähnliche* Dreiecke, wobei der Drehpol P durch das Zentrum der Drehstreckung zu ersetzen ist, die $A_1B_1C_1$ in $A_2B_2C_2$ überführt. Wir kommen hierauf in einem anderen Zusammenhang noch zurück.

und nur dann perspektiv, wenn sie durch eine Verdrehung um einen Schnittpunkt P ihrer Umkreise k_1 und k_2 ineinander übergehen. Das Perspektivitätszentrum deckt sich dabei mit dem zweiten Schnittpunkt Z von k_1 und k_2, ferner sind die Winkel zwischen den Perspektivitätsstrahlen A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 in dieser zyklischen Reihenfolge gleich den bei den Ecken C_1 (oder C_2), $A_1(A_2)$ bzw. $B_1(B_2)$ auftretenden Dreieckswinkeln γ, α, β (siehe Figur 2).

3. Wir bezeichnen nunmehr mit P und φ den Pol und den Winkel der Verdrehung, die irgendein Dreieck $A_1B_1C_1$ innerhalb seiner Ebene in ein gleichsinnig kongruentes



Figur 2

Dreieck $A_2B_2C_2$ überführt. Je zwei entsprechende Dreieckseiten sind sodann von P gleich weit entfernt und gegeneinander unter dem Winkel φ geneigt (vgl. Figur 2). Die Schnittpunkte D, E, F zugeordneter Dreiecksseiten werden daher auch erhalten, wenn man aus P auf die Seiten von $A_1B_1C_1$ die Lote fällt, diese um P durch den Winkel $\varphi/2$ verdreht und hierauf mit den betreffenden Dreieckseiten zum Schnitt bringt. Diese drei Punkte D, E, F liegen aber (nach DESARGUES) auf einer Geraden p, sobald die Verbindungsgeraden entsprechender Ecken A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 durch ein Zentrum Z gehen. Nach obigem folgt hieraus zunächst, wenn man bloss auf das erstgenannte Dreieck achtet, der schon PONCELET bekannte[1])

Satz. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit seinem Umkreis k; fällt man aus einem beliebigen Umfangspunkt P von k auf die Dreieckseiten die Lote und unterwirft man diese einer Verdrehung um P durch irgendeinen Winkel ψ, so liegen die Schnittpunkte der drei gedrehten Lote mit den zugeordneten Dreieckseiten immer auf einer Geraden p (siehe Figur 2, wo jetzt $\varphi/2$ durch ψ zu ersetzen ist).

[1]) Wegen der sehr umfangreichen Literatur zur Dreiecksgeometrie sei bloss auf G. BERKHAN und W. F. MEYER, Enzykl. math. Wiss. III A B 10, verwiesen. Obige Ausführungen sind einer Vorlesung über «geometrische Grundlagen der Photogrammetrie» entnommen, die der Verfasser vor kurzem an der Technischen Hochschule Wien gehalten hat.

Für den Sonderfall $\psi = 0$ ergibt sich damit auf sehr einfache Weise der bekannte Satz von WALLACE[1]). Die *Wallacesche Gerade w* erscheint in diesem Zusammenhang als Perspektivitätsachse zweier zusammengerückter Dreiecke.

4. Um von der perspektiven Lage zweier kongruenter Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, wie sie obigem Hilfssatz entspricht, zu einer räumlichen perspektiven Lage zu gelangen, werde zum Beispiel $A_2B_2C_2$ um die Perspektivitätsachse p aus der Ebene ε_1 von $A_1B_1C_1$ herausgedreht. Lässt man dabei den Winkel ω zwischen ε_1 und der Ebene ε_2 von $A_2B_2C_2$ alle möglichen Werte annehmen, dann beschreibt das Zentrum S der räumlichen Kollineation bekanntlich den Kreis s, dessen Ebene zu p normal ist und dessen Mitte auf der Verschwindungsgeraden v_1 der Ebene ε_1 liegt. Dieser Kreis ist samt den beiden Dreiecken in Figur 2*a* im Seitenriss auf eine zu p normale Bildebene dargestellt. Das räumliche Perspektivitätszentrum S ist mithin eindeutig bestimmt, sobald neben $A_1B_1C_1$ noch der Drehpol P auf dem Umkreis dieses Dreiecks und die Verdrehungswinkel φ, ω gegeben sind. Für $\varphi = 0$, $\omega \neq 0$ ist S insbesondere ein Fernpunkt.

Umgekehrt lassen sich zwei räumlich perspektiv liegende kongruente Dreiecke immer durch eine Verdrehung ihrer Ebenen ε_1 und ε_2 um deren Schnittgerade p in die besondere Lage des Hilfssatzes bringen. Dabei ist nur darauf zu achten, dass diese Dreiecke nach der Vereinigung der Ebenen gleichen Umlaufsinn aufweisen. Andernfalls ergeben sich in $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ zwei ungleichsinnig kongruente perspektive Dreiecke; auf solche ist jedoch unser Hilfssatz zur Gänze nicht anwendbar.

5. Zur Lösung der eingangs erwähnten Aufgabe kann man auch das Dreikant abc festhalten und mit einer Ebene derart schneiden, dass die Schnittfigur zum gegebenen Dreieck ABC kongruent wird. Dies ist ebenfalls auf vier wesentlich verschiedene Arten möglich. Zwischen je zwei derartigen ebenen Schnitten besteht der soeben erläuterte Zusammenhang.

Im besonderen rücken zwei dieser Schnittdreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zusammen, wenn sowohl der Winkel ω zwischen ihren Ebenen als auch der Winkel φ der Verdrehung um den Pol P *gegen Null konvergiert.* Bei diesem Grenzübergang geht der Umkreis k_2 von $A_2B_2C_2$ in den Umkreis k_1 von $A_1B_1C_1$ über, ferner das Zentrum Z in den Gegenpunkt G von P auf k_1. Da überdies die Gegenachse v_1 von ε_1 für $\varphi \to 0$ zur Ferngeraden von ε_1 wird, degeneriert der Kreis s nunmehr in die durch G gelegte Normale g zu ε_1. Das räumliche Perspektivitätszentrum S erhält somit eine Grenzlage, die dieser Geraden g angehört und durch den Grenzwert des Quotienten $\varphi : \omega$ eindeutig bestimmt ist. Da φ und ω unabhängig voneinander sind, kann S in jeden beliebigen Punkt von g fallen. Ferner kann der Pol P ebenso wie sein Gegenpunkt G jede beliebige Lage auf k_1 einnehmen, so dass alle möglichen Geraden g den Zylinder mit dem Normalschnitt k_1 bilden.

Damit ist in der Tat bewiesen, dass die räumlichen Perspektivitätszentren S aller Paare kongruenter und perspektiver Dreiecke, die im gegebenen Dreieck ABC zusammengerückt sind, den Mantel des Drehzylinders erfüllen, der durch A, B, C geht und dessen Erzeugenden zur Ebene dieses Dreiecks normal sind. JOSEF KRAMES, Wien.

---

[1]) Siehe Fussnote auf Seite 107.