in Finnland an. Fachzeitschriften aus verschiedenen Ländern, wie die Acta Mathematica, die Mathematische Zeitschrift, das Zentralblatt für Mathematik und die Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo beriefen ihn in die Redaktionen. Die beiden finnischen Korporationen Wiburgenses und Südfinnen – der letzteren gehörte er als Student selber an – ernannten ihn zum Ehrenmitglied. Auch die Freunde Finnlands in der Schweiz würdigten den verdienten finnischen Gelehrten in Zürich durch die Ehrenmitgliedschaft. Eine besondere und seltene Ehrung erwies die Universität Göttingen dem nordischen Mathematiker, indem sie ihn zu ihrem Ehrenbürger ernannte. Den Ehrendoktor verliehen ihm die Universitäten Heidelberg, Bukarest, Giessen und Berlin.

Neben der eigenen Forschung legte Prof. Dr. ROLF NEVANLINNA stets grössten Wert auf die Förderung begabter junger Mathematiker. So entstanden unter seiner Leitung in Finnland nicht weniger als 18 und in Zürich 8 Dissertationen. Durch die gemeinsame Arbeit mit all seinen Schülern, denen er nicht nur wissenschaftlicher, sondern auch menschlicher Berater war, blieb Prof. NEVANLINNA stets mit der jungen Generation verbunden und bewahrte dadurch neben der nie erlahmenden geistigen Beweglichkeit auch eine bewundernswerte körperliche Rüstigkeit.

Abschliessend mögen uns die eigenen Worte des heute gefeierten Wissenschafters einen kleinen Einblick in sein mathematisch-philosophisches Arbeiten verschaffen. Wir lesen in seiner Betrachtung über *Die Mathematik und das wissenschaftliche Denken*:

«Was nun die mathematische Arbeit im besonderen erfordert, ist, neben einem mehr als gewöhnlich ausgebildeten Vermögen, klar und bewusst zu denken, vor allem eine Freiheit des Geistes, die es erlaubt, sich leicht und unbehindert von eingewurzelten und verfestigten Denkgepflogenheiten umzustellen, sich nach freien Vereinbarungen zu richten und das für den Augenblick Wesentliche festzuhalten, während störende Nebenumstände bewusst ausgeschlossen werden. Auf einer höheren Stufe werden ausserdem noch gewisse allgemeine Eigenschaften erforderlich: philosophisches Interesse und philosophische Einstellung, Geschmack, Sinn für das Architektonische und ein speziell geartetes Entdeckungsvermögen, das sich gründet auf natürliche Vertrautheit mit der mathematischen Erscheinungswelt, bewegliche Phantasie und Kombinationsvermögen sowie ein sicheres Gefühl für das Mögliche – kurz all das, was man bei dem etwas vagen Wort Intuition im Auge hat.»

Mögen diese Worte der weisen Erkenntnis auch weiterhin für die junge Mathematikergeneration wegleitend bleiben, denn ihr hat Professor ROLF NEVANLINNA, dem wir heute in Dankbarkeit zum sechzigsten Geburtstag gratulieren, einen Grossteil seines bisherigen Lebens in aufopfernder Arbeit gewidmet. HANS P. KÜNZI, Zürich.

Le triangle comme opérateur géométrique

1. Etant donné un triangle quelconque $P_0Q_0R_0$, on peut faire correspondre à tout couple de points P et Q un point R unique en exigeant que le triangle PQR soit directement semblable au triangle de base $P_0Q_0R_0$.

Si, P étant fixe, Q décrit une droite d, le point R décrit une droite $d(P)$ obtenue à partir de d par une homothétie de centre P et de rapport, $\overline{Q_0P_0}/\overline{R_0P_0}$ suivie d'une rotation d'angle $Q_0P_0R_0$. Si Q décrit une courbe c, R décrit une courbe semblable $c(P)$; si P varie, toutes les courbes $c(P)$ s'obtiennent à partir d'une d'elles par une simple translation.

2. Soit A une correspondance (h, k) entre les points P d'une courbe C d'ordre n et les points Q d'une courbe D d'ordre p: A tout point P correspondent k points Q; à tout point Q, h points P.

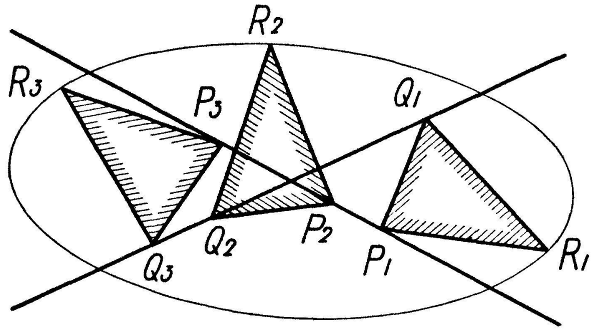

Figure 1

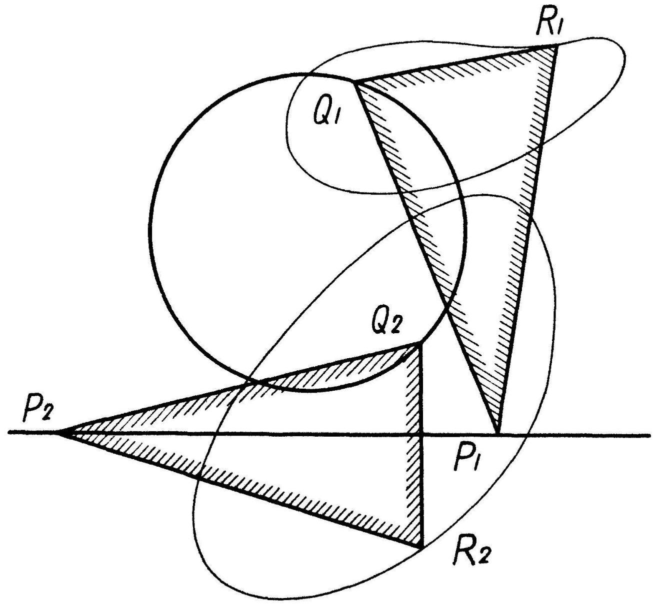

Figure 2

Si l'on considère tous les triangles semblables PQR déterminés par les points correspondants P et Q, quel est le lieu du point R?

Etablissons sur C la correspondance $P'P''$ définie ainsi: Si $Q' = \mathsf{A}(P')$, à P' correspondent les points P'' tels que le triangle $P''\mathsf{A}(P')R'$, semblable au triangle de base, ait son sommet R' sur une droite donnée quelconque d. A P' correspondent k points Q'; si R' parcourt d, P'' parcourt la droite $d(Q')$, qui coupe C aux n points P'' cherchés; à P' correspondent donc $k\,n$ points P''. Inversement, si P'' est donné, quand R' varie sur d, Q' varie sur la droite $d(P'')$ qui coupe D en p points Q'; chaque point Q' a h images P'; à P'' correspondent donc $h\,p$ points P'. La correspondance $P'P''$ est donc une correspondance $(h\,p, k\,n)$. Pour simplifier, nous supposerons la courbe C (et donc aussi D) de genre O. Il y a alors $h\,p + k\,n$ points doubles $P' = P''$; à chacun de ces points correspond sur d un des points R cherchés. Donc:

Si l'on suppose qu'à tout point P d'une courbe C d'ordre n et de genre O correspondent k points Q d'une courbe D d'ordre p et qu'à tout point Q correspondent h points P, et si l'on considère tous les triangles directement semblables PQR déterminés par deux points correspondants, le lieu du sommet R est une courbe d'ordre $hp + kn$.

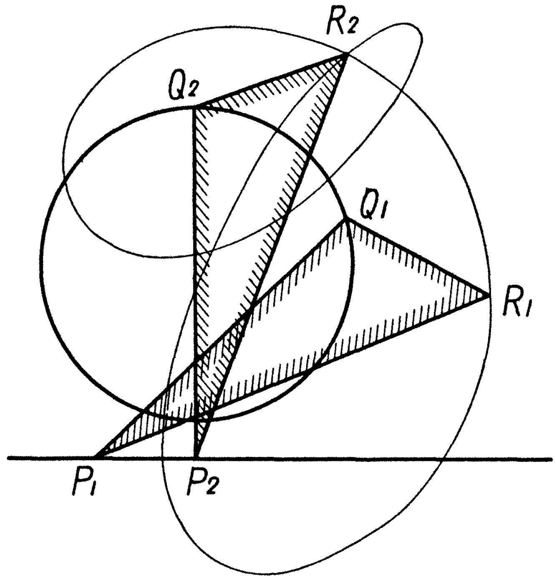

Figure 3

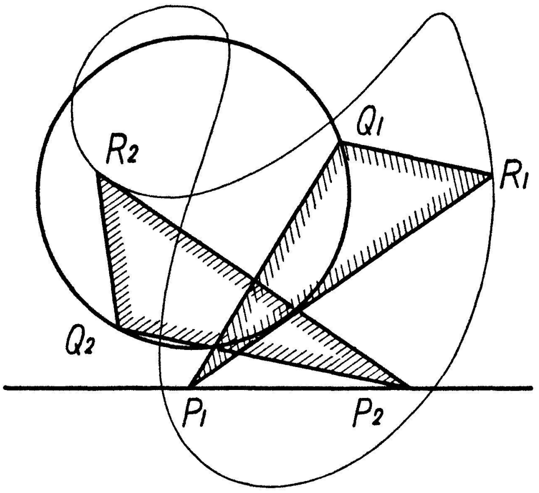

Figure 4

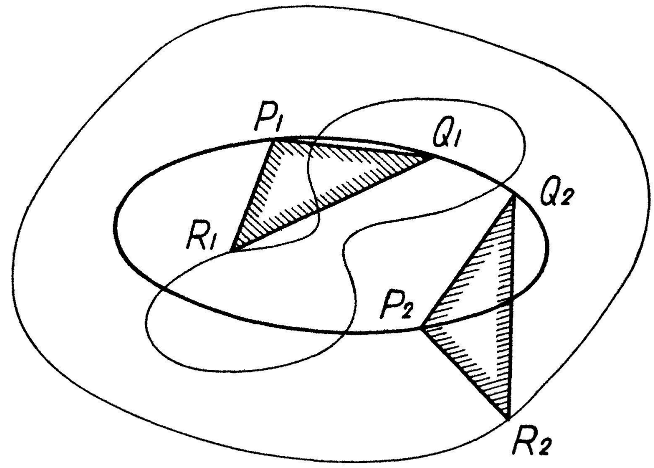

Figure 5

Dans le cas particulier le plus simple où C et D sont des droites et où la correspondance est une projectivité, le lieu de R est une conique (et l'on obtient les problèmes N° 227 et N° 232 des «Elemente», d'où sont sorties les présentes considérations).

3. Soient $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_p$ les points à l'infini de C et de D; supposons que le point P_i ait pour images les points $Q_1, \ldots, Q_p$ avec les multiplicités $s_{i1}, \ldots, s_{ip}$; dans la correspondance $P'P''$, la droite $d(Q_j)$ est alors la droite à l'infini, elle passe par P_i qui est donc un point double $P' = P''$, point à compter $\sum_i s_{ij}$ fois. Le lieu du point R sera alors une courbe d'ordre $hn + kp - \sum_{ij} s_{ij}$. Exemple: *Soient A et B les points où une tangente variable coupe deux tangentes fixes d'une parabole; les sommets C des triangles semblables ABC sont sur une droite.*

4. Cas particulier: La correspondance entre P et Q est telle que: distance $\overline{PQ}$ = constante. A tout point P de C correspondent alors $2p$ points Q; à tout point Q, $2n$ points P. Dans ce cas, $s_{ij} = 2$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, p$. *Si les sommets P et Q d'un triangle rigide PQR glissent sur deux courbes C et D de genre O et d'ordres n et p, le sommet R décrit une courbe d'ordre* $2pn$ (figure 1 pour $n = p = 1$, figures 2, 3, 4 pour $p = 2$, $n = 1$).

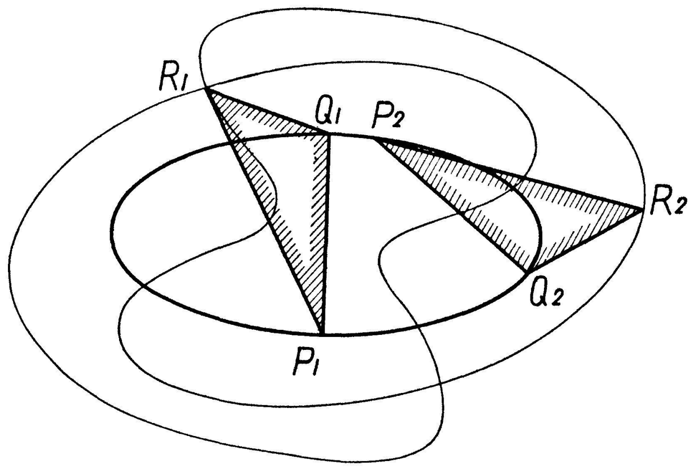

Figure 6

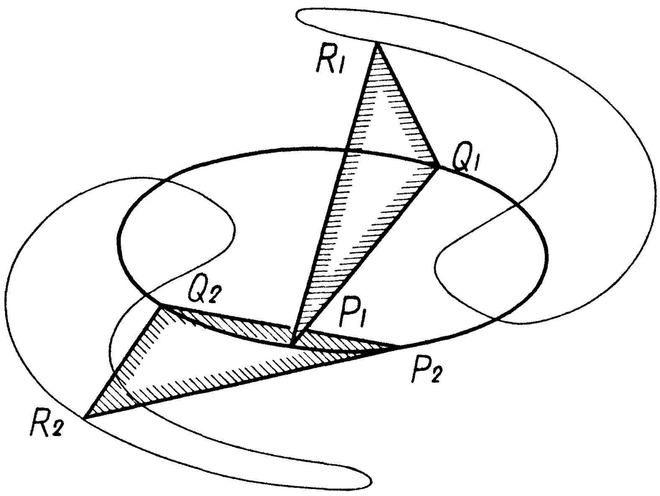

Figure 7

Comme cette courbe coupe une courbe quelconque d'ordre r en $2pnr$ points, on trouve alors:

Il y a $2pnr$ triangles congruents PQR dont les sommets P, Q, R sont respectivement sur trois courbes données d'ordre n, p et r.

5. Supposons de plus que les courbes C et D coïncident. *Si les sommets P et Q d'un triangle rigide PQR glissent sur une courbe d'ordre n (et de genre O), le sommet R décrit une courbe d'ordre* n^2 (figures 5, 6, 7, 8 pour $n = 2$).

Remarquons simplement que, si la courbe C passe par les points cycliques, ce lieu dégénère, comme on peut le voir dans le cas du cercle.

Lorsque P tend vers l'infini, deux points Q tendent vers l'infini sur la même branche de C; R aura donc un point double en chacun des points à l'infini de C. Parmi les $2n^3$ points d'intersection de C et de R, il y en aura $2n$ à l'infini et l'on a le résultat suivant:

Il existe $2n^3 - 2n = 2(n+1)\,n\,(n-1)$ *triangles congruents inscrits à une courbe d'ordre* n (figure 8 pour $n = 2$).

6. Au lieu d'une correspondance entre deux courbes, on peut considérer une transformation $\boldsymbol{B}$ de tout le plan sur lui-même. Un triangle $P_0Q_0R_0$ transforme la correspondance $P-Q$ en une correspondance $P-R$. Le triangle $P_0Q_0R_0$ engendre en

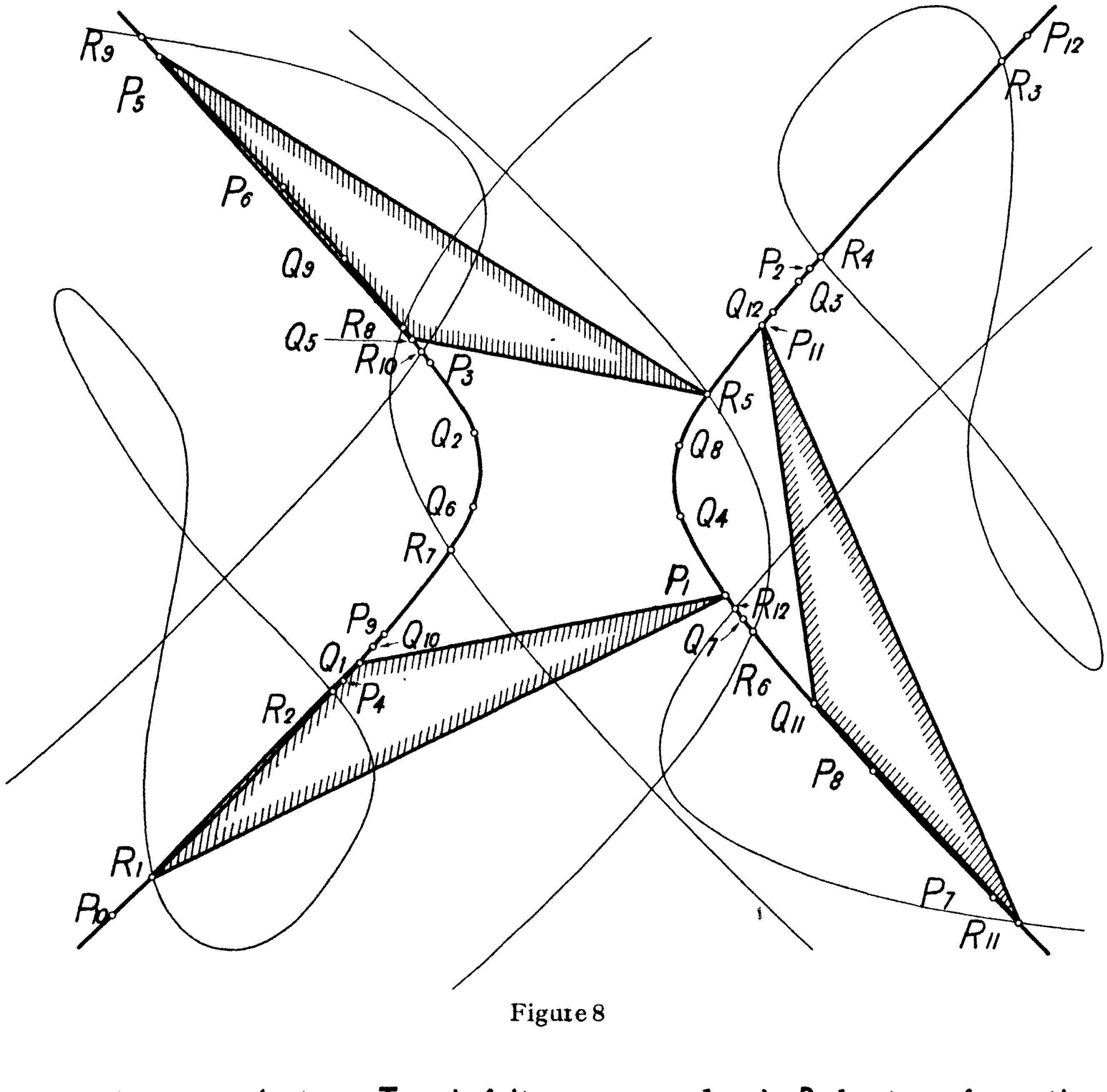

Figure 8

quelque sorte un opérateur $\boldsymbol{T}$ qui fait correspondre à $\boldsymbol{B}$ la transformation $\boldsymbol{TB}$. Désignons par $P_1Q_1R_1$ et $P_2Q_2R_2$ les triangles de base de deux opérateurs $\boldsymbol{T}_1$ et $\boldsymbol{T}_2$ et soit $ABCD$ un quadrilatère tel que ABC soit semblable à $P_1Q_1R_1$ et ACD semblable à $P_2Q_2R_2$; en appliquant $\boldsymbol{T}_1$, puis $\boldsymbol{T}_2$ à une transformation $\boldsymbol{B}$, on obtient un nouvel opérateur $\boldsymbol{T}_3 = \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1$ dont le triangle de base est semblable à ABD. On remarquera que $\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2$. Nous n'entrerons pas plus avant dans ces considérations algébriques.

Soit $\boldsymbol{B}$ une transformation de plan euclidien sur lui-même: A un point P correspondent α points Q; tout point Q est l'image de β points P; si P (ou Q) décrit une droite, Q (ou P) décrit une courbe d'ordre γ. Pour simplifier, nous supposerons qu'il n'existe pas de courbe de coïncidence. Cette transformation a alors $\alpha + \beta + \gamma$ points doubles.

Considérons la transformation TB. A tout point P correspondent les α points R tels que les triangles $PB(P)R$ soient semblables au triangle de base $P_0Q_0R_0$. Lorsque P décrit une droite, $Q = B(P)$ décrit une courbe d'ordre γ; à un point P de la droite correspondent α points Q de la courbe, tout point Q de la courbe est l'image d'un point P de la droite; d'après les résultats précédents, le lieu de R est donc une courbe d'ordre $\alpha + \gamma$.

Tout point R est l'image de $(\alpha + \beta + \gamma)$ points P. En effet, considérons la correspondance définie entre les points P_1 et P_2 par la condition que le triangle $P_1B(P_2)R$ soit semblable au triangle $P_0Q_0R_0$. A un point P_1 correspond un point $B(P_2)$, donc β points P_2; à un point P_2 correspondent α points $B(P_2)$, donc α points P_1; si P_1 décrit une droite, $B(P_2)$ décrit une droite et P_2 décrit une courbe d'ordre γ; la correspondance $P_1 - P_2$ a bien $(\alpha + \beta + \gamma)$ points doubles qui sont les correspondants de R.

Tout point P dans le fini a en général des correspondants R aussi bien définis que dans la correspondance B. Considérons le lieu des points P dont l'image $B(P)$ est à l'infini; cette courbe d'ordre γ a γ points $P_{s1}, \ldots, P_{s\gamma}$ à l'infini. A chacun de ces points correspond un point Q également à l'infini; le point R est alors indéterminé sur la droite à l'infini. Par conséquent, si un lieu de R coupe t fois la droite à l'infini, le lieu de P correspondant passe t fois par chacun des points P_s.

La correspondance TB a $\alpha + (\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma)$ points doubles. En général, pour que $P = R$, il faut que $P = Q$: Les $(\alpha + \beta + \gamma)$ points doubles de B sont aussi points doubles de TB. De plus, les γ points P_s sont également doubles. Où sont les 2α derniers points? Remarquons que si deux points correspondants P et Q sont sur une droite isotrope, donc si P et Q sont alignés sur un des points cycliques I ou K, le point R correspondant est sur la même droite, car une droite isotrope fait un angle quelconque avec elle-même. Si l'on désigne par $B(I)$ une des α images du point cyclique I, on peut dire que le triangle $IB(I)I$ est semblable (comme cas limite) au triangle $P_0Q_0R_0$. Par conséquent, chaque point cyclique est un point double à compter α fois, ce qui complète bien les $(\alpha + \beta + \gamma) + \gamma + (2\alpha)$ points doubles.

En résumé, la transformation TB est telle que: à un point P correspondent α points R; un point R est l'image de $(\alpha + \beta + \gamma)$ points P; à une droite correspond une courbe d'ordre $(\alpha + \gamma)$. Plus exactement: Au faisceau de droites $d[P]$ par un point P_0 correspond un système non linéaire à une dimension de courbes $c[R]$ d'ordre $(\alpha + \gamma)$; ces ∞^1 courbes passent toutes par les α images de P_0. Au faisceau de droites $d[R]$ par un point R_0 correspond un système à une dimension de courbes $c[P]$ d'ordre $(\alpha + \gamma)$; ces ∞^1 courbes passent toutes par les γ points P_s et par les $(\alpha + \beta + \gamma)$ images de R.

Cas particulier: B est une projectivité générale du plan; alors $\alpha = \beta = \gamma = 1$. La correspondance TB a les propriétés suivantes: A tout point P correspond un seul point R; tout point R est l'image de 3 points P; à toutes les droites $d[P]$ par un point P_0 correspondent les ∞^1 coniques d'un *système non linéaire* qui ont un point fixe $TB(P_0)$; à toutes les droites $d[R]$ par un point R_0 correspondent les coniques d'un *faisceau linéaire* dont les points bases sont: le point singulier P_s et les trois images de R_0. Nous avons ici un exemple extrêmement simple d'une *transformation birationnelle non-crémonienne* du plan sur lui-même.

J.-P. SYDLER, Zürich.