Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 10 (1955)

Heft: 4

Artikel: Über die Hüllkurven von Kepler-Bahnen fester Energie, welche eine feste Kepler-Bahn berühren

Autor: Strubecker, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18079

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Aufriss: Gesamthöhe $v + u + v$; die Höhenunterschiede der Ecken betragen v, u, v.

Soll das Ikosaeder die Kante a haben, so ist u als Umkreisradius eines regelmässigen Fünfecks mit der Seite a zu wählen.

Ikosaeder auf Kante. Grundriss: In einem Quadrat wählt man ein Paar von Gegenseiten und teilt die beiden Hälften jeder Seite dieses Paares je im goldenen Schnitt, so dass die grösseren Abschnitte von der Seitenmitte ausgehen. Die vier erhaltenen Teilpunkte und die Mitten der beiden übrigen Quadratseiten sind die Grundrisse von Ikosaederecken. Verbindet man die Teilpunkte mit den genannten Mitten, so erhält man auch die Grundrisse der übrigen Ecken.

Aufriss: Kongruent dem Grundriss, aber um 90° gedreht.

Soll das Ikosaeder die Kante a haben, so hat man als Quadratseite die Diagonale d des regelmässigen Fünfecks mit der Seite a zu wählen.

Ikosaeder auf Fläche. Grundriss: Einem Kreis vom Radius u wird ein regelmässiges Sechseck einbeschrieben; dessen Ecken sind die Grundrisse von sechs Ikosaederecken. Die Grundrisse der übrigen Ecken liegen auf einem konzentrischen Kreise, dessen Radius v der grössere Abschnitt des im goldenen Schnitt geteilten Radius u ist. (Eine günstige Konstruktion zeigt die Figur.)

Aufriss: Gesamthöhe $u + v$. Die Höhenunterschiede der Ecken betragen $v, u - v, v$.

Soll das Ikosaeder die Kante a haben, so ist u als Umkreisradius eines regelmässigen Dreiecks mit der Seite d (Diagonale eines regelmässigen Fünfecks mit der Seite a) zu wählen.

L. LOCHER-ERNST.

Über die Hüllkurven von Kepler-Bahnen fester Energie, welche eine feste Kepler-Bahn berühren

1. Einleitung

Die zu einem festen Zentralkörper S' gehörigen *komplanaren Kepler-Bahnen fester Gesamtenergie h* sind bekanntlich *monofokale Kegelschnitte mit S' als gemeinsamem Brennpunkt und mit fester Hauptachsenlänge $2a$.* Je nachdem die Gesamtenergie $h < 0, = 0, > 0$ ist, sind die Kepler-Bahnen Ellipsen, Parabeln, Hyperbeln.

Diese mechanische Bedeutung der monofokalen Kegelschnitte mit fester Hauptachsenlänge $2a$ rechtfertigt das Interesse, das auch der Geometer dieser Kurvenklasse zuwendet.

In den folgenden Darlegungen handelt es sich um solche monofokale Kegelschnitte k'_a der festen Hauptachsenlänge $2a$, welche einen festen Kegelschnitt k' mit dem gleichen Brennpunkt S' berühren.

Wir wollen beweisen (Figur 1):

Satz 1. Die Hüllkurve h' dieser Kegelschnitte k'_a ist ein zu k' konfokaler Kegelschnitt, der mit k' ausser dem Brennpunkt S' noch einen zweiten Brennpunkt T' gemeinsam hat.

Satz 2. Die (von S' verschiedenen) Brennpunkte F' der Kegelschnitte k'_a bilden einen Kreis f' mit der Mitte T'.

Satz 3. Die Berührpunkte K' und H' von k'_a mit dem festen Kegelschnitt k' und dem Hüllkegelschnitt h' sowie der bewegliche Brennpunkt F' von k'_a liegen stets auf einer Geraden e' durch den zweiten (von S' verschiedenen) gemeinsamen Brennpunkt T' der Grundkurve k' und der Hüllkurve h'.

Mechanisch gedeutet besagt zum Beispiel Satz 1 folgendes:

Satz 1. Alle Kepler-Bahnen k'_a fester Energie, welche eine feste Kepler-Bahn k' berühren, umhüllen eine zweite zu k' konfokale Kepler-Bahn h'.*

2. Räumliche Deutung

Der Beweis der angeführten Sätze wird am einfachsten nach den *Methoden der darstellenden Geometrie* durch *räumliche Deutung* der angeführten Figuren erbracht.

Man kann zunächst alle *monofokalen Kegelschnitte* $\{k'\}$ der Ebene Π mit dem gemeinsamen Brennpunkt S' (wir sagen: alle Kegelschnitte des *Monofokalsystems* $\{S'\}$) auffassen als *Grundrisse der ebenen Schnitte k eines Drehkegels $\varkappa$ (Grundkegel)*, der sich lotrecht über der Ebene Π (Grundrissebene) so erhebt, dass der Grundriss seiner Spitze S nach S' fällt.

Bemerkung 1. Übrigens gibt es zu jedem monofokalen Kegelschnitt k' in Π *zwei* ebene Schnitte k, $\hat{k}$ des Drehkegels $\varkappa$, die k' als Grundriss haben. Die Ebenen ε, $\hat{\varepsilon}$ dieser beiden Schnitte k, $\hat{k}$ liegen symmetrisch bezüglich der horizontalen Symmetrieebene des Drehkegels $\varkappa$ (Figur 2).

Auch die monofokalen Kegelschnitte k'_a in Π sind dann Grundrisse von *ebenen Schnitten k_a* des Kegels $\varkappa$. Da die Kegelschnitte k'_a die *feste Hauptachsenlänge $2a$* haben, *berühren die Ebenen ε dieser Kegelschnitte k_a ein lotrechtes Drehparaboloid π*, das dem Kegel $\varkappa$ eingeschrieben ist und ihn längs eines Parallelkreises vom Radius $2a$ berührt[1]).

Berühren die Kegelschnitte k'_a den festen Kegelschnitt k' des Monofokalsystems $\{S'\}$, so entsprechen ihnen auf dem Drehkegel $\varkappa$ Kegelschnitte k_a, welche den festen Kegelschnitt k berühren; die Ebenen ε_a der Kegelschnitte k_a sind dann Tangentenebenen des Kegelschnitts k (das heisst, sie gehören der durch k bestimmten singulären Fläche 2. Klasse an). Da die Kegelschnitte k'_a überdies die feste Hauptachsenlänge $2a$ haben, so müssen ihre Ebenen ε_a überdies Tangentenebenen des Drehparaboloides π sein.

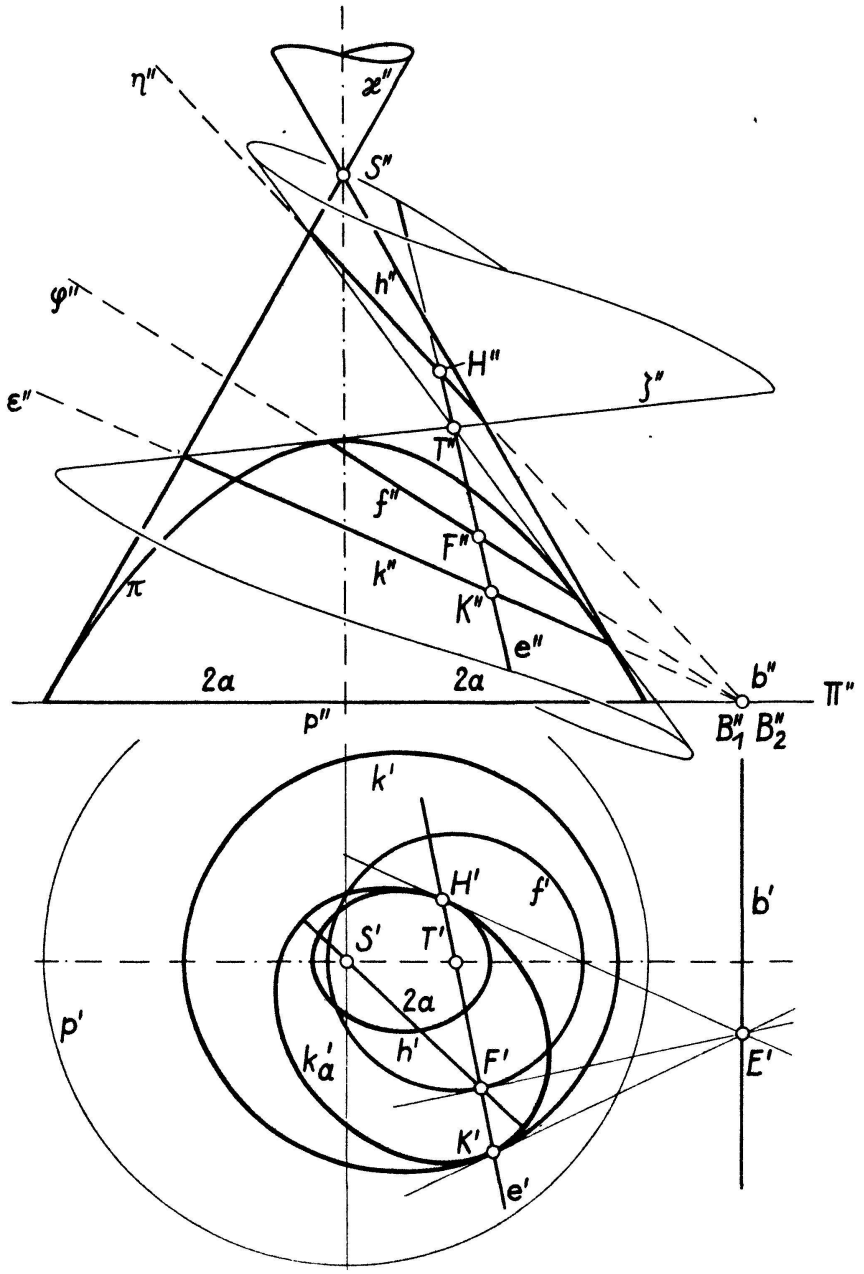
Insgesamt entsprechen also den Kegelschnitten k'_a des Monofokalsystems $\{S'\}$, welche die Hauptachsenlänge $2a$ haben und den festen Kegelschnitt k' aus $\{S'\}$ berühren, jene ebenen Schnitte k_a des Kegels $\varkappa$, deren Ebenen ε_a sowohl das Drehparaboloid π als auch den Kegelschnitt k berühren, also die *Ebenen der Verbindungstorse* dieser beiden Flächen 2. Klasse π und k.

Ein Teil dieser Torse besteht aus dem System der Tangentenebenen des Grundkegels $\varkappa$, die ja sämtliche das Paraboloid π und den Kegelschnitt k berühren. Spaltet man von der Verbindungstorse diese lösungsfremden Ebenen ab, so bleibt allein ein *Kegel zweiter Ordnung* ζ übrig, dessen Scheitel T heisse, und dessen Tangentenebenen τ aus $\varkappa$ Kegelschnitte k_a der verlangten Eigenschaft ausschneiden.

---

[1]) K. STRUBECKER, *Über monofokale Kegelschnitte*, Math. Nachrichten 4, 36–46 (1950/51), Satz IX.

Der Kegel ζ schneidet den Grundkegel $\varkappa$ nach einer Kurve 4. Ordnung, bestehend aus dem Kegelschnitt k und noch einem zweiten *Kegelschnitt* h. Die in den Tangentenebenen τ von ζ liegenden Kegelschnitte k_a von $\varkappa$ berühren dabei in gleicher Weise



Figur 1

den Grundkegelschnitt k und den neuen Kegelschnitt h, der damit auf $\varkappa$ schon die *Hüllkurve* (Hüllkegelschnitt) der Kegelschnitte k_a ist. Sein *Grundriss* h' ist daher die gesuchte *Hüllkurve* der Kegelschnitte k'_a.

Von vornherein steht dabei fest, dass diese Hüllkurve h' (als Grundriss eines ebenen Schnittes h des Grundkegels $\varkappa$) *wieder ein Kegelschnitt des Monofokalsystems* $\{S'\}$ *ist.*

Es ist jetzt auch leicht, die anderen erwähnten Eigenschaften der Hüllkurve h' einzusehen.

3. Beweis der Sätze 1 bis 3

Nach Satz 1 sollen die Kegelschnitte k' und h' konfokal sein und dieselben Brennpunkte S' und T' haben.

Beweis. Die Kurven k und h liegen nämlich auf den Kegeln $\varkappa$ und ζ und berühren die lotrechten, durch S und T laufenden Tangentenebenen σ_1, σ_2 und τ_1, τ_2 dieser Kegel. Diese Ebenen sind aber sämtlich *isotrope Ebenen*, nämlich die Verbindungsebenen der Kegelscheitel S und T mit den beiden Fernerzeugenden e_1, e_2 des Drehparaboloids π, das beiden Kegeln $\varkappa$ und ζ eingeschrieben ist. Die Grundrisse k' und h' berühren daher in Π die isotropen Spurgeraden s_1, s_2 und t_1, t_2 der projizierenden Ebenen σ_1, σ_2 und τ_1, τ_2; die *Grundrisse S', T' der Kegelscheitel S, T* von $\varkappa$ und ζ sind daher tatsächlich die beiden *gemeinsamen Brennpunkte der Grundkurve k' und der Hüllkurve h'*. Damit ist der Satz 1 vollständig bewiesen (Figur 1).

Nach Satz 2 soll der Ort der von S' verschiedenen Brennpunkte F' ein Kreis f' mit der Mitte T' sein.

Beweis. Der Kegel ζ ist dem Paraboloid π umschrieben und berührt es in den Punkten F eines *ebenen Schnittes* f von π, der in der Polarebene φ von T bezüglich π liegt. Ist nun ε_a die Ebene eines beliebigen unserer Kegelschnitte k_a, so besitzt dessen Grundriss k'_a als Brennpunkte erstens den Grundriss S' der Spitze des Drehkegels $\varkappa$ und zweitens den Grundriss F' des Berührungspunktes F der Kegelschnittsebene ε_a mit jenem Drehparaboloid, das ausser ε_a noch den Drehkegel $\varkappa$ längs eines Parallelkreises berührt. Dieses Paraboloid ist aber genau das Paraboloid π, und die Punkte F' sind daher die von S' verschiedenen Brennpunkte der Kegelschnitte k'_a. Weil der Ort der Punkte F im Raume ein ebener Schnitt f des Drehparaboloids mit der Kegelspitze T als Pol ist, bilden ihre Grundrisse F' tatsächlich einen *Kreis f'* mit dem Grundriss T' des Poles T als *Mittelpunkt*. Damit ist auch Satz 2 bewiesen (Figur 1).

Nach Satz 3 sollen die Berührungspunkte K' und H' jedes Kegelschnittes k'_a mit dem Grundkegelschnitte k' und dem Hüllkegelschnitte h' sowie der bewegliche Brennpunkt F' von k'_a stets auf einer Geraden e' durch den festen Punkt T' liegen.

Beweis. Die Ebene ε_a des Kegelschnitts k_a berührt den Kegel ζ nach einer *geradlinigen Erzeugenden e*, welche die auf ζ liegenden Kegelschnitte k, h und f in den Punkten K (Berührpunkt von k_a mit dem Grundkegelschnitt k), H (Berührpunkt von k_a mit dem Hüllkegelschnitt h) und F (dessen Grundriss F' zweiter Brennpunkt von k'_a ist) schneidet, und die durch den Scheitel T des Kegels ζ geht. Folglich liegen auch die Grundrisse K', H', F' stets auf einer Geraden e' durch T'. Damit ist auch Satz 3 bewiesen.

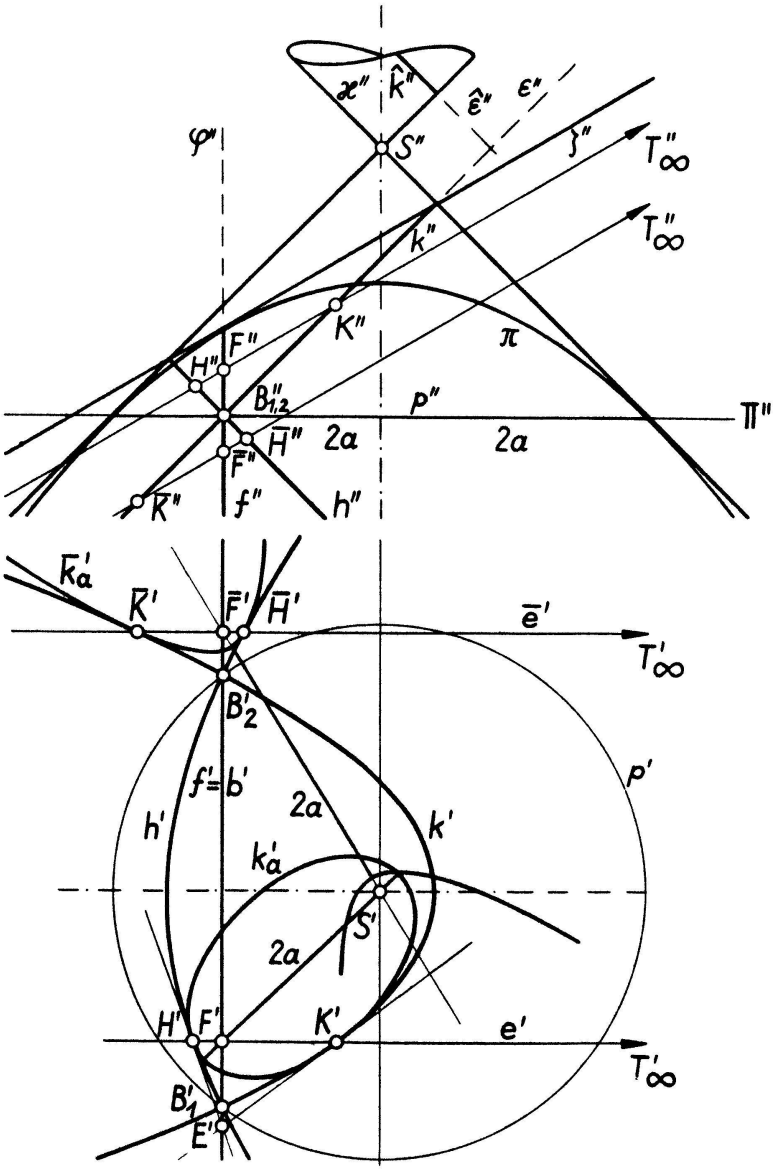
4. Bemerkungen

Bemerkung 2. Da die Kegel $\varkappa$ und ζ beide dem Drehparaboloid π umschrieben sind, berühren sie sich in zwei Punkten B_1, B_2, die allen drei Flächen $\varkappa$, ζ, π gemeinsam sind; die Verbindungsgerade $b = [B_1 B_2]$ dieser Berührpunkte ist daher die gemeinsame Schnittgerade der vier Ebenen ε (von k), η (von h), φ (von f) und der Ebene Π (des Berührungskreises p von π und $\varkappa$). Die Berührpunkte B_1 und B_2 liegen daher als ihre gemeinsamen Schnittpunkte auf den Kegelschnitten k, h, f und p.

Also schneiden sich im Grundriss auch der Grundkegelschnitt k' und Hüllkegelschnitt h' sowie der Brennpunktskreis f' und der Parallelkreis p' in zwei Punkten B'_1 und B'_2 der

gemeinsamen Spurgeraden b von ε, η und φ auf Π, die reell verschieden, zusammenfallend oder konjugiert komplex sein können.

Schneidet man dann die Ebene ε_a eines Kegelschnittes k_a mit den Ebenen ε, η, φ der Kegelschnitte k, h, f, so ergibt sich, dass die Tangenten an k' in K', an h' in H'



Figur 2

und an f' in F' stets in einem Punkte E' der Geraden b' zusammenlaufen: E' ist der Pol von $e' = [K'H']$ bezüglich des Kegelschnitts k'_a.

Bemerkung 3. Da nach Bemerkung 1 jeder monofokale Grundkegelschnitt k' Grundriss von zwei verschiedenen (symmetrischen) Kegelschnitten k und $\hat{k}$ des Kegels $\varkappa$ ist, gibt es zu einem vorgegebenen Grundkegelschnitt k' nicht bloss eine Schar $\{k'_a\}$ von berührenden Kegelschnitten k'_a der festen Hauptachsenlänge $2a$, sondern *zwei* solche Berührungsscharen $\{k'_a\}$ und $\{\hat{k}'_a\}$, zu denen dann auch zwei verschiedene, zu k' konfokale Hüllkegelschnitte h' und $\hat{h}'$ und zwei Brennpunktskreise f' und $\hat{f}'$ gehören (Figur 2).

Bemerkung 4. Wählt man als *Grundkegelschnitt k' eine Parabel* mit dem Brennpunkt S', so wird der Kegel ζ ein *parabolischer Zylinder* mit unendlich ferner Spitze T_∞, der den Grundkegel $\varkappa$ noch nach einer zweiten *Parabel h* schneidet und das Drehparaboloid π (Berührungsradius $2a$) nach einer *Parabel f* berührt, die in einer *vertikalen Ebene φ* liegt (Figur 2).

Die Kegelschnitte k'_a der festen Hauptachsenlänge $2a$, welche die Grundparabel k' berühren und mit ihr den festen Brennpunkt S' gemeinsam haben, *umhüllen* also eine zu k' *konfokale Parabel h'* [1]). Als *Ort der freien Brennpunkte F'* der Kegelschnitte k'_a ergibt sich eine *Gerade f'*, nämlich die Verbindungsgerade $b' = [B'_1 B'_2]$ der beiden eigentlichen Schnittpunkte B'_1 und B'_2 der konfokalen Parabeln k' und h'. Die Kegelschnitte k'_a der Berührungsschar berühren dabei die Parabeln k' und h' in den Punkten K' und H', welche mit dem freien Brennpunkt F' von k'_a stets auf einer Geraden durch den festen *Fernpunkt T'_∞* liegen.

Bemerkung 5. Die Scharen $\{k'_a\}$ der k' berührenden und zu k' monofokalen Kegelschnitte k'_a fester Achsenlänge $2a$ können *entweder Ellipsen, oder Hyperbeln, oder Ellipsen und Hyperbeln enthalten*; im letzten Falle gibt es als Übergangsfigur *zwei* in *Strecken* (der Länge $2a$) ausgeartete *Grenzkegelschnitte*, nämlich die beiden Radien $\overline{S'B'_1}$ und $\overline{S'B'_2}$.

Bemerkung 6. Sollen (im Grenzfalle $a = \infty$) die den Grundkegelschnitt k' berührenden, zu k' monofokalen Kegelschnitte k'_a aus *Parabeln k'_∞* bestehen, so ist im räumlichen Modell des Kegels $\varkappa$ durch den Grundkegelschnitt k ein solcher Kegel ζ zu legen, dessen Tangentenebenen ε_∞ den Kegel $\varkappa$ nach lauter Parabeln schneiden. ζ ist dann der zweite zu $\varkappa$ kongruente Kegel, der sich durch k legen lässt (*Gegenkegel* zu $\varkappa$). Da $\varkappa$ und ζ sich ausser in k nur noch in ihrem gemeinsamen *Fernkreis h* schneiden, fällt die *Hüllkurve h'* der Parabeln k'_∞ stets in die *Ferngerade* der Ebene Π, die ja tatsächlich von allen Parabeln berührt wird.

Bemerkung 7. Man kann das Ergebnis der Sätze 1 bis 3 umkehren. Sind zwei konfokale Kegelschnitte k' und h' mit den gemeinsamen Brennpunkten S' und T' gegeben, so gibt es stets zwei Scharen von monofokalen Kegelschnitten k'_a und $\hat{k}'_a$ mit dem gemeinsamen Brennpunkte S', welche gleichzeitig die Kegelschnitte k' und h' in Punkten K' und H' berühren (die jeweils auf einer Geraden e' durch T' liegen) und deren Hauptachsenlängen $2a$ einen festen Wert haben. Dabei ist $2a$ gleich dem Radius eines jener beiden Kreise p' mit der Mitte S', welche ein (zur Geraden $[S'T']$ symmetrisches) Paar von Schnittpunkten B'_1, B'_2 von k' und h' enthalten. Die freien Brennpunkte F' der berührenden Kegelschnitte liegen dabei auf dem Kreis f' mit der Mitte T', der durch B'_1 und B'_2 geht, und zwar in jenem Schnittpunkte von f' mit der Geraden $e' = [K'H']$, in welchem die Tangente an den Kreis f' sich mit den Tangenten an k' in K' und an h' und H' in einem Punkte E' der Sehne $b' = [B'_1 B'_2]$ trifft.

K. STRUBECKER, Karlsruhe.

---

[1]) Dies hat schon O. MARCKWARDT [Math. naturwiss. Unterricht *5*, 120 (1952/53)] durch Rechnung (unter Beschränkung auf *Ellipsen k'_a*) nachgewiesen.