

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1955)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 24.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Dreiecks  $HX_u^c Z_u^c$ ). Die Fallgerade  $f$  durch  $U$  liefert  $U^z$ . Die Achsenbilder  $x^z$ ,  $y^z$  und  $z^z$  laufen parallel zu den Kernstrahlen durch  $X_u^c$  bzw.  $Y_u^c$  bzw.  $Z_u^c$ .  $z^z$  ist normal zu  $h$ . Probe:  $x^c = U^c X_u^c$  schneidet  $x^z$  in einem Punkt  $X$  auf  $g$ , ebenso liegt  $Y = y^c y^z$  auf  $g$ .  $z^c$  und  $z^z$  schneiden sich im Bildspurpunkt  $Z$  der  $z$ -Achse.  $U^z$  ist Höhenschnittpunkt von  $XYZ$ . Das Dreieck  $XYZ$  ist zum Dreieck  $X_u^c Y_u^c Z_u^c$  zentrisch ähnlich. Der Maßstab des normalaxonometrischen Bildes ist durch den Maßstab, in dem  $d$  aufgetragen wurde, gegeben. – Sind  $P^z$  und  $P'^z$  gegeben, so findet man  $P^c$  und  $P'^c$  in Figur 9 wie früher durch Umzeichnen. Treten schleifende Schnitte auf, so verwende man statt der Fallgeraden durch  $P'$  eine andere waagrechte Gerade, zum Beispiel in Figur 9 die  $y$ -Parallele.

c) Herstellung einer Perspektive aus einer dimetrischen Militärperspektive (Figur 10).  $O_1$  sei Fernpunkt der Drehsehnen, die zur Drehung von  $I'$  um  $g$  nach  $\pi$  gehören. Kernpunkt ist dann der Messpunkt  $M_{I'}$  von  $I'$ . Das Bild aus  $O_1$  ist eine Militärperspektive mit eigenem  $z$ -Maßstab. In  $I'$  liege ein Achsenkreuz  $Uxy$ , gegeben durch  $U^c X_u^c Y_u^c$ , wobei  $H$  Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $X_u^c Y_u^c Z_u^c$  ist. Mittels der Fallgeraden  $f$  durch  $U$  bestimmen wir  $U^z$ .  $x^z$ ,  $y^z$ ,  $z^z$  gehen durch  $U^z$  und sind parallel zu den Kernstrahlen durch  $X_u^c$  bzw.  $Y_u^c$  bzw.  $Z_u^c$ . Probe:  $X = x^c x^z$  und  $Y = y^c y^z$  liegen auf  $g$ . – Nun trage man im Kreuzriss die Einheitsstrecke  $e$  auf  $z$  von  $U$  bis  $C$  auf. Der Kreuzrissordner durch den Schnittpunkt von  $OC$  mit  $\pi$  schneidet  $z^c$  in  $C^c$ . Der Kernstrahl durch  $C^c$  schneidet  $z^z$  in  $C^z$ . Aus dem axonometrischen Bild (Einheitsstrecke  $e$  auf  $x^z$  und  $y^z$ ,  $U^z C^z$  auf  $z^z$ ) folgt durch Umzeichnen das perspektive Bild (zum Beispiel  $P$  in Figur 10).

F. HOHENBERG, Graz.

## Kleine Mitteilungen

### Bemerkungen zu einer Variationsaufgabe

Das von W. WUNDERLICH kürzlich in dieser Zeitschrift<sup>1)</sup> behandelte und als «verallgemeinerte Schachtelaufgabe» bezeichnete Variationsproblem lässt sich, wenn man den dort betrachteten Körper zu einem geschlossenen Körper ergänzt, bei etwas geänderter Bezeichnung auch so formulieren: Man schneide aus der  $(y, z)$ -Ebene eines  $(x, y, z)$ -Koordinatensystems vier kongruente Zwickel oder Blätter aus, die im Nullpunkt zusammenhängen, für die die  $y$ - bzw.  $z$ -Achse Symmetrieachsen sind und deren Längsausdehnung den festen Wert  $a$  habe (siehe Figur 1, dort sind nur zwei der vier Blätter gezeichnet). Die Blattkurve  $C$  sei so beschaffen, dass sich durch Aufbiegen der Blätter zu Zylinderflächen mit Erzeugenden, die beziehungsweise der  $y$ - oder  $z$ -Achse parallel sind, ein geschlossener Körper ergibt, der dann offenbar die vier Ebenen  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y = \pm z$  zu Symmetrieebenen hat. Symmetrie zur Mittelebene  $x = \text{const}$  wird also nicht vorausgesetzt. Gefragt wird nach derjenigen Blattkurve  $C$  oder Profilkurve  $K$ , die dem Körper das grösstmögliche Volumen erteilt.

Legt man die Kurve  $C$  durch die Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$  (Figur 1) fest, so ist der Zusammenhang zwischen der Kurve  $K$  oder  $y = y(x)$  und  $C$  oder  $\eta = \eta(\xi)$  offenbar gegeben durch

$$\eta = y, \quad d\xi^2 = dx^2 + dy^2, \quad (1)$$

da  $\xi$  zugleich die Bogenlänge von  $K$  ist. Je nachdem man  $C$  oder  $K$  sucht, kommt man

<sup>1)</sup> El. Math. 9, Nr. 4, 89 (1954), Aufgabe 187.

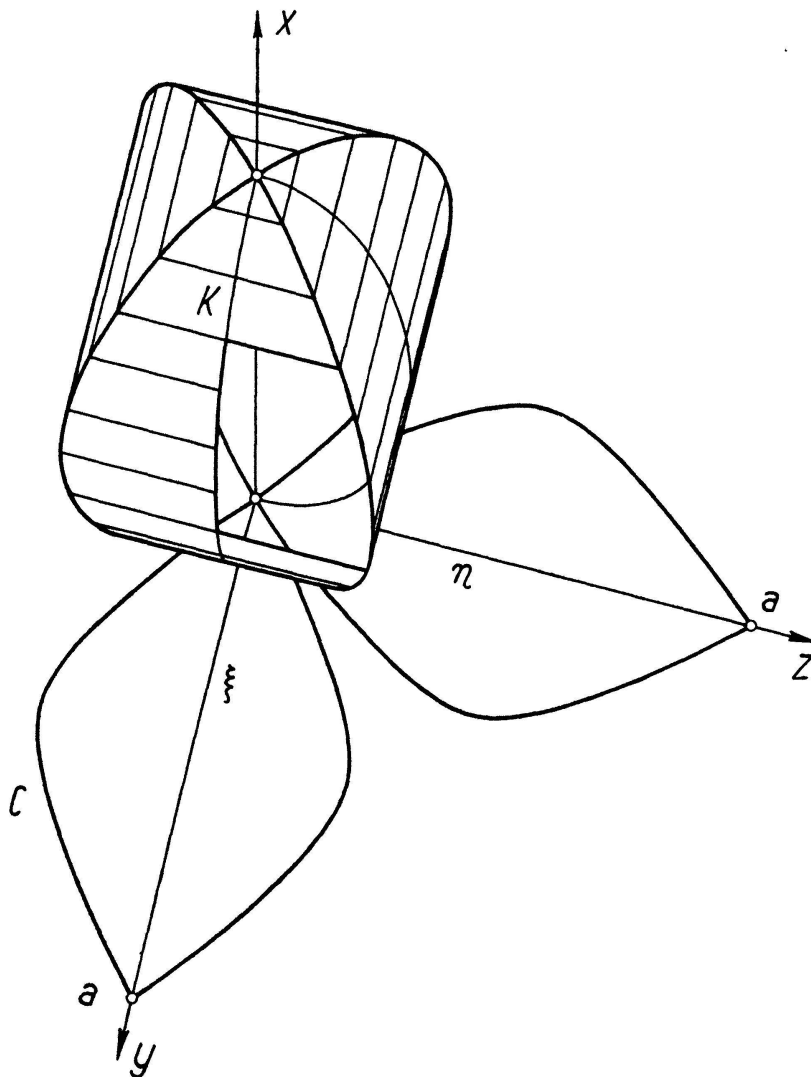
zu verschiedenen Variationsproblemen. Ausgedrückt durch  $K$  ist das Volumen

$$V = 4 \int_0^{x_0} y^2(x) dx \quad (2)$$

mit

$$\int_0^{x_0} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = a, \quad (2')$$

wenn  $x_0$  die Höhe des Körpers bezeichnet. Transformiert man das Problem mittels (1) auf



Figur 1

$\xi, \eta$ , so erhält man

$$V = 4 \int_0^a \eta^2(\xi) \sqrt{1 - \eta'^2(\xi)} d\xi, \quad (3)$$

also ein Variationsproblem mit festen Endpunkten, allerdings mit «Gefällbeschränkung», da  $|\eta'| \leq 1$  sein muss, eine Bedingung, die auch leicht als hinreichend dafür erkannt wird, dass sich die vier Blätter überhaupt zu einem Körper lückenlos zusammenfügen lassen.

Zur Lösung der vorliegenden Aufgabe wurde von W. WUNDERLICH das Problem in der Fassung (3) behandelt. Mathematisch vielleicht interessanter ist seine Behandlung in der Form (2), (2'), da es sich dann um ein isoperimetrisches Problem handelt, bei

dem auch die Lage des Endpunktes – also  $x_0$  – unbekannt ist. Nach der Eulerschen Regel hat man das Integral

$$\int_0^{x_0} f(x, y, y') dx = \int_0^{x_0} (y^2 + \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dx \quad (4)$$

zum Maximum zu machen. Da der Endpunkt des Integrals auf der  $x$ -Achse beweglich ist, hat man ein Variationsproblem zwischen Punkt und Kurve, und die Transversalitätsbedingung

$$f(x_0, y_0, y'_0) + (\bar{y}'_0 - y'_0) f_{y'}(x_0, y_0, y'_0) = 0 \quad (5)$$

liefert die Neigung  $y'_0$  der Extremalen im gesuchten Endpunkt; hierbei bezeichnet  $\bar{y}'_0$  die Neigung der Kurve, auf der der Endpunkt beweglich ist, im Punkte  $x_0$ . Da hier  $\bar{y}'_0 = 0$ , liefert (5)

$$\frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2_0}} = 0$$

und da  $\lambda \neq 0$ ,

$$y'_0 = \infty. \quad (6)$$

Die Eulersche Gleichung von (4) lautet

$$y = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \quad (7)$$

Sie drückt die auch aus Formel (11) von W. WUNDERLICH abzulesende Eigenschaft der Profilkurve aus, wonach ihre Ordinaten ihrer Krümmung proportional sind. Das ist aber die charakteristische Eigenschaft der elastischen Linie. Somit sind die Extremalen des Problems (2), (2') elastische Linien, wie schon EULER bei der verwandten Untersuchung des maximalen Volumens eines Rotationskörpers erkannte.

Um die Gleichung der Profilkurve explizit hinzuschreiben, integriert man (7) unter Berücksichtigung von  $y' = \infty$  für  $y = 0$  und erhält

$$y' = \frac{1}{y^2} \sqrt{\lambda^2 - y^4} \quad (8)$$

und unter Beachtung von  $y^2 = 0$  für  $x = 0$

$$x = \sqrt{-\lambda} \int_0^t \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - t^4}}; \quad t = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} y. \quad (9)$$

Dieses Integral geht aber mit  $t^2 = 1 - u^2$  in elliptische Normalintegrale erster und zweiter Gattung mit  $k^2 = 1/2$  über. Man erhält

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{-\frac{\lambda}{2}} [2E - K - 2E(\varphi) + F(\varphi)], \\ y &= \sqrt{-\lambda} \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Der noch unbekannte Parameter  $\lambda$  folgt aus der Bogenlängenbedingung

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \frac{a}{2}. \quad (11)$$

Mit

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\sqrt{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - (\sin^2 \varphi)/2}}; \quad \frac{dy}{d\varphi} = -\sqrt{-\lambda} \sin \varphi$$

folgt

$$\sqrt{-\frac{\lambda}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - [(\sin^2 \varphi)/2]}} = \sqrt{-\frac{\lambda}{2}} K = \frac{a}{2}$$

und damit

$$\lambda = -\frac{a^2}{2K^2}. \quad (12)$$

Aus (10) ergibt sich für  $\varphi = -\pi/2$  die Höhe des Körpers zu

$$x_0 = \left(2 \frac{E}{K} - 1\right) a = 0,4568 a \quad (13)$$

und die grösste Randbreite für  $\varphi = 0$  zu

$$2 y_{max} = \frac{\sqrt{2}}{K} a = 0,7627 a. \quad (14)$$

Das maximale Volumen ist mit (2), (8) und (12)

$$V_{max} = \frac{2\sqrt{2}}{K^3} a^3 \int_0^1 \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{2a^3}{3K^2} = \frac{1}{4} 0,7757 a^3 = 0,1939 a^3. \quad (15)$$

Die in (13), (14) und (15) enthaltenen Ergebnisse stimmen beziehungsweise mit den Formeln (9), (8) und (10) der zitierten Arbeit überein, wenn man berücksichtigt, dass dort  $a/2$  als Einheit gewählt und nur die Hälfte des Gesamtkörpers betrachtet wurde. Der Wert für  $V_{max}$  findet sich übrigens, bezogen auf Rotationskörper, auch bei O. BOLZA<sup>1)</sup>.

Da die Profilkurve als elastische Linie erkannt ist und  $y' = \infty$  für  $y = 0$ , das heisst die Tangenten in beiden Endpunkten senkrecht zur  $x$ -Achse stehen, kann der Extremalkörper sehr einfach mechanisch erzeugt werden. Man denke sich vier elastische Stäbe der Länge  $a$  in der  $x$ -Achse von  $x = 0$  bis  $x = a$  stehend. Diese werden im Nullpunkt gestützt und durch eine Druckkraft in negativer  $x$ -Richtung belastet. Es sei dafür gesorgt, dass zwei Stäbe in die  $(x, z)$ -Ebene, zwei in die  $(x, y)$ -Ebene jeweils nach entgegengesetzten Seiten ausknicken. Die Grösse der Druckkraft ist dann so zu bemessen, dass die Richtung der Stäbe im Angriffspunkt und demzufolge auch im Nullpunkt horizontal ist. In diesem Augenblick bilden die Stäbe die vier Profilkurven des Extremalkörpers, dessen Begrenzungsflächen zwischen ihnen aufgespannt werden können. Die Ordinaten der Kantenlinien des Körpers unterscheiden sich zwar nur um einen konstanten Faktor von denen der Profilkurve, sie sind aber keine elastische Linien, da die Differentialgleichung (7) in  $y, y', y''$  nicht homogen ist. Die ursprünglich nicht vorausgesetzte Symmetrie der Kurve  $K$  bezüglich  $x = x_0/2$  bzw. der Kurve  $C$  bezüglich  $\xi = a/2$  folgt aus (10), da

$$y(\varphi) = y(-\varphi); \quad x(\varphi) = x_0 - x(-\varphi).$$

Der Extremalkörper besitzt also auch noch die Symmetrieebene  $x = x_0/2$ .

Vergleichsweise kann man den Körper betrachten, der durch senkrechten Achsenschnitt zweier Kreiszylinder vom Radius  $r$  ( $a = \pi r$ ) entsteht. Er hat das Volumen

$$V = \frac{16}{3} r^3 = \frac{16}{3\pi^3} a^3 = 0,1720 a^3 \quad (16)$$

und bleibt um 11% hinter dem des Extremalkörpers zurück. Nimmt man aber als Profilkurve eine Ellipse mit der kleinen Halbachse in der  $x$ -Achse, so erhält man

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{\cos \alpha}{E^3(\alpha)} a^3; \quad \sin \alpha = \varepsilon \quad (17)$$

<sup>1)</sup> O. BOLZA, *Vorlesungen über Variationsrechnung* (Teubner, Leipzig und Berlin 1909), S. 541.

( $\varepsilon$  = numerische Exzentrizität). Das Maximum wird erreicht, wenn

$$\frac{K(\alpha)}{E(\alpha)} = 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (18)$$

Diese Gleichung ist erfüllt für  $\alpha = 50,91^\circ$  bzw.  $\varepsilon = 0,6306$  und führt auf  $V = 0,1926 a^3$ , ein Wert, der nur um 0,7% geringer ist als das Extremalvolumen.

Das von W. WUNDERLICH behandelte Problem (3) mit der Eulerschen Gleichung

$$\eta \eta'' + 2(1 - \eta'^2) = 0 \quad (19)$$

führt nach Integration auf

$$\xi = \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{F(\varphi)}{K} \right), \quad \eta = \frac{a}{2} \sqrt{2} \frac{\cos \varphi}{K}, \quad k^2 = \frac{1}{2}, \quad (20)$$

was auch sofort aus (10) unter Anwendung der Transformation (1) folgt. Die Gleichung der Blattkurve (20) kann auch in der Form

$$\eta = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{K} \operatorname{cn} \left[ \left( 1 - \frac{2\xi}{a} \right) K \right] \quad (21)$$

geschrieben werden. Die Variationsaufgabe (3) ist eingehend von L. KOSCHMIEDER<sup>1)</sup> behandelt, allerdings ohne die geometrische Deutung, die den engen Zusammenhang zwischen den Problemen (2), (2') und (3) erkennen lässt. A. FRICKE, Braunschweig.

### Sur quelques identités élémentaires

Nous avons démontré les identités suivantes:

$$\frac{|a+b| + |a-b|}{2ab} \equiv \frac{\operatorname{sgn}(ab)}{\min(|a|, |b|)}, \quad (1)$$

$$\frac{|a+b| - |a-b|}{2ab} \equiv \frac{1}{\max(|a|, |b|)}, \quad (2)$$

( $a$  et  $b$  réels,  $ab \neq 0$ );

$$\frac{|a+b| + |a-b|}{2} \equiv \max(|a|, |b|), \quad (3)$$

$$\frac{|a+b| - |a-b|}{2} \equiv \operatorname{sgn}(ab) \min(|a|, |b|), \quad (4)$$

( $a$  et  $b$  réels).

Dans la littérature mathématique nous n'avons pas rencontré ces formules. On peut les ajouter aux deux suivantes:

$$\frac{a+b + |b-a|}{2} \equiv \max(a, b), \quad (5)$$

$$\frac{a+b - |b-a|}{2} \equiv \min(a, b). \quad (6)$$

Les formules (5) et (6) se trouvent dans les traités d'analyse<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> L. KOSCHMIEDER, Dissertation (Breslau 1913).

<sup>2)</sup> Voir, par exemple, A. OSTROWSKI, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Bd. I (Birkhäuser Verlag, Bâle 1952), p. 52.

La formule (2) intervient, par exemple, dans le calcul de l'intégrale définie

$$J = \int_0^{\pi} \frac{\sin t \, dt}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos t}}.$$

En effet ( $a, b \neq 0$ )

$$J = \frac{|a+b| - |a-b|}{ab} = \frac{2}{\max(|a|, |b|)}.$$

D. S. MITRINOVITCH, Belgrad.

## Ungelöste Probleme

**Nr. 5.** Das Problem der Quadratur des Kreises im mengengeometrischen Sinn ist immer noch ungelöst! Es handelt sich um die Frage, ob ein abgeschlossener Kreisbereich mit einem flächengleichen abgeschlossenen quadratischen Bereich der Ebene im Sinne der Mengenometrie zerlegungsgleich ist? Kann man den Kreis so in endlich viele disjunkte Punktmengen zerlegen, dass sich aus den gleichen in der Ebene passend bewegten Punktmengen wieder das Quadrat zusammensetzen lässt?

Vermutlich ist dies nicht möglich; doch gibt es in der Mengenometrie und in der Theorie der Punktmengenfunktionen bis heute keinen Begriff, der geeignet wäre, zur Klärung dieser Frage herangezogen zu werden.

Die Frage wurde wiederholt von W. SIERPIŃSKI aufgestellt<sup>1)</sup>.

Eine gewisse Merkwürdigkeit liegt darin, dass die Dimension  $k = 2$  vermutlich die einzige Raumdimension ist, für welche die analog verallgemeinerte Frage negativ beantwortet werden muss. Für  $k \neq 2$  ist nämlich eine Kugel stets mit einem inhaltsgleichen Würfel zerlegungsgleich!

Für  $k = 1$  ist die Behauptung trivial und für  $k \geq 3$  eine Folge der bekannten «Zerlegungsparadoxie» von S. BANACH und A. TARSKI<sup>2)</sup>.

Es dürfte wohl leichter sein, zu beweisen, dass Kreis und Quadrat nicht translative zerlegungsgleich sind; in diesem Fall sollen die Teilmengen in der Ebene nur verschoben, aber nicht gedreht werden. Unseres Wissens gibt es auch hier noch keine Handhabe, Fragen dieser Art zu entscheiden.

H. HADWIGER.

## Aufgaben

**Aufgabe 205.** Man zeige: a) Alle Kegelstümpfe, die in der Höhe und in der Länge der erzeugenden «Meridiankurve» (Mantellinie + Radien der begrenzenden Kreise) übereinstimmen, haben dieselbe Gesamtoberfläche. b) Es gibt genau einen nichttrivialen Zylinder der Höhe  $h$  und einen symmetrischen Doppelkegel der Höhe  $h$ , welche in der Gesamtoberfläche und im Flächeninhalt eines Achsenschnittes übereinstimmen.

H. BIERI, Bern.

<sup>1)</sup> Vergleiche: *Sur quelques problèmes concernant la congruence des ensembles de points*, *El. Math.* 5, 1–4 (1950).

<sup>2)</sup> *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, *Fund. Math.* 6, 244–277 (1924).