

<b>Zeitschrift:</b>	Elemente der Mathematik
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	10 (1955)
<b>Heft:</b>	3
 <b>Artikel:</b>	Herstellung von Perspektiven aus axonometrischen oder perspektiven Bildern
<b>Autor:</b>	Hohenberg, F.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-18077">https://doi.org/10.5169/seals-18077</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

denen man einen Überblick der Punkte der Kreise gewinnt. In der Figur 9 sind einige Punkte eines solchen im erklärten Sinne reellen, aber in einer imaginären Ebene liegenden Kreises angedeutet. (Die Größenverhältnisse sind der Übersicht wegen andere als in der Figur 8). Interessant ist der Übergang eines solchen Kreises in einen reellen Kreis in einer reellen Ebene.

Damit haben wir uns einen anschaulichen Einblick in die Konfiguration der zwölf Nabelpunkte verschafft. Die Betrachtungen lassen sich auf beliebige Flächen zweiter Ordnung ausdehnen. Unsere Ausführungen haben natürlich nur für denjenigen einen Wert, der ausser der Eleganz analytischer Entwicklungen auch die anschauliche Verarbeitung zu schätzen weiß.

L. LOCHER-ERNST.

## Herstellung von Perspektiven aus axonometrischen oder perspektiven Bildern<sup>1)</sup>

Wird ein Gegenstand aus zwei Augen  $O$  und  $O_1$  auf eine Bildebene  $\pi$  projiziert, so stehen beide Bilder in einer einfachen Beziehung. Diese Beziehung ermöglicht a) aus einem axonometrischen Bild durch «Umzeichnen» ein perspektives Bild herzustellen, b) aus einem Foto das dargestellte Objekt durch Umzeichnen in ein axonometrisches Bild zu rekonstruieren, c) ein ungünstig wirkendes perspektives Bild in ein anderes umzuzeichnen, indem das Auge  $O$  durch ein anderes Auge  $O_1$  ersetzt wird.

Eine waagrechte Grundebene  $\Gamma$  schneide  $\pi$  in der Grundlinie  $g$ . Ein Raumpunkt  $P$  habe den Grundriss  $P'$  in  $\Gamma$ . Die Sehstrahlen  $OP$  und  $O_1P$  schneiden  $\pi$  in  $P^c$  und  $P^z$ , die Sehstrahlen  $OP'$  und  $O_1P'$  schneiden  $\pi$  in  $P'^c$  und  $P'^z$ . Wir unterscheiden, ob  $\pi$  lotrecht steht oder nicht.

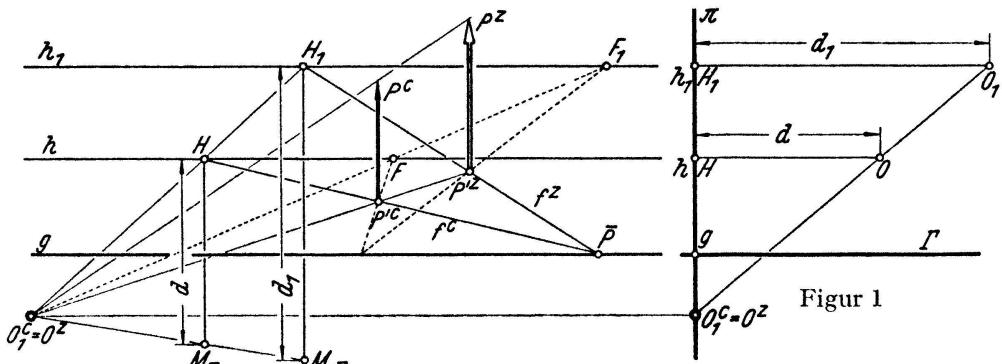
### 1. Umzeichnen bei lotrechter Bildebene

Figur 1 zeigt links die perspektiven Bilder mit den Hauptpunkten  $H, H_1$ , den Horizonten  $h, h_1$  und den Messpunkten  $M_\Gamma, M_{1\Gamma}$  von  $\Gamma$  (= «umgeklappte Augen»), rechts eine Ansicht in Richtung  $g$ , die man als Kreuzriss auffassen kann. Der Schnittpunkt  $O_1^c = O^z$  der Geraden  $OO_1$  mit  $\pi$  heisse Kernpunkt. Jede Gerade in  $\pi$  durch  $O_1^c O^z$  heisse ein Kernstrahl. Die Ebene  $POO_1$  enthält  $P^c$  und  $P^z$ . Sie schneidet  $\pi$  nach einem Kernstrahl, daher liegen  $P^c$  und  $P^z$  auf einem Kernstrahl. Ebenso liegen  $P'^c$  und  $P'^z$  auf einem Kernstrahl (ausgeschnitten von der Ebene  $P'OO_1$ ). – Ist  $P$  der Fernpunkt der zu  $\pi$  normalen Geraden oder der Fernpunkt der Drehsehnen  $OM_\Gamma$  und  $O_1M_{1\Gamma}$ , so folgt:  $H$  und  $H_1$  liegen auf einem Kernstrahl, ebenso  $M_\Gamma$  und  $M_{1\Gamma}$ . Sind  $H, H_1, d, d_1$  und  $g$  gegeben, so geht  $h$  parallel zu  $g$  durch  $H$  und  $h_1$  durch  $H_1$ . Den Kernpunkt findet man ohne Kreuzriss als Schnittpunkt von  $HH_1$  mit  $M_\Gamma M_{1\Gamma}$ .

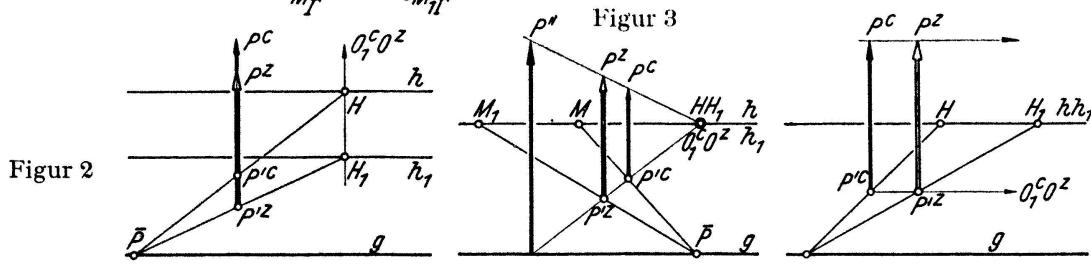
$P$  sei durch  $P^c$  und  $P'^c$  gegeben. Um  $P^z$  und  $P'^z$  ohne Benutzung des Kreuzrisses zu erhalten, lege man in  $\Gamma$  durch  $P'$  die zu  $g$  normale «Fallgerade»  $f$ .  $f^c$  geht durch  $H$  und  $P'^c$ ,  $f^z$  durch  $H_1$  und den auf  $g$  gelegenen Bildspurpunkt  $\bar{P}$  von  $f$ . Der Kernstrahl

<sup>1)</sup> Vom Verfasser erscheint demnächst ein Buch *Konstruktive Geometrie für Techniker* (Springer-Verlag, Wien).

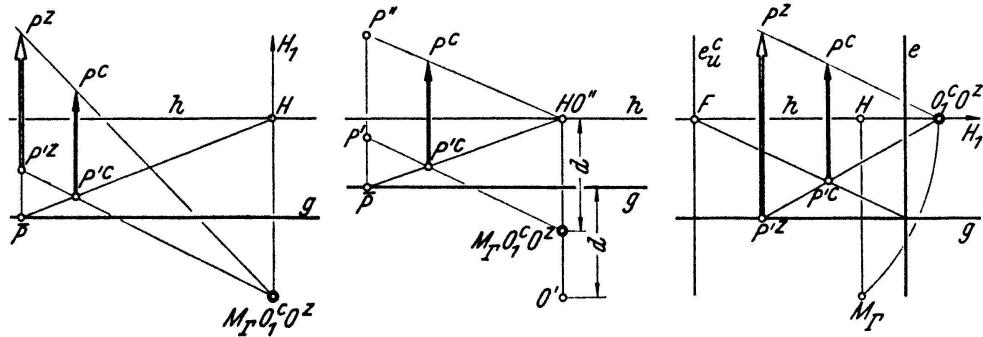
durch  $P'^c$  schneidet  $f^z$  in  $P'^z$ .  $P^z$  ist der Schnittpunkt des Kernstrahls durch  $P^c$  mit der zu  $g$  normalen Geraden durch  $P'^z$ . Treten schleifende Schnitte auf, so kann man statt  $f$  auch eine Gerade anderer Richtung in  $\Gamma$  verwenden (gestrichelt in Figur 1, die Fluchtpunkte  $F$  und  $F_1$  der gewählten Richtung liegen auf einem Kernstrahl). Der perspektive Grundriss erfährt eine perspektive Kollineation  $P'^c \rightarrow P'^z$ .  $g$  ist die Achse,  $O_1^c O^z$  das Zentrum,  $H$  und  $H_1$  ein Punktpaar dieser Kollineation. Auch die



Figur 1



Figur 4



Figur 5

Figur 6

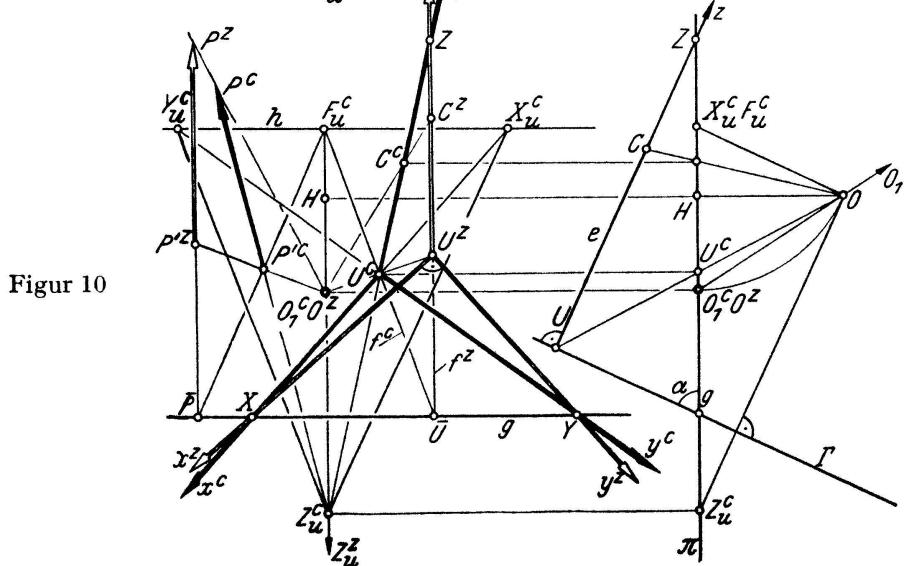
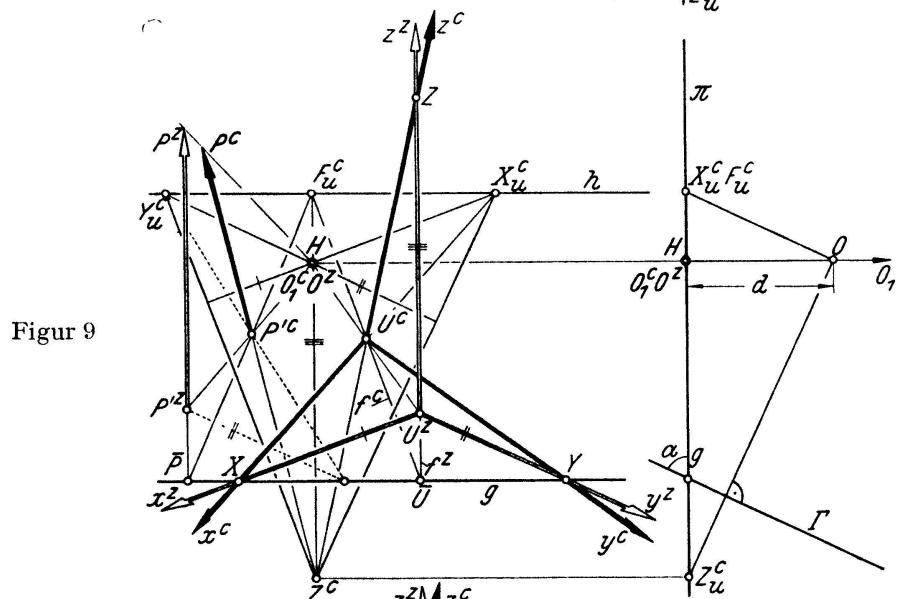
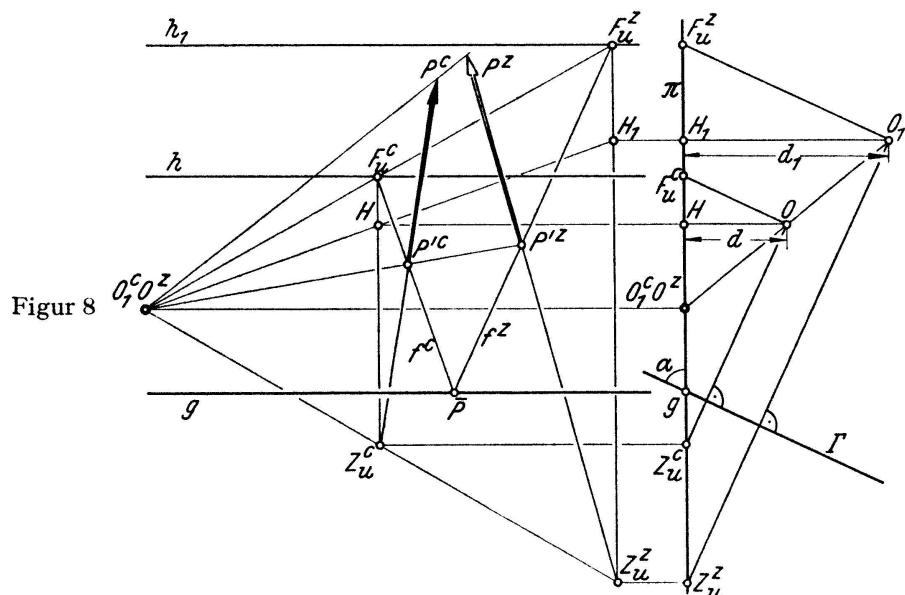
Figur 7

Bilder  $P^c$  und  $P^z$  der Punkte  $P$  einer beliebigen Ebene  $\varepsilon$ , die weder  $O$  noch  $O_1$  enthält, stehen in perspektiver Kollineation (Zentrum = Kernpunkt, Achse = Bildspur von  $\varepsilon$ ). Ist  $\varepsilon$  die Fernebene, so ist diese Kollineation die Streckung aus  $O_1^c O^z$ , die  $H$  in  $H_1$  überführt. Einige Sonderfälle:

a) Änderung der Augenhöhe (Figur 2). Aus  $P'^c$  folgt  $P'^z$  wie in Figur 1.  $P^z$  folgt aus  $P'^z P^z = P'^c P^c$ .

b) Änderung der Distanz (Figur 3).  $H = H_1$  ist Kernpunkt. Die Konstruktion benützt die Messpunkte  $M$  und  $M_1$  ( $HM = d$ ,  $H_1M_1 = d_1$ ). Außerdem wurde der Aufriss  $P''$  von  $P$  auf  $\pi$  konstruiert.

c) Stereoskopbilder, Anaglyphen usw. sind Paare von perspektiven Bildern, deren Augen  $O, O_1$  in gleicher Höhe über  $\Gamma$  und in gleicher Distanz vor  $\pi$  liegen (Figur 4). Kernpunkt ist der Fernpunkt von  $h = h_1$ .



d) Herstellung eines perspektiven Bildes aus einer Militärperspektive (Figur 5).  $O_1$  sei der Fernpunkt der Drehsehnen, die bei der Drehung von  $O$  um  $h$  nach  $M_\Gamma$  und zugleich bei der Drehung von  $\Gamma$  um  $g$  nach  $\pi$  auftreten. Hier ist der perspektive Grundriss ( $P'^z$ ) mit dem gewöhnlichen Grundriss gleichsinnig kongruent, und die Höhen  $P'^z P^z$  erscheinen in wahrer Grösse. Daher ist das perspektive Bild ( $P^z$ ) eine Militärperspektive. Umgekehrt kann man nach Figur 5 zuerst die Militärperspektive zeichnen und daraus das perspektive Bild konstruieren. Die Konstruktion braucht hier und in anderen Fällen nur für eine geringe Anzahl von Punkten durchgeführt zu werden, denn wenn von einer Geraden bereits zwei Punkte umgezeichnet sind, genügt für die übrigen Punkte der Geraden das Ziehen von Kernstrahlen.

e) Herstellung eines perspektiven Bildes aus Grund- und Aufriss oder umgekehrt (Figur 6). Nach b) und d) kann man von  $P^c$  und  $P'^c$  zum gewöhnlichen Grundriss  $P'$  auf  $\Gamma$  und zum Aufriss  $P''$  auf  $\pi$  übergehen. Umgekehrt ergibt sich so aus Grund- und Aufriss das perspektive Bild.

f) Freie Perspektive (Figur 7). Nimmt man auf  $h$  einen Fluchtpunkt  $O_1^c O^z$  an, so kann man in der dadurch bestimmten waagrechten Richtung eine Höhe  $P'P$  in die Bildebene «herausschieben» und erhält aus  $P'^c$  und  $P^c$  die Höhe  $P'P = P'^z P^z$ . – Ist  $\varepsilon$  eine lotrechte Ebene (Fluchtpur  $e_u^c \perp h$ ,  $F = (e_u^c h) =$  Fluchtpunkt der waagrechten Geraden in  $\varepsilon$  und  $\parallel \varepsilon$ ), so kann man  $O_1$  als Fernpunkt der Drehsehnen wählen, die  $\varepsilon$  in  $\pi$  überführen.  $O_1^c O^z$  auf  $h$  ist dann der Messpunkt von  $\varepsilon$ .  $H_1$  ist Fernpunkt von  $g$ , daher ist  $f^z = g$ .  $f^c$  und  $\bar{P}$  sind hier überflüssig.

## 2. Umzeichnen bei geneigter Bildebene

In Figur 8 seien die perspektiven Bilder durch die Hauptpunkte  $H, H_1$ , die Distanzen  $d, d_1$ , die Grundlinie  $g$  und die Neigung  $\alpha$  von  $\pi$  gegen  $\Gamma$  bestimmt. Rechts wurden im Kreuzriss die Horizonte  $h, h_1$ , die Fluchtpunkte  $F_u^c, F_u^z$  der Fallgeraden, die Fluchtpunkte  $Z_u^c, Z_u^z$  der Lotrechten und der Kernpunkt  $O_1^c = O^z$  konstruiert. Die Ebenen  $OO_1P$  und  $OO_1P'$  schneiden  $\pi$  in Kernstrahlen. Daher liegen  $P^c$  und  $P^z$  auf einem Kernstrahl, ebenso  $P'^c$  und  $P'^z$ . Auch  $F_u^c F_u^z, Z_u^c Z_u^z$  und  $HH_1$  sind Kernstrahlen.

$P$  sei durch  $P^c$  und  $P'^c$  gegeben, wobei  $P'^c P^c$  durch  $Z_u^c$  geht. Um  $P^z$  und  $P'^z$  ohne Benutzung des Kreuzrisses zu ermitteln, lege man in  $\Gamma$  durch  $P'$  die zu  $g$  normale Fallgerade  $f$ .  $f^c = F_u^c P'^c$  schneidet  $g$  in  $\bar{P}$ ,  $f^z$  geht durch  $F_u^z$  und  $\bar{P}$ . Der Kernstrahl durch  $P'^c$  schneidet  $f^z$  in  $P'^z$ .  $P^z$  ist der Schnittpunkt von  $P'^z N_u^z$  mit dem Kernstrahl durch  $P^c$ . Einige Sonderfälle:

a) Stereoskopbilder, Anaglyphen usw. bei geneigter Bildebene. Hier ist  $OO_1 \parallel g$ ;  $O_1^c = O^z$  ist der Fernpunkt von  $g$ .

b) Herstellung einer Perspektive aus einem normalaxonometrischen Bild (Figur 9). Ist  $O_1$  der Fernpunkt der zu  $\pi$  normalen Geraden, so ist das Bild aus  $O_1$  der Normalriss auf  $\pi$ . Es ist  $O_1^c = O^z = H$ .  $Z_u^z$  und  $F_u^z$  fallen in den Fernpunkt  $\perp h$ . Um den Normalriss als normalaxonometrisches Bild zu konstruieren, nehme man einen Ursprung  $U$  bzw. sein Bild  $U^c$  an (in Figur 9 ist  $U$  in  $\Gamma$  gewählt), ferner drei Achsenrichtungen bzw. ihre Fluchtpunkte (in Figur 9 sei die eine Achsenrichtung lotrecht, ihr Fluchtpunkt daher  $Z_u^c; X_u^c$  kann auf  $h$  gewählt werden,  $Y_u^c$  ist der Höhenschnittpunkt des

Dreiecks  $HX_u^c Z_u^c$ ). Die Fallgerade  $f$  durch  $U$  liefert  $U^z$ . Die Achsenbilder  $x^z$ ,  $y^z$  und  $z^z$  laufen parallel zu den Kernstrahlen durch  $X_u^c$  bzw.  $Y_u^c$  bzw.  $Z_u^c$ .  $z^z$  ist normal zu  $h$ . Probe:  $x^c = U^c X_u^c$  schneidet  $x^z$  in einem Punkt  $X$  auf  $g$ , ebenso liegt  $Y = y^c y^z$  auf  $g$ .  $z^c$  und  $z^z$  schneiden sich im Bildspurpunkt  $Z$  der  $z$ -Achse.  $U^z$  ist Höhenschnittpunkt von  $XYZ$ . Das Dreieck  $XYZ$  ist zum Dreieck  $X_u^c Y_u^c Z_u^c$  zentrisch ähnlich. Der Maßstab des normalaxonometrischen Bildes ist durch den Maßstab, in dem  $d$  aufgetragen wurde, gegeben. – Sind  $P^z$  und  $P'^z$  gegeben, so findet man  $P^c$  und  $P'^c$  in Figur 9 wie früher durch Umzeichnen. Treten schleifende Schnitte auf, so verwende man statt der Fallgeraden durch  $P'$  eine andere waagrechte Gerade, zum Beispiel in Figur 9 die  $y$ -Parallele.

c) Herstellung einer Perspektive aus einer dimetrischen Militärperspektive (Figur 10).  $O_1$  sei Fernpunkt der Drehsehnen, die zur Drehung von  $\Gamma$  um  $g$  nach  $\pi$  gehören. Kernpunkt ist dann der Messpunkt  $M_\Gamma$  von  $\Gamma$ . Das Bild aus  $O_1$  ist eine Militärperspektive mit eigenem  $z$ -Maßstab. In  $\Gamma$  liege ein Achsenkreuz  $Uxy$ , gegeben durch  $U^c X_u^c Y_u^c$ , wobei  $H$  Höhenschnittpunkt des Dreiecks  $X_u^c Y_u^c Z_u^c$  ist. Mittels der Fallgeraden  $f$  durch  $U$  bestimmen wir  $U^z$ .  $x^z$ ,  $y^z$ ,  $z^z$  gehen durch  $U^z$  und sind parallel zu den Kernstrahlen durch  $X_u^c$  bzw.  $Y_u^c$  bzw.  $Z_u^c$ . Probe:  $X = x^c x^z$  und  $Y = y^c y^z$  liegen auf  $g$ . – Nun trage man im Kreuzriss die Einheitsstrecke  $e$  auf  $z$  von  $U$  bis  $C$  auf. Der Kreuzrissordner durch den Schnittpunkt von  $OC$  mit  $\pi$  schneidet  $z^c$  in  $C^c$ . Der Kernstrahl durch  $C^c$  schneidet  $z^z$  in  $C^z$ . Aus dem axonometrischen Bild (Einheitsstrecke  $e$  auf  $x^z$  und  $y^z$ ,  $U^z C^z$  auf  $z^z$ ) folgt durch Umzeichnen das perspektive Bild (zum Beispiel  $P$  in Figur 10).

F. HOHENBERG, Graz.

## Kleine Mitteilungen

### Bemerkungen zu einer Variationsaufgabe

Das von W. WUNDERLICH kürzlich in dieser Zeitschrift<sup>1)</sup> behandelte und als «verallgemeinerte Schachtelaufgabe» bezeichnete Variationsproblem lässt sich, wenn man den dort betrachteten Körper zu einem geschlossenen Körper ergänzt, bei etwas geänderter Bezeichnung auch so formulieren: Man schneide aus der  $(y, z)$ -Ebene eines  $(x, y, z)$ -Koordinatensystems vier kongruente Zwickel oder Blätter aus, die im Nullpunkt zusammenhängen, für die die  $y$ - bzw.  $z$ -Achse Symmetriearchsen sind und deren Längsausdehnung den festen Wert  $a$  habe (siehe Figur 1, dort sind nur zwei der vier Blätter gezeichnet). Die Blattkurve  $C$  sei so beschaffen, dass sich durch Aufbiegen der Blätter zu Zylinderflächen mit Erzeugenden, die beziehungsweise der  $y$ - oder  $z$ -Achse parallel sind, ein geschlossener Körper ergibt, der dann offenbar die vier Ebenen  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $y = \pm z$  zu Symmetrieebenen hat. Symmetrie zur Mittelebene  $x = \text{const}$  wird also nicht vorausgesetzt. Gefragt wird nach derjenigen Blattkurve  $C$  oder Profilkurve  $K$ , die dem Körper das grösstmögliche Volumen erteilt.

Legt man die Kurve  $C$  durch die Koordinaten  $\xi, \eta$  (Figur 1) fest, so ist der Zusammenhang zwischen der Kurve  $K$  oder  $y = y(x)$  und  $C$  oder  $\eta = \eta(\xi)$  offenbar gegeben durch

$$\eta = y, \quad d\xi^2 = dx^2 + dy^2, \quad (1)$$

da  $\xi$  zugleich die Bogenlänge von  $K$  ist. Je nachdem man  $C$  oder  $K$  sucht, kommt man

<sup>1)</sup> El. Math. 9, Nr. 4, 89 (1954), Aufgabe 187.