Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1955)
Heft: 3

Artikel: Die zwölf Nabelpunkte des Ellipsoides
Autor: Locher-Ernst, L.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18076

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

El. Math. Band X Nr. 3 Seiten 49–72 Basel, 10. Mai 1955

Die zwölf Nabelpunkte des Ellipsoides

Zum 70. Geburtstag von ANDREAS SPEISER, am 10. Juni 1955

1. In einem Artikel über das Imaginäre in der Geometrie[1]) habe ich gezeigt, dass die von-Staudtsche Imaginärtheorie an Zugänglichkeit gewinnt, wenn man sich entschliesst, die den imaginären Punkt bestimmende gerichtete elliptische Involution durch einen Pfeil als Zeichen darzustellen. Dabei wird der Punkt mit den Koordinaten $x = \xi + i\,\xi'$, $y = \eta + i\,\eta'$, $z = \zeta + i\,\zeta'$ durch den Pfeil gegeben, dessen Anfangspunkt und Endpunkt die Koordinaten ξ, η, ζ bzw. $\xi + \xi', \eta + \eta', \zeta + \zeta'$ haben. Die reellen Punkte erscheinen als Pfeile der Länge Null. Diese Pfeildarstellung ist nur affininvariant. Es ist leicht, sich entsprechende Vorstellungen für die uneigentlichen Elemente zu bilden.

Ist man mit dieser Darstellung vertraut, so kann man sich manche Sachverhalte, die sonst nur analytisch erschlossen werden, anschaulich klarmachen. Als ein Beispiel sei die Tatsache gewählt, dass ein allgemeines Ellipsoid zwölf Nabelpunkte besitzt, von denen nur vier reell sind, und dass acht imaginäre Geraden existieren, von denen jede je drei dieser zwölf ausgezeichneten Punkte enthält.

2. Um nicht auf den genannten Artikel zurückgreifen zu müssen, sei hier das Pfeilbild einer imaginären Geraden auf eine neue Art hergeleitet, die an sich gewisses Interesse finden kann. Auf die Konstruktionen der Verknüpfung, die dort besprochen werden, gehen wir hier nicht ein. Wir behandeln zunächst die folgenden zwei Fragen:

a) Ein Punkt P einer reellen Geraden g in der (x, y)-Ebene werde um den reellen Punkt O auf g um den rein-imaginären Winkel $i\tau$ gedreht. Wie bewegt sich der entsprechende Pfeil, wenn τ von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft?

b) Die Gesamtheit der Pfeile (das heisst der reellen und imaginären Punkte) in einer reellen Geraden g in der (x, y)-Ebene, also die Gerade g, werde um den reellen Punkt O auf g um den festen, rein-imaginären Winkel $i\,\tau$ gedreht. Wie sieht die Menge der sich ergebenden Pfeile der gedrehten Geraden aus?

Beherrscht man diesen Drehvorgang, so überblickt man auch sofort die Verhältnisse für beliebige komplexe Drehwinkel. Obschon die rein synthetische Behandlung ihre Vorteile hat, wollen wir in dieser Note vom analytischen Ansatz ausgehen.

3. Die zu drehende Gerade wählen wir als x-Achse, den reellen Drehpunkt O als Ursprung eines rechtwinkligen (x, y)-Systems. Durch Drehung um O um den

[1]) L. LOCHER-ERNST, El. Math. *4*, 97–105 und 121–128 (1949).

Winkel $i\tau$ gehe $P(x = \xi + i\xi', y = 0)$ in $P_1(x_1, y_1)$ über. Wir haben

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + i\xi_1' = x\cos i\tau = (\xi + i\xi')\cosh\tau, \\ y_1 &= \eta_1 + i\eta_1' = x\sin i\tau = i(\xi + i\xi')\sinh\tau. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hieraus

$$\xi_1 = \xi\cosh\tau, \quad \eta_1 = -\xi'\sinh\tau, \tag{2}$$

$$\xi_1' = \xi'\cosh\tau, \quad \eta_1' = \xi\sinh\tau. \tag{3}$$

Die Koordinaten des Anfangs- und Endpunktes des P_1 darstellenden Pfeiles sind also

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \xi\cosh\tau, & \xi_1 + \xi_1' &= (\xi + \xi')\cosh\tau, \\ \eta_1 &= -\xi'\sinh\tau, & \eta_1 + \eta_1' &= (\xi - \xi')\sinh\tau. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Der Anfangspunkt bewegt sich für variables τ und für festes x auf der Hyperbel:

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^2 - \left(\frac{\eta_1}{\xi'}\right)^2 = 1, \tag{5}$$

der Endpunkt auf der Hyperbel

$$\left(\frac{\xi_1 + \xi_1'}{\xi + \xi'}\right)^2 - \left(\frac{\eta_1 + \eta_1'}{\xi - \xi'}\right)^2 = 1. \tag{6}$$

Zwischen den beiden Hyperbeln besteht folgende Beziehung, die für die Anschauung von Bedeutung sein wird: Ist φ der halbe Innenwinkel zwischen den Asymptoten der ersten Hyperbel, so ist der entsprechende Winkel für die zweite Hyperbel $|\pi/4 - \varphi|$. Jeder Pfeil liegt in der betreffenden Normalen der ersten Hyperbel, seine Länge ist halb so gross wie der Abschnitt der zugehörigen Tangente zwischen den Asymptoten.

Die Figuren 1, 2, 3, 4 zeigen den Drehvorgang für $\xi' = 0$ bzw. $\xi' > \xi > 0$, $\xi = \xi' > 0$, $\xi > \xi' > 0$. Der Betrag τ des Drehwinkels $i\tau$ ist proportional zur Fläche des entsprechenden Hyperbelsektors. Die Numerierung 1, 2, 3, ... erfolgte im Sinne wachsender τ.

Lässt man diese Figuren in ihrer Ebene um O um α (0 bis 2π) rotieren, so erhält man *das Pfeilbild des Kreises* um O mit dem Radius OP. Es ist interessant, sich den Übergang eines Kreises von komplexem Radius OP in einen Kreis von reellem Radius deutlich zu machen: Hält man ξ fest und lässt ξ' gegen Null abnehmen, so artet die Hyperbel der Pfeil-Anfangspunkte in die x-Achse aus, die Endpunkt-Hyperbel wird gleichseitig.

4. Zur Beantwortung der Frage b haben wir sämtliche Pfeile (reelle und imaginäre Punkte) der x-Achse um denselben Winkel $i\tau$ zu drehen. Dieser Vorgang ist leichter zu überschauen, wenn wir zu jedem Pfeil seinen *linken* und *rechten Begleitpunkt* (es sind die sogenannten Laguerreschen Punkte) einführen: Der linke Begleitpunkt U entsteht aus der Pfeilspitze durch Drehen des Pfeiles um seinen Anfangspunkt um $+\pi/2$, der rechte Begleitpunkt V durch Drehen um $-\pi/2$.

Der Punkt $P(\xi + i\xi', 0)$ hat die Begleiter $U(\xi, \xi')$ und $V(\xi, -\xi')$; der aus P durch Drehung um $i\tau$ entstandene Punkt (Pfeil) P_1 hat die Begleiter

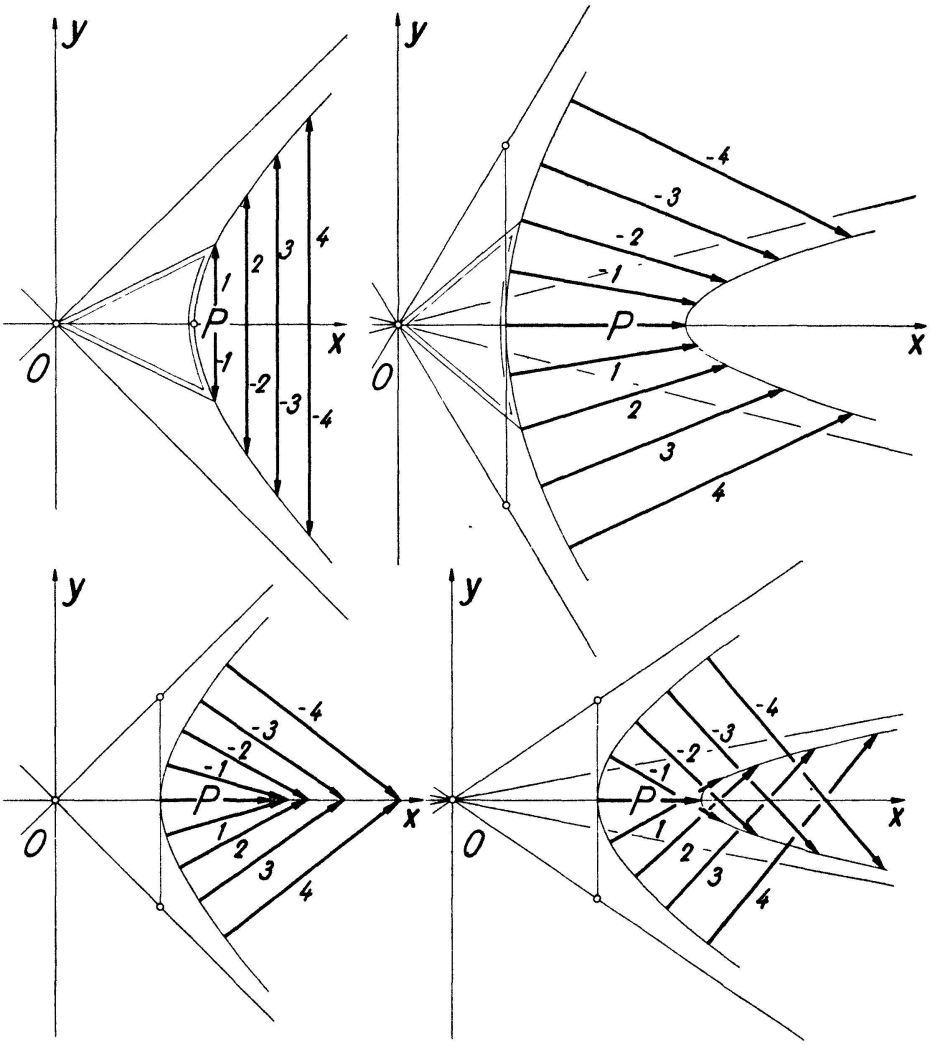
$$U_1(\xi_1 - \eta_1', \eta_1 + \xi_1'), \quad V_1(\xi_1 + \eta_1', \eta_1 - \xi_1').$$

Nach (2) und (3) gilt

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 - \eta_1' &= \xi\, e^{-\tau}, & \xi_1 + \eta_1' &= \xi\, e^{\tau}, \\ \eta_1 + \xi_1' &= \xi'\, e^{-\tau}, & \eta_1 - \xi_1' &= -\xi'\, e^{\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Der linke Begleitpunkt $U(\xi, \xi')$ geht also in $U_1(\xi\, e^{-\tau}, \xi'\, e^{-\tau})$, der rechte $V(\xi, -\xi')$ in $V_1(\xi\, e^{\tau}, -\xi'\, e^{\tau})$ über.

Figur 1



Figur 2

Figur 3

Figur 4

Figur 1: $\xi' = 0$.
Figur 3: $\xi' = \xi > 0$.
Figur 2: $\xi' > \xi > 0$.
Figur 4: $\xi > \xi' > 0$.

Die linken Begleitpunkte der neuen Pfeile ergeben sich aus den linken Begleitern der alten Pfeile durch Zusammenziehen gegen O hin mit dem Faktor $e^{-\tau}$, die rechten Begleitpunkte durch Dehnen von O aus mit dem Faktor e^{τ}. (Diese anschauliche Ausdrucksweise gilt für $\tau > 0$, Figur 5.)

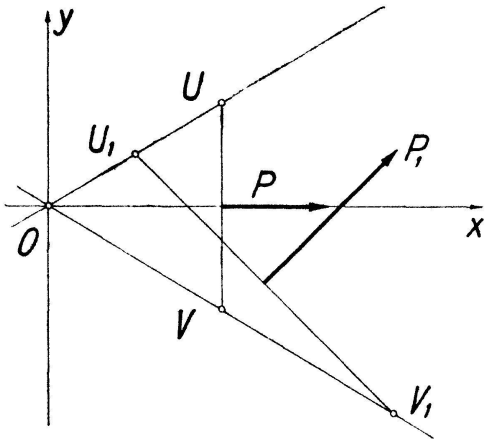
Indem man τ variabel nimmt, ergibt sich für einen gegebenen Ausgangspunkt P wieder die Bahn der Pfeile: Das Dreieck OU_1V_1 hat konstanten Inhalt, U_1V_1 umhüllt somit eine Hyperbel.

5. Um ein leicht aufzufassendes Bild der Pfeile der gedrehten Geraden zu erhalten, betrachten wir alle Punkte der x-Achse, für welche $\xi^2 + \xi'^2 = r^2 =$ konstant ist.

Deren Begleiter erfüllen den Kreis $O(r)$. Als Ort der linken Begleitpunkte wird dieser Kreis auf den Kreis $O(r\,e^{-\tau})$ zusammengezogen, als Ort der rechten Begleitpunkte auf den Kreis $O(r\,e^{+\tau})$ gedehnt. Für die Anfangspunkte $A_1(\xi_1, \eta_1)$ der hervorgehenden Pfeile gilt nach (2):

$$\left(\frac{\xi_1}{\cosh\tau}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1}{\sinh\tau}\right)^2 = r^2. \tag{8}$$

Die Anfangspunkte A_1 gehören somit einer Ellipse mit den Halbachsen $r\cosh\tau$, $r\sinh\tau$ an.



Figur 5

Die Endpunkte $(\xi_1 + \xi_1', \eta_1 + \eta_1')$ dieser Pfeile liegen nach (3) auf der mit der ersten Ellipse in Ähnlichkeitslage befindlichen Ellipse

$$\left(\frac{\xi_1 + \xi_1'}{\cosh\tau}\right)^2 + \left(\frac{\eta_1 + \eta_1'}{\sinh\tau}\right)^2 = 2\,r^2. \tag{9}$$

Betrachtet man den zum Pfeil P_1 gleichgerichteten und gleichlangen Vektor OB_1 von O aus, so liegt dessen Endpunkt $B_1(\xi_1', \eta_1')$ wegen (3) auf derselben Ellipse (8) wie der Anfangspunkt A_1 des Pfeiles P_1. Für die Steigungen der Vektoren OA_1 und OB_1 erhält man nach (2) und (3):

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = -\frac{\xi'}{\xi}\,\mathrm{tgh}\,\tau, \quad \frac{\eta_1'}{\xi_1'} = \frac{\xi}{\xi'}\,\mathrm{tgh}\,\tau;$$

dabei ist $\mathrm{tgh}\,\tau$ das Verhältnis der kleinen zur grossen Achse jeder Ellipse (8); daraus folgt:

Der Pfeil P_1 ist parallel und gleich lang wie der eine zum Vektor OA_1 konjugierte Halbmesser (Figur 6).

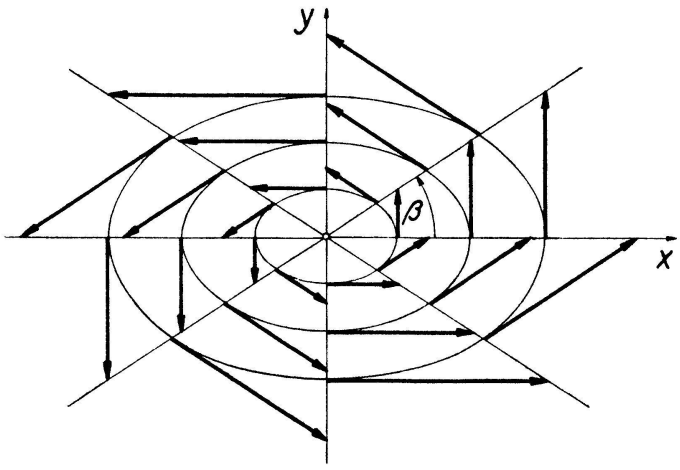
Die durch Drehen um den Winkel $i\,\tau$ aus der x-Achse entstandene Pfeilmannigfaltigkeit nennen wir einen *ebenen Wirbel.* Jede imaginäre Gerade der Ebene mit eigentlichem reellem Punkt O kann durch imaginäre Drehung aus einer reellen Geraden gewonnen werden:

Das Bild einer imaginären Geraden mit einem eigentlichen reellen Punkt ist ein ebener Wirbel.

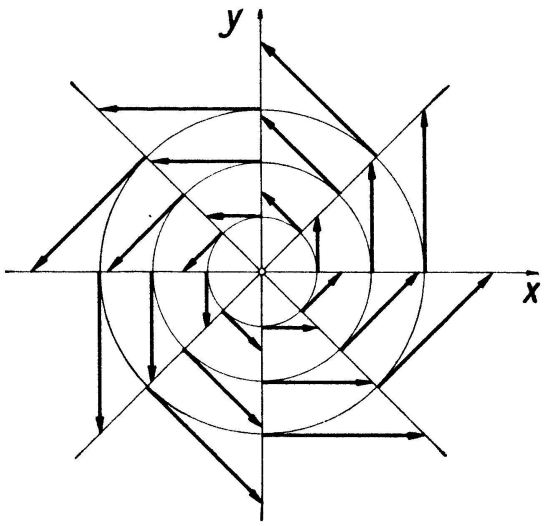
(Im Sonderfall einer imaginären Geraden mit uneigentlichem reellen Punkt O besteht das Bild aus allen Pfeilen, deren Anfangspunkte in einer Geraden und deren Endpunkte in einer zu dieser parallelen Geraden liegen.)

Die «Abplattung» des Wirbels hängt vom Betrag τ des imaginären Drehwinkels ab. Bedeuten a und b die Haupthalbachse und Nebenhalbachse einer der ähnlich gelegenen Ellipsen, und ist β der positive oder negative spitze Winkel, um den man die Hauptachse des Wirbels im Sinne der Pfeile zu drehen hat, bis sie gegen ihre alte Lage die Steigung $\pm b/a$ hat, so ergibt sich für das natürliche Mass der Abplattung, nämlich für $(a-b):(a+b)$, der folgende Wert:

$$\lambda = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\operatorname{tgh}|\tau|}{1+\operatorname{tgh}|\tau|} = \frac{1-\operatorname{tg}|\beta|}{1+\operatorname{tg}|\beta|} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - |\beta|\right). \tag{10}$$



Figur 6



Figur 7

Zwischen dem Drehwinkel $i\tau$ und dem Winkel β besteht die Beziehung

$$\operatorname{tgh}\tau = \operatorname{tg}\beta. \tag{11}$$

Der Winkel $i\tau$, den die imaginäre Gerade mit der Hauptachse des Wirbels bildet, hat in der Grösse β (der Betrag $|\tau|$ auch in der Grösse λ) seine natürliche reelle Deutung. Dreht man den Wirbel um O um den reellen Winkel σ, so hat man eine Gerade mit dem Steigungswinkel $\sigma + i\tau$. Es ist fast selbstverständlich, wie die Begriffe «parallele» Wirbel, «zueinander senkrechte» Wirbel usw. anschaulich zu fassen sind; doch gehört dies nicht in den vorliegenden Rahmen.

6. Für $\tau \to 0$ gilt auch $\beta \to 0$, und die Gerade wird zu einer reellen Geraden; der Wirbel artet aus, seine Pfeile legen sich sämtlich in die betreffende reelle Gerade, die Abplattung λ nimmt den grösstmöglichen Wert 1 an. Die reelle Gerade erscheint in diesem Zusammenhang als ausgeartetes Gebilde.

Lässt man den Betrag τ des Winkels $i\tau$, den die imaginäre Gerade mit der x-Achse als Hauptachse bildet, unbegrenzt wachsen, so ergibt sich

$$\text{für } \tau \to +\infty \text{ der Grenzwert } \beta = +\frac{\pi}{4} \text{ (Figur 7)},$$

$$\text{für } \tau \to -\infty \text{ der Grenzwert } \beta = -\frac{\pi}{4}.$$

In beiden Fällen wird die Abplattung Null. Die Gleichungen der betreffenden zwei Geraden heissen

$$y = x \operatorname{tg} i\tau\big|_{\tau \to \pm\infty} = i\, x \operatorname{tgh} \tau\big|_{\tau \to \pm\infty} = \pm i\, x.$$

Es sind die beiden *Minimalgeraden* oder *isotropen Geraden* des Punktes O. Die Wirbel werden rotatorisch.

Die beiden isotropen Geraden, die durch jeden reellen Punkt einer Ebene gehen, werden durch den links- und den rechtsdrehenden rotatorischen Wirbel um jenen Punkt dargestellt.

Es ist unmittelbar klar, dass eine beliebige reelle Drehung der Ebene um einen ihrer reellen Punkte die beiden isotropen Geraden des Drehpunktes fest lässt.

Dreht man die Figur 1 um O reell, so ergibt sich das Pfeilbild eines reellen Kreises mit dem Radius OP. Lässt man OP gegen Null streben, so erhält man als Kreis vom Radius Null das Paar der beiden isotropen Geraden des Mittelpunktes, wie anschaulich sofort klar ist.

Die Pfeilbilder 1, 2, 3, 4 und 7 zeigen auch sofort, dass jeder Kreis mit der uneigentlichen Geraden dieselben zwei Punkte I und J gemeinsam hat, die aus ihr von den links- und rechtsisotropen Geraden herausgeschnitten werden (Pfeile unter 45°).

7. Es ist nunmehr leicht, die sämtlichen Punkte einer reellen Kugel zu überblicken. In jedem reellen Punkt P der Kugel legen wir die Tangentialebene; in dieser denken wir uns die beiden rotatorischen Wirbel um P, das heisst die beiden isotropen Erzeugenden der Kugel, die sich in P treffen. Die Gesamtheit der Pfeile aller so konstruierten Wirbel, das heisst die Gesamtheit der Punkte aller Erzeugenden der Kugel, stellt die Menge sämtlicher Kugelpunkte dar.

Verwandelt man die Kugel durch zwei reelle Affinitäten in ein allgemeines Ellipsoid mit den Halbachsen $a > b > c$, so ergibt sich aus der Pfeilmenge der Kugel die Pfeilmenge des Ellipsoides. Im allgemeinen werden dabei die Erzeugenden der Kugel, die rotatorischen Wirbel, in nicht-rotatorische Wirbel übergeführt. Es gibt aber ausgezeichnete Punkte, bei denen durch die beiden Affinitäten sich wieder rotatorische Wirbel einstellen. Es sind das Ellipsoidpunkte, deren Erzeugende isotrop sind, also *Nabelpunkte.* Die Tangentialebene in einem solchen Punkte hat mit der Fläche einen Nullkreis gemeinsam.

Zunächst ist leicht zu sehen, dass vier reelle Nabelpunkte vorhanden sind. Das ergibt sich aus der Betrachtung der Wirkung der beiden Affinitäten oder derart, dass man das Ellipsoid mit der Kugel $O(b)$ vom Radius b um den Ellipsoidmittelpunkt O schneidet und die reellen Kreisschnitte parallel verschiebt, bis ihre Ebenen die Fläche berühren. Für die Koordinaten der vier reellen Nabelpunkte des Ellipsoides

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

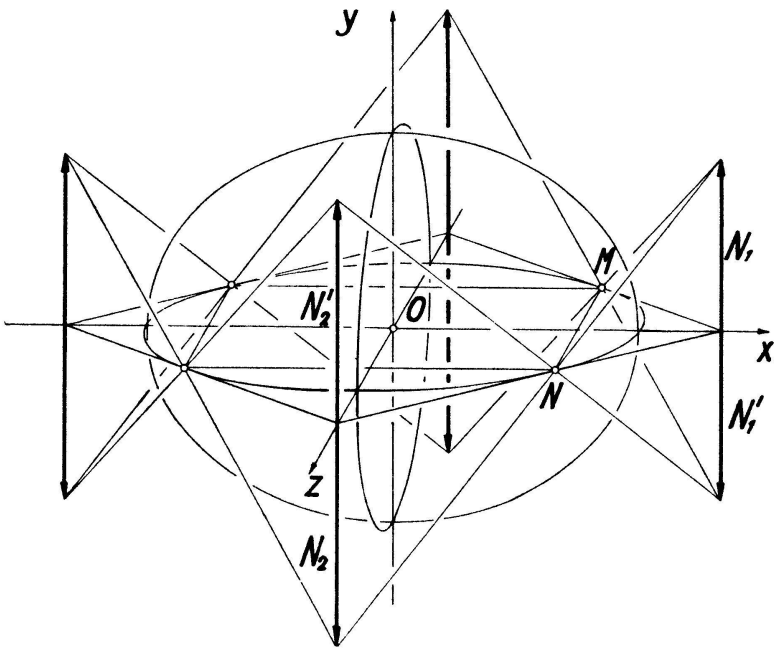
erhält man:

$$x = \pm a\, k, \quad y = 0, \quad z = \pm c\, l \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad l^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

N sei ein solcher Nabelpunkt (Figur 8). Die N enthaltenden beiden Erzeugenden des Ellipsoides sind isotrop. Wir können sofort die Punkte angeben, welche diese beiden Geraden mit der (x, y)- und (y, z)-Ebene gemeinsam haben: N_1 und N_2 der

rechtsisotropen, N_1' und N_2' der linksisotropen Erzeugenden. Da es sich um rotatorische Wirbel handelt, sind die Längen dieser Pfeile gleich dem entsprechenden Stück der Tangente in N in der (z, x)-Ebene.

Nehmen wir den zu N bezüglich der (x, y)-Ebene symmetrisch liegenden Nabelpunkt M, so gehört offensichtlich N_1 der linksisotropen Erzeugenden, N_1' der rechtsisotropen Erzeugenden jenes Punktes an.



Figur 8

Es ergeben sich auf diese Weise acht imaginäre Punkte des Ellipsoides mit den Koordinaten

$$x = \pm \frac{a}{k}, \quad y = \pm i\, b\, m, \quad z = 0 \quad \text{bzw.} \quad x = 0, \quad y = \pm i \frac{b}{m}, \quad z = \pm \frac{c}{l}$$

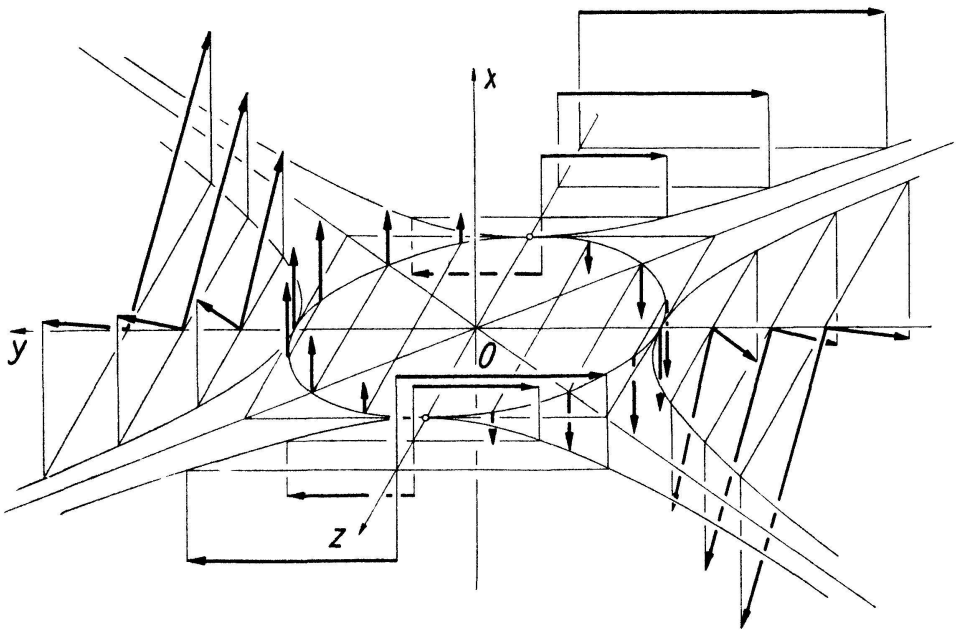
mit

$$m^2 = (b^2 - c^2) : (a^2 - b^2).$$

Jeder dieser Punkte ist gemeinsamer Punkt von zwei isotropen Erzeugenden des Ellipsoides, das heisst, *diese acht Punkte sind Nabelpunkte.* Ausser den zwölf erhaltenen Nabelpunkten hat es keine weiteren, weil die acht Erzeugenden durch die vier reellen Nabelpunkte die einzigen isotropen Erzeugenden des Ellipsoides sind. Die zwölf ausgezeichneten Punkte verteilen sich zu je dreien auf eine dieser acht Erzeugenden; zum Beispiel gehören N, N_1, N_2 und N, N_1', N_2' je derselben isotropen Erzeugenden an. Weitere Eigenschaften der Konfiguration der acht Geraden und zwölf Punkte kann man mühelos der Figur entnehmen.

8. Für die Durchdringung mit der Anschauung bleibt noch ein Sachverhalt, dessen Abklärung wünschenswert ist. Die rellen Nabelpunkte sind Stellen, deren Tangentialebene mit dem Ellipsoid einen Nullkreis, das heisst zwei sich treffende entgegengesetzte rotatorische Wirbel gemeinsam haben. Durch Parallelverschieben der Tangentialebene ergeben sich Kreisschnitte. Genau dasselbe gilt auch für die imaginären

Nabelpunkte. Zum Beispiel ist die Tangentialebene in N_1 gegeben durch die beiden isotropen Geraden NN_1 und MN_1, die einen Nullkreis mit dem imaginären Mittelpunkt N_1 bilden. Sie ist aber imaginär, MN ist ihre reelle Gerade. (Die durch den Pfeil N_1 gegebene gerichtete elliptische Involution bestimmt im Ebenenbüschel mit der Achse MN eine gerichtete elliptische Ebeneninvolution, durch welche die in Rede stehende Ebene gegeben ist.) Durch Parallelverschieben dieser Ebene in den Mittelpunkt O erhält man einen der Schnittkreise, welche die Kugel $O(c)$ mit dem Ellipsoid gemeinsam hat. Diese beiden Kreise haben den reellen Mittelpunkt O und den reellen Radius c, deshalb können wir sie als reell bezeichnen. Ihre einzigen reellen Punkte



Figur 9

sind aber die Endpunkte der kürzesten Achse des Ellipsoides, da sie in imaginären Ebenen liegen. Wie aus $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ folgt, haben diese Ebenen die Gleichungen:

$$y = \pm i \frac{b}{a\,l} x.$$

Die Normalprojektionen der beiden Schnittkreise auf die (x, y)-Ebene sind also die Wirbel mit $\operatorname{tgh}\tau = \operatorname{tg}\beta = \pm a\,l/b$, deren Hauptachse – wegen $b > a\,l$ – in die y-Achse fällt. Um ein Bild von der Pfeilmenge dieser Kreise zu erhalten, können wir den reellen Kreis um O vom Radius c in der (y, z)-Ebene nehmen und diesen um den Winkel $i\,\tau$ im einen und dem entgegengesetzten Sinne um die z-Achse drehen. Oder wir bestimmen aus $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ und $x = \pm i\,(a\,l/b)\,y$ die Normalprojektion auf die (y, z)-Ebene:

$$\left(\frac{k\,y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

Das Pfeilfeld dieser Ellipse ergibt sich durch affine Umwandlung des Pfeilfeldes eines gewöhnlichen Kreises. Vom gesuchten Bild der in Rede stehenden Kreise haben wir so zwei Normalrisse [Wirbel in der (x, y)-Ebene, Ellipse in der (y, z)-Ebene], aus

denen man einen Überblick der Punkte der Kreise gewinnt. In der Figur 9 sind einige Punkte eines solchen im erklärten Sinne reellen, aber in einer imaginären Ebene liegenden Kreises angedeutet. (Die Grössenverhältnisse sind der Übersicht wegen andere als in der Figur 8). Interessant ist der Übergang eines solchen Kreises in einen reellen Kreis in einer reellen Ebene.

Damit haben wir uns einen anschaulichen Einblick in die Konfiguration der zwölf Nabelpunkte verschafft. Die Betrachtungen lassen sich auf beliebige Flächen zweiter Ordnung ausdehnen. Unsere Ausführungen haben natürlich nur für denjenigen einen Wert, der ausser der Eleganz analytischer Entwicklungen auch die anschauliche Verarbeitung zu schätzen weiss. L. LOCHER-ERNST.

Herstellung von Perspektiven aus axonometrischen oder perspektiven Bildern[1])

Wird ein Gegenstand aus zwei Augen O und O_1 auf eine Bildebene π projiziert, so stehen beide Bilder in einer einfachen Beziehung. Diese Beziehung ermöglicht a) aus einem axonometrischen Bild durch «Umzeichnen» ein perspektives Bild herzustellen, b) aus einem Foto das dargestellte Objekt durch Umzeichnen in ein axonometrisches Bild zu rekonstruieren, c) ein ungünstig wirkendes perspektives Bild in ein anderes umzuzeichnen, indem das Auge O durch ein anderes Auge O_1 ersetzt wird.

Eine waagrechte Grundebene Γ schneide π in der Grundlinie g. Ein Raumpunkt P habe den Grundriss P' in Γ. Die Sehstrahlen OP und O_1P schneiden π in P^c und P^z, die Sehstrahlen OP' und O_1P' schneiden π in P'^c und P'^z. Wir unterscheiden, ob π lotrecht steht oder nicht.

1. *Umzeichnen bei lotrechter Bildebene*

Figur 1 zeigt links die perspektiven Bilder mit den Hauptpunkten H, H_1, den Horizonten h, h_1 und den Messpunkten $M_\Gamma, M_{1\Gamma}$ von Γ (= «umgeklappte Augen»), rechts eine Ansicht in Richtung g, die man als Kreuzriss auffassen kann. Der Schnittpunkt $O_1^c = O^z$ der Geraden OO_1 mit π heisse Kernpunkt. Jede Gerade in π durch $O_1^c O^z$ heisse ein Kernstrahl. Die Ebene POO_1 enthält P^c und P^z. Sie schneidet π nach einem Kernstrahl, daher liegen P^c und P^z auf einem Kernstrahl. Ebenso liegen P'^c und P'^z auf einem Kernstrahl (ausgeschnitten von der Ebene $P'OO_1$). – Ist P der Fernpunkt der zu π normalen Geraden oder der Fernpunkt der Drehsehnen OM_Γ und $O_1M_{1\Gamma}$, so folgt: H und H_1 liegen auf einem Kernstrahl, ebenso M_Γ und $M_{1\Gamma}$. Sind H, H_1, d, d_1 und g gegeben, so geht h parallel zu g durch H und h_1 durch H_1. Den Kernpunkt findet man ohne Kreuzriss als Schnittpunkt von HH_1 mit $M_\Gamma M_{1\Gamma}$.

P sei durch P^c und P'^c gegeben. Um P^z und P'^z ohne Benutzung des Kreuzrisses zu erhalten, lege man in Γ durch P' die zu g normale «Fallgerade» f. f^c geht durch H und P'^c, f^z durch H_1 und den auf g gelegenen Bildspurpunkt $\overline{P}$ von f. Der Kernstrahl

[1]) Vom Verfasser erscheint demnächst ein Buch *Konstruktive Geometrie für Techniker* (Springer-Verlag, Wien).