

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1955)  
**Heft:** 2

**Rubrik:** Aufgaben

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Krümmung: a) kleinste Oberfläche? b) grösste Oberfläche? Wegen einer Vermutung zu a) vgl. H. BIERI: *Ein  $(M, F)$ -Problem mit Nebenbedingung*, Experientia 9, H. 6, 207 (Basel 1953).  
H. HADWIGER, Bern.

*Berichtigung.* In Nr. 2 der Rubrik «Ungelöste Probleme» [El. Math. 9, Nr. 6, 134 (1954)] muss der Ausdruck für  $D_3$  natürlich

$$D_3 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}} = 0,8880\dots$$

heissen.

(Red.)

## Aufgaben

**Aufgabe 200.** Zeige, dass das Volumen  $V_n(d)$  einer Kugel in  $n$  Dimensionen und mit einem Durchmesser  $d$  gegeben ist durch

$$V_n(d) = \frac{d^n}{\Gamma^*(n+1)} \quad \text{wo} \quad \Gamma^*(n+1) = \prod_{k=2, 4, 6, \dots} \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n}{1 + \frac{n}{k}} \right\}.$$

[Wird das Produkt für  $\Gamma^*(n+1)$  über alle natürlichen  $k$  erstreckt, so ergibt sich die bekannte Eulersche Formel für die Gamma-Funktion  $\Gamma(n+1)$ ]. B. VAN DER POL, Genf.

*Lösung:* Es genügt, die Behauptung für die Einheitskugel zu beweisen. Der Schnitt einer  $n$ -dimensionalen Einheitskugel mit einer Hyperebene im Abstand  $\cos\alpha$  vom Mittelpunkt ist eine  $(n-1)$ -dimensionale Kugel vom Radius  $\sin\alpha$ . Daraus folgt die Rekursionsformel

$$V_n = \int_0^\pi V_{n-1} \sin^n \alpha \, d\alpha = J_n V_{n-1} \quad \text{mit} \quad J_n = \int_0^\pi \sin^n \alpha \, d\alpha.$$

Sie gilt, wenn man  $V_0 = 1$  setzt, auch noch für  $n = 1$ . Also ist  $V_n = J_1 J_2 \dots J_n$ .

Durch partielle Integration ergibt sich

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}, \tag{1}$$

und daraus folgt

$$\frac{V_n}{V_{n-2}} = J_n J_{n-1} = \frac{n-1}{n} J_{n-1} J_{n-2} = \dots = \frac{1}{n} J_1 J_0 = \frac{2\pi}{n}.$$

Nach (1) ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{J_{m-1}}{J_m} = 1$$

und daher

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{4}{n} \cdot \frac{J_0}{J_1} = \frac{4}{n} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{n} \left[ \prod_{k=1}^N \left( \frac{2k}{2k+1} \right)^2 \right] (2N+1).$$

Ferner ist

$$\frac{1}{n} = \left[ \prod_{k=1}^N \frac{n+2k}{n-2+2k} \right] \frac{1}{n+2N};$$

also wird

$$\frac{V_n}{V_{n-2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} 4 \left[ \prod_{k=1}^N \left( \frac{2k}{2k+1} \right)^2 \frac{n+2k}{n-2+2k} \right] \frac{2N+1}{n+2N} = 4 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{n}{2k}}{\left(1 + \frac{n-2}{2k}\right) \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^2}.$$

Daraus folgt durch Induktion die für  $n = 0$  und  $n = 1$  offenbar richtige Behauptung

$$V_n = 2^n \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{n}{2k}}{\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^n}.$$

H. LENZ, München.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark) und R. LAUFLER (Graz).

**Aufgabe 201.** Démontrer que les derniers chiffres décimaux des nombres de la suite infinie  $n^{n^n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) forment une suite périodique, et trouver sa période.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

*Lösung:* Für die Endziffern 0, 1, 5, 6, 9 von  $n$  ergeben sich trivialerweise 0, 1, 5, 6, 9 als Endziffern von  $n^{n^n}$ . Hat  $n$  die Endziffer 2, so gilt entweder  $n \equiv 0 \pmod{4}$  oder  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , in beiden Fällen also  $n^n \equiv 0 \pmod{4}$ . Daraus folgt für  $n^{n^n}$  als Endziffer die Zahl 6. Für die Endziffern 4 und 8 von  $n$  erhält man mit der analogen Überlegung 6 als Endziffer von  $n^{n^n}$ . Endigt  $n$  auf 3, so gilt entweder  $n \equiv 3 \pmod{4}$  oder  $n \equiv 1 \pmod{4}$ , also  $n^n \equiv 3 \pmod{4}$  bzw.  $n^n \equiv 1 \pmod{4}$ , und  $n^{n^n}$  hat als letzte Ziffer 7 bzw. 3. Auch für die Endzahl 7 gelten obige Kongruenzen,  $n^{n^n}$  hört aber in diesem Falle mit 3 bzw. mit 7 auf. Die Endzahlfolge von  $n^{n^n}$  ist also periodisch. Die 20stellige Periode lautet: 1, 6, 7, 6, 5, 6, 3, 6, 9, 0, 1, 6, 3, 6, 5, 6, 7, 6, 9, 0.

J. BINZ, Bern.

Wie einige Löser bemerkten, besteht die Periode von  $(n^n)^n$  aus den Zahlen 1, 6, 3, 6, 5, 6, 7, 6, 9, 0.

Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), F. GOLDNER (London), A. MARET (Biel), K. MORONYI (Szeged, Ungarn), R. LAUFLER (Graz), W. SCHÖNINGER (Wien), A. UNTERBERGER (Bludenz).

**Aufgabe 202.** Bedeutet  $\sigma_k(n)$  ( $k \geq 0$ ) die Summe der  $k$ -ten Potenzen der Teiler der natürlichen Zahl  $n$  und  $\varphi(n)$  die Anzahl der zu  $n$  primen  $t \leq n$  (Eulersche Funktion), so gilt die Ungleichung

$$\sigma_k(n) \geq \sigma_k^*(n) + \varphi^k(n) \quad (k \geq 1, n > 1).$$

E. TROST, Zürich.

*Lösung:* Wir benutzen Induktion nach der Anzahl  $r$  der verschiedenen Primfaktoren von  $n$ .

1. Für  $r = 1$  ist  $n = p^e$ ,  $e \geq 1$ ,  $p$  Primzahl, und man hat zu beweisen, dass

$$\frac{p^{k(e+1)} - 1}{p^k - 1} \geq (e+1)^k + (p^e - p^{e-1})^k. \quad (1)$$

Es ist

$$p^k - (p-1)^k = \sum_{s=0}^{k-1} p^s (p-1)^{k-s-1} \geq \sum_{s=0}^{k-1} 2^s = 2^k - 1,$$

also

$$p^k + 1 = \frac{p^{2k} - 1}{p^k - 1} \geq 2^k + (p-1)^k.$$

Hieraus entsteht durch beidseitige Multiplikation mit  $p^{k(e-1)}$

$$\frac{p^{k(e+1)} - p^{k(e-1)}}{p^k - 1} \geq (2p^{e-1})^k + (p^e - p^{e-1})^k,$$

und diese Ungleichung kann wegen

$$p^{k(e+1)} - 1 \geq p^{k(e+1)} - p^{k(e-1)} \quad \text{und} \quad 2p^{e-1} \geq 2^e \geq e + 1$$

zu (1) abgeschwächt werden.

2. Nun sei  $r > 1$  und die Behauptung schon bewiesen für alle natürlichen Zahlen, die weniger als  $r$  verschiedene Primfaktoren besitzen. Wegen  $r > 1$  lässt sich  $n$  zerlegen in der Form  $n = a b$ , wo  $a > 1$ ,  $b > 1$ ,  $(a, b) = 1$ . Auf  $a$  und  $b$  trifft die Induktionsvoraussetzung zu, nach der mithin

$$\sigma_k(a) \geq \sigma_0^k(a) + \varphi^k(a), \quad \sigma_k(b) \geq \sigma_0^k(b) + \varphi^k(b).$$

Daraus folgt, da alle auftretenden Funktionen multiplikativ sind und nur positive Werte annehmen,

$$\sigma_k(n) = \sigma_k(a) \sigma_k(b) \geq \sigma_0^k(a) \sigma_0^k(b) + \varphi^k(a) \varphi^k(b) = \sigma_0^k(n) + \varphi^k(n),$$

was zu beweisen war.

G. PAZDERSKI, Halle (Saale).

Aus den obigen Ungleichungen geht hervor, dass das Gleichheitszeichen in der Behauptung der Aufgabe nur gilt für  $e = k = 1$ ,  $p$  beliebig und  $e = 1$ ,  $p = 2$ ,  $k$  beliebig.

Die Aufgabe ist eine Verallgemeinerung der Aufgabe Nr. 343 im Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung 56, 39 (1953), 2. Abtl.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark) und F. GOLDNER (London).

**Aufgabe 203.** Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les angles du triangle  $ABC$ ,  $Z$  le centre de gravité et  $\alpha', \beta', \gamma'$  les angles  $BZC, CZA, AZB$ . Démontrer

$$3 \operatorname{ctg} \alpha' = \operatorname{ctg} \alpha - 2 \operatorname{ctg} \beta - 2 \operatorname{ctg} \gamma$$

et par suite

$$\operatorname{ctg} \alpha' + \operatorname{ctg} \beta' + \operatorname{ctg} \gamma' = -(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma).$$

H. BREMEKAMP, Delft.

Lösung: Es sei  $F$  die Fläche des Dreiecks  $ABC$ , ferner

$$\overline{BC} = a, \quad \overline{AZ} = \frac{2}{3} m_a = \frac{1}{3} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \quad \text{usw.}$$

Dann ist

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4F}.$$

Analoge Formeln gelten für  $\operatorname{ctg} \beta$ ,  $\operatorname{ctg} \gamma$ . Im Dreieck  $ZBC$  mit der Fläche  $F/3$  ergibt sich ebenso

$$\operatorname{ctg} \alpha' = \frac{4/9 (m_b^2 + m_c^2) - a^2}{4F/3} = \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{12F}.$$

Wegen  $2(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = a^2/F$  folgt sofort

$$3 \operatorname{ctg} \alpha' = \operatorname{ctg} \alpha - 2(\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma).$$

Addiert man hierzu die beiden entsprechenden Beziehungen, so erhält man die zweite der zu beweisenden Formeln.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

Wie M. G. BEUMER (Enschede) bemerkt, findet man die Aufgabe in WIJDENES, Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie, 5. Aufl. (Noordhoff, Groningen 1940), S. 215.

J. BERKES (Szeged) weist darauf hin, dass aus der ersten Formel der Aufgabe für ein rechtwinkliges Dreieck mit  $\alpha = 90^\circ$  die Ungleichung  $143^\circ 10' < \alpha' < 180^\circ$  folgt.

G. N. VLAHAVAS (London) gibt folgende Verallgemeinerung der zweiten Formel der Aufgabe an: Ist  $Z$  der Punkt im Dreieck  $ABC$  mit den baryzentrischen Koordinaten

$\mu, \nu, \varrho$  (das Verhältnis der Massen in  $A, B, C$  ist  $\mu:\nu:\varrho$ , und  $Z$  ist der Schwerpunkt dieses Massensystems), so gilt

$$\begin{aligned} & (\mu + \nu + \varrho) \{ \mu \operatorname{ctg} \alpha' + \nu \operatorname{ctg} \beta' + \varrho \operatorname{ctg} \gamma' \} \\ & = [\mu - 2(\nu + \varrho)] \mu \operatorname{ctg} \alpha + [\nu - 2(\varrho + \mu)] \nu \operatorname{ctg} \beta + [\varrho - 2(\mu + \nu)] \varrho \operatorname{ctg} \gamma. \end{aligned}$$

Weitere Lösungen sandten J. BERKES (Szeged), L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), K. EJRNAES (Tønder, Dänemark), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFLER (Graz), E. ROTHMUND (Zürich), J. SCHOPP (Budapest), A. UNTERBERGER (Bludenz).

**Aufgabe 204.** Ein prismatischer Bleistift, dessen Querschnitt ein reguläres Sechseck mit der Seite  $s$  ist, wird maschinell angespitzt.  $l$  sei die gesamte Länge des gespitzten Bleistiftes und  $2\alpha$  der Öffnungswinkel der kegelförmigen Spitze. Man ermittle das Volumen des gespitzten Bleistiftes als Funktion von  $l, s$  und  $\alpha$ .

A. UNTERBERGER, Bludenz.

*Lösung:* Im Koordinatensystem  $O(x, y, z)$  sei  $z$  die Bleistiftachse, die  $x, y$ -Ebene die Ebene des begrenzenden Sechseckes und  $x$  senkrecht zu einer Kante des Sechseckes. Der Bleistift wird abgeschnitten durch die Kegelfläche  $z = l - \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ctg} \alpha$ . Sein Volumen ist

$$V = 12 \int_0^{s\sqrt{3}/2} \left\{ \int_0^{x\sqrt{3}/3} (l - \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ctg} \alpha) dy \right\} dx.$$

Berücksichtigt man die Formel

$$\int \sqrt{x^2 + y^2} dy = \frac{1}{2} y \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{1}{2} x^2 \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) + C,$$

so ergibt sich

$$V = 4l\sqrt{3} \int_0^{s\sqrt{3}/2} x dx - (4 + 3 \ln 3) \operatorname{ctg} \alpha \int_0^{s\sqrt{3}/2} x^2 dx = \frac{s^2\sqrt{3}}{8} [12l - (4 + 3 \ln 3)s \operatorname{ctg} \alpha].$$

R. JAKOBI, Braunschweig.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), J. BERKES (Szeged), E. ROTHMUND (Zürich), A. SCHWARZ (Seuzach), B. WIEZORKE (Braunschweig).

## Neue Aufgaben

232. Eine veränderliche Tangente eines Kegelschnitts schneide zwei feste Tangenten desselben in  $A$  und  $B$ . Über  $AB$  wird das Dreieck  $ABC$  errichtet, das zu einem festen Dreieck gleichsinnig ähnlich ist. Gesucht wird der geometrische Ort für die Spitze  $C$ . C. BINDSCHEDLER, Küsnacht, und J. P. SYDLER, Zürich.
233. D'un point  $M$  sur le diamètre  $AB$  d'une hyperbole équilatère on mène la tangente  $MT$  ( $A, B, T$  se trouvent sur la courbe). Démontrer

$$\frac{\overline{AT}^2}{\overline{BT}^2} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.$$

G. VLAHAVAS, London.

234. Die Gerade  $g$  durch den Mittelpunkt  $M$  des Umkreises eines Dreiecks  $ABC$  schneidet die Geraden  $BC, CA$  und  $AB$  in den Punkten  $A_0, B_0$  und  $C_0$ . Man zeige, dass die Umkreise der Dreiecke  $MAA_0, MBB_0$  und  $MCC_0$  Kreise eines Büschels sind. R. LAUFLER, Graz.

235. Man ermittle für die Parabel den Ort der Zentren aller vierpunktig berührenden logarithmischen Schmiegspiralen. W. WUNDERLICH, Wien.

236. Démontrer

$$\int_0^a dx \int_{x/2}^x y^2 e^{y^2} dy + \int_a^{2a} dx \int_{x/2}^a y^2 e^{y^2} dy = \frac{1}{2} e^{a^2} (a^2 - 1).$$

H. BREMEKAMP, Delft.

237. Es seien  $a_1 < a_2 < \dots$  die Zahlen mit höchstens zwei verschiedenen Primfaktoren. Dann ist zu zeigen, dass es eine Zahl  $c > 0$  gibt, so dass für unendlich viele  $k$

$$a_{k+1} - a_k > c \log k.$$

Lässt sich dieser Satz verschärfen? Kann man also zeigen, dass

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1} - a_k}{\log k} = \infty?$$

P. ERDÖS, Jerusalem.

## Literaturüberschau

L. N. H. BUNT:

*Een Onderzoek naar de Overloading van het Programma voor de Wiskunde bij het Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs*

103 S., P. Noordhoff, Groningen 1953

Die vorliegende fünfte Schrift der *Acta Paedagogica Ultrajectina*, die vom Pädagogischen Institut der Universität Utrecht herausgegeben werden, berichtet über eine Enquête unter den Mathematiklehrern an holländischen Mittelschulen, in der festgestellt werden sollte, ob das in Anlehnung an die offiziellen Lehrpläne durchgeführte individuelle Lehrprogramm überladen ist oder unter normalen Bedingungen bewältigt werden kann. Erfasst wurde die Stufe, die der dritten und vierten Klasse eines Gymnasiums entspricht. Es zeigt sich, dass die notwendige Stundenzahl für die Bewältigung des Pensums, die mit statistischen Methoden auf Grund von Zeitnotierungen und Prüfungsarbeiten ermittelt wurde, im allgemeinen erheblich über die verfügbare Stundenzahl hinausgeht. Die als Muster beigefügten Rapporte einzelner Teilnehmer geben mit Lehrplänen und Prüfungsaufgaben einen guten Einblick in den auf dieser Stufe in Holland behandelten Stoff.

E. Trost.

HOWARD LEVI:

*Elements of Algebra*

160 Seiten, Chelsea Publishing Company, New York 1954

Das vorliegende Büchlein ist das Textbuch einer einsemestrigen Vorlesung (School of General Studies, Columbia University, New York), die eine solide algebraische Grundlage für weitere mathematische Studien und zugleich einen Einblick in die modernen abstrakten Methoden vermitteln will. Ausgehend von den einfachsten Begriffen der Mengenlehre, die der Verfasser als «natürlich» gegeben voraussetzt, werden die Objekte der Algebra formal konstruiert und die Gesetze ihrer Verknüpfung abgeleitet. Eine Menge wird Zahlsystem genannt, wenn zwei Operationen in ihr definiert sind, die denselben fünf Grundgesetzen wie Addition und Multiplikation genügen. Der grössere Teil des Buches ist der expliziten Konstruktion einfacher Zahlsysteme (ganze Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen) gewidmet. Das Büchlein enthält, gemessen an