Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1955)
Heft: 2

Artikel: Ein einfacher Beweis des Satzes von Pohlke
Autor: Hohenberg, Fritz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18075

Während jeder gewöhnliche Evolutoidenpunkt als Zentrum einer *logarithmischen Krümmungsspirale* vom Schnittwinkel $-\alpha$ angesehen werden kann, welche die Grundkurve k dreipunktig berührt, ist jede Evolutoidenspitze Zentrum einer vierpunktig berührenden Spirale. Rücken schliesslich zwei Spitzen zusammen (zu einem dreifachen Punkt mit vereinigten Tangenten), so wird die Schmiegspirale sogar eine fünfpunktig berührende: Im vorliegenden Fall kann dies aus Symmetriegründen nur für $\omega = \pm\pi/4$ und $\pm 3\pi/4$ eintreten, also gemäss (8) für $\operatorname{tg}\alpha = \pm 2\, a\, b/3\,(a^2 - b^2)$. Auf diese Weise ergibt sich übrigens eine direkte Lösung der seinerzeit von R. BEREIS gestellten Aufgabe, jene logarithmischen Spiralen zu finden, die eine vorgelegte Ellipse zum (fünfpunktig berührenden) Schmiegkegelschnitt haben[1]).

Abschliessend sei erwähnt, dass sich für die Evolutoiden der *Parabel* rationale Kurven 3. Klasse und 3. Ordnung ergeben, nämlich *affine semikubische Parabeln.*

W. WUNDERLICH, Wien.

Ein einfacher Beweis des Satzes von Pohlke[2])

Man kann das Verfahren der schiefen Axonometrie als das Auftragen von Koordinaten in einem frei gewählten ebenen Dreibein erklären. Dann folgt planimetrisch, dass eine allgemeine ebene Figur affin verzerrt erscheint. Alle Lagenbeziehungen, ebenso jene Massbeziehungen, in denen die Länge der räumlichen Einheitsstrecke nicht benötigt wird, lassen sich konstruktiv behandeln, ohne dass man die Eigenschaft benützt, dass das schiefaxonometrische Bild ein Schrägriss (eine Parallelprojektion) ist. Diese Eigenschaft wird bekanntlich im Satz von POHLKE ausgedrückt. Für diesen Satz und die Konstruktion des Kugelumrisses, der Sehstrahlrichtung und des räumlichen Dreibeins wird hier eine elementare Herleitung gegeben. Es werden zwei Hilfssätze verwendet:

1. Jedes frontalaxonometrische Bild ist ein Schrägriss. Ist ein ebenes Dreibein $U_0A_0B_0C_0$ mit $\overline{U_0B_0} = \overline{U_0C_0}$ und $\sphericalangle B_0U_0C_0 = 90°$ gegeben, so kann ein räumliches Dreibein $UABC$ und eine Sehstrahlrichtung s sofort angegeben werden: $U = U_0$, $B = B_0$, $C = C_0$; UA steht auf der Bildebene normal und hat die Länge $\overline{U_0B_0}$; s ist die Richtung von A nach A_0.

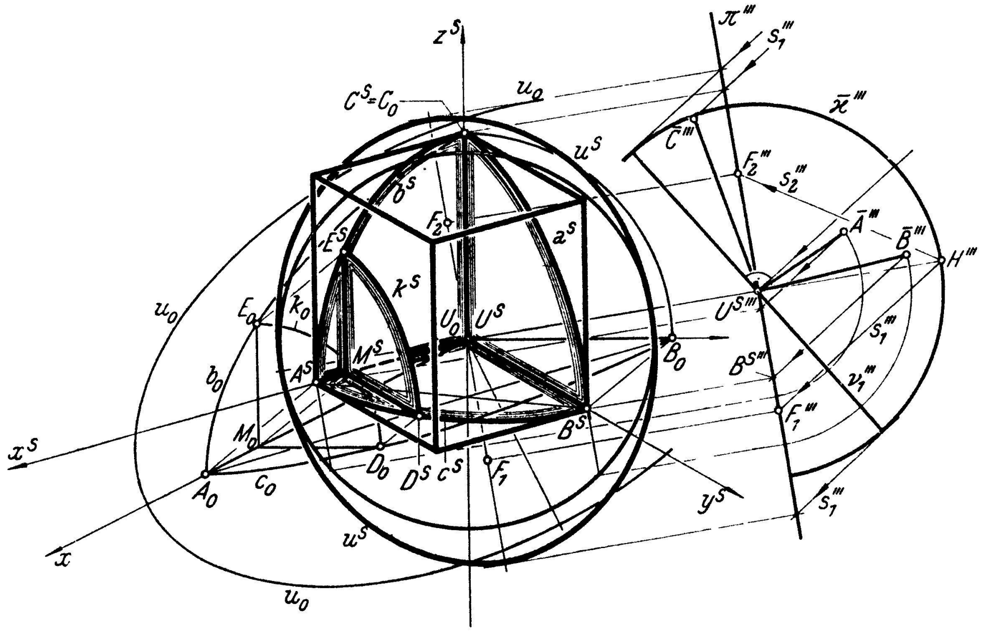
2. In der Ebene π seien im Innern eines Kreises c mit der Mitte U die Punkte P und Q gegeben. γ sei die Kugel um U durch c. Die Normalen zu π durch P und Q mögen γ in P_1, P_2 bzw. Q_1, Q_2 schneiden. Die Grosskreise von γ durch P_1, Q_1 bzw. P_2, Q_2 erscheinen im Normalriss auf π als eine Ellipse durch P und Q, die c in diametralen Punkten berührt. Die Grosskreise durch P_1, Q_2 bzw. P_2, Q_1 erscheinen ebenfalls als eine solche Ellipse. Bei der einen Ellipse werden P und Q durch die Berührungspunkte mit c getrennt, bei der anderen nicht. Umgekehrt kann man jede Ellipse, die c von innen in diametralen Punkten berührt, als Normalriss zweier symmetrisch zu π liegenden reellen Grosskreise von γ auffassen. Übt man auf c, P, Q noch eine Affinität aus, so folgt:

[1]) Aufgabe 159, El. Math. 7, 92 (1952); Auflösung ebenda 8, 91 (1953).

[2]) Vom Verfasser erscheint demnächst ein Buch *Konstruktive Geometrie für Techniker* (Springer-Verlag, Wien).

Es gibt zwei Ellipsen, die eine gegebene Ellipse in diametralen Punkten berühren und durch zwei gegebene Punkte im Innern gehen. Bei der einen Ellipse werden die gegebenen Punkte durch die Berührungspunkte getrennt, bei der anderen nicht.

Ein allgemeines schiefaxonometrisches Bild sei nun durch das Bild des Einheitswürfels gegeben (Figur 1). U^s sei das Bild der unsichtbaren Würfelecke U; UA, UB, UC seien Würfelkanten. Die Einheitskugel $\varkappa$ (Mitte U, Radius $\overline{UA}=\overline{UB}=\overline{UC}$) schneidet die Koordinatenebenen in Kreisen, die als Ellipsen a^s, b^s, c^s erscheinen. Figur 1 zeigt den ersten Oktanten von $\varkappa$, B^s und C^s sind Endpunkte konjugierter Durchmesser von a^s usw.



Figur 1

Die Schnittkreise k von $\varkappa$ mit den zu $[y\,z]$ parallelen Ebenen erscheinen als Ellipsen k^s (Mitte M^s auf x^s, Endpunkte D^s und E^s konjugierter Durchmesser auf c^s bzw. b^s). Der gesuchte scheinbare Umriss u^s von $\varkappa$ ist offenbar die Einhüllende aller k^s in der Bildebene π.

Um u^s zu bestimmen, üben wir auf alle k^s eine perspektive Affinität aus; z^s sei Affinitätsachse, B^s gehe in einen Punkt B_0 über, der aus $C^s = C_0$ durch Vierteldrehung um $U^s = U_0$ entsteht. A^s, D^s, E^s, b^s, c^s gehen dann in A_0, D_0, E_0, b_0, c_0 über, und jedem k^s entspricht ein Kreis k_0. Der Hüllkurve u^s entspricht die Hüllkurve u_0 aller k_0. Nach Hilfssatz 1 ist das durch $U_0A_0B_0C_0$ bestimmte frontalaxonometrische Bild ein Schrägriss. Die Kreise k_0 sind die frontalaxonometrischen Bilder der Parallelkreise der Einheitskugel. Der Umriss u_0 der Einheitskugel in diesem Schrägriss ist jene Ellipse, für die U_0 Mitte, A_0 ein Brennpunkt und $\overline{U_0B_0}$ die Länge der halben Nebenachse ist. Aus u_0 ergibt sich durch die Affinität $k_0 \to k^s$ eine Ellipse u^s als schiefaxonometrischer Umriss von $\varkappa$. Den Berührungspunkten von c_0 mit u_0 entsprechen die Berührungspunkte von c^s mit u^s. A und B liegen auf dem sichtbaren Bogen von c.

u^s habe die Brennpunkte F_1 und F_2. Wir errichten die Kugel $\bar{\varkappa}$ über dem Nebenscheitelkreis von u^s (Seitenriss in Figur 1). H sei der vor π liegende Endpunkt des zu π

normalen Durchmessers von $\bar{\varkappa}$. s_1 sei die Richtung von H nach F_1 (in Pfeilrichtung orientiert!) und ν_1 die dazu normale Ebene durch U^s. $\bar{\varkappa}$ hat für die Sehstrahlrichtung s_1 den scheinbaren Umriss u^s in π, der wahre Umriss liegt in ν_1. Durch A^s und B^s werden die zu s_1 parallelen Geraden gelegt und mit der in Richtung s_1 sichtbaren Hälfte von $\bar{\varkappa}$ in $\bar{A}$ und $\bar{B}$ geschnitten. Der durch $\bar{A}$ und $\bar{B}$ gelegte Grosskreis von $\bar{\varkappa}$ liefert bei Projektion in Richtung s_1 eine Ellipse in π, die durch A^s und B^s geht und u^s in diametralen Puknten berührt, wobei A^s und B^s von den Berührungspunkten nicht getrennt werden. Diese Ellipse ist nach Hilfssatz 2 eindeutig bestimmt und ist daher mit c^s identisch. c^s und der Grosskreis durch $\bar{A}$ und $\bar{B}$ sind durch die Sehstrahlen affin aufeinander bezogen, und da A^s und B^s Endpunkte konjugierter Durchmesser von c^s sind, sind $U^s\bar{A}$ und $U^s\bar{B}$ zwei zueinander normale Radien von $\bar{\varkappa}$[1]).

Diese mit c^s durchgeführte Konstruktion lässt sich für a^s und b^s wiederholen. Man erhält so zur Sehstrahlrichtung s_1 drei Punkte $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ auf $\bar{\varkappa}$, die mit U^s ein räumliches orthogonales Dreibein bilden. Daher ist $\bar{\varkappa}$ eine mögliche Lage der gesuchten Einheitskugel und U^s, $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ eine mögliche Lage des gesuchten räumlichen Dreibeins $UABC$. Andere Lagen gehen daraus durch Parallelverschiebung in Richtung s_1 hervor. Dreht man diese Dreibeine um die Nebenachse von u^s, bis s_1 in die Richtung $s_2 \parallel [HF_2]$ gelangt, so erhält man die zur Sehstrahlrichtung s_2 gehörigen Dreibeine. Sie sind mit den früheren gleichsinnig kongruent. Als Länge der Einheitsstrecke im Raum ergibt sich beide Male die Länge der halben Nebenachse von u^s.

Ist statt U die Gegenecke von U unsichtbar (Untersicht statt Obersicht), so ergeben sich zur Sehstrahlrichtung s_1 Achsenkreuze, die zu den vorher gefundenen bezüglich ν_1 spiegelbildlich liegen; analog für s_2.

In gleicher Weise lässt sich der Satz von Pohlke in dem (praktisch uninteressanten) Sonderfall beweisen, dass zum Beispiel U^s, B^s, C^s auf einer Geraden liegen. A^s liegt dann auf u^s, $\bar{A}$ in ν_1 bzw. ν_2; die Projektion des Grosskreises durch $\bar{A}$ und $\bar{B}$ berührt u^s in A^s und im diametralen Punkt und geht durch B^s, sie ist daher c^s.

Fritz Hohenberg, Graz.

Ungelöste Probleme

Nr. 4. Unter der Länge eines konvexen Rotationskörpers verstehen wir die Ausdehnung des Körpers in Richtung der Achse, also den Abstand der beiden auf der Achse liegenden Pole.

Herr H. Bieri (Bern) hat verschiedene Extremalprobleme gelöst, die sich auf derartige Rotationskörper mit fest vorgeschriebener Länge beziehen. Bis heute offengeblieben sind aber beispielsweise die beiden folgenden Fragen: Welcher konvexe Rotationskörper vorgeschriebener Länge hat bei gegebenem Integral der mittleren

[1]) Man könnte auch auf Hilfssatz 2 verzichten und so schliessen: Durch u^s geht ein Sehstrahlenzylinder ζ_u, der $\varkappa$ längs eines Kreises k in ν_1 berührt; durch c^s geht ein Sehstrahlenzylinder ζ_c, der ζ_u längs zweier Erzeugenden berührt. ζ_c berührt $\varkappa$ in den beiden Schnittpunkten dieser Erzeugenden mit k, daher zerfällt die Schnittkurve von ζ_c mit $\varkappa$ in zwei Kreise auf $\varkappa$. c sei einer dieser Kreise, A und B seien die Schnittpunkte von c mit den Sehstrahlen durch A^s und B^s. Die ebenen Schnitte c und c^s von ζ_u sind affin aufeinander bezogen, daher sind A und B Endpunkte zueinander normaler Durchmesser von c.