

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1955)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Über die Evolutoiden der Ellipse  
**Autor:** Wunderlich, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18074>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

conques, par exemple (67890), (67823), (78945), (89012), (90634), (06751), et déterminons les nombres  $a_0, a_1, \dots, a_5$  définis en 10 (Figure 8). Si  $P(i \ j \ k \ l \ m)$  désigne le polyèdre de sommet  $S$ , de base  $\pi$ , formé par les plans  $i, j, k, l, m$ , le polyèdre

$$P \sim a_0 P(67890) + a_1 P(67823) + a_2 P(78945) + a_3 P(89012) \\ + a_4 P(90634) + a_5 P(06751)$$

jouit de propriétés remarquables au point de vue de l'équivalence des polyèdres. Les dièdres d'arêtes obliques sont tous droits. Les arêtes horizontales ont une longueur algébrique nulle, c'est-à-dire que la longueur des arêtes qui portent un dièdre  $\alpha$  est égale à la longueur des arêtes qui portent un dièdre  $\pi - \alpha$ . Ce polyèdre vérifie ainsi les conditions de DEHN pour l'équivalence de façon presque triviale. Nous pouvons montrer d'autre part que tout polyèdre qui vérifie ces conditions est réductible à un polyèdre n'ayant que des dièdres droits et des sommets d'où ne partent que 5 arêtes au plus. Le polyèdre  $P$  est l'exemple le plus simple d'un polyèdre vérifiant les conditions de DEHN et présentant les caractères les plus généraux qu'il faille considérer. A cause de la liberté du choix des plans 5,2 et 0, il vérifie même toutes les conditions nécessaires et suffisantes qui nous soient connues. Par contre, nous ne savons pas si  $P$  est effectivement équivalent à un cube. Ce polyèdre résume donc en quelque sorte l'état actuel de la recherche de l'équivalence des polyèdres. Si l'on peut montrer qu'il est équivalent à un cube, on trouvera peut-être la démonstration du cas général. S'il ne l'est pas, on établira de nouvelles conditions nécessaires qui seront probablement aussi suffisantes. Tel est le problème. J.-P. SYDLER, Zurich.

## Über die Evolutoiden der Ellipse

Verdreht man in der Ebene sämtliche Tangenten einer gegebenen Kurve  $k$  um ihre Berührungs punkte um den gleichen Winkel  $\alpha$ , so erhält man im Hüllgebilde der Neulagen für  $\alpha = \pi/2$  die *Evolute*, für  $\alpha \neq \pi/2$  eine «*Evolutoide*» von  $k$ . Für die durch kontinuierliches Anwachsen des Drehwinkels  $\alpha$  von 0 bis  $\pi$  über die Evolutoiden als Zwischenstadien bewirkte Umorientierung einer Kurve  $k$  hat L. LOCHER-ERNST kürzlich das Beispiel der *Ellipse* herangezogen<sup>1)</sup>). Deren am angeführten Ort durch hübsche Figuren wiedergegebene Evolutoiden erwecken den Eindruck, *zwei schiefe Symmetrien* zu besitzen. Da es sich dabei keineswegs um eine einfache Folge der Symmetrieeigenschaften der Ausgangskurve handeln kann, soll diese Vermutung hier auf analytischem Wege nachgeprüft werden; es wird sich dabei auch ein bisher anscheinend nicht bemerkter Zusammenhang der Ellipsenevolutoiden mit einer sehr bekannten Kurvenfamilie ergeben.

Wir gehen von der üblichen Parameterdarstellung der Ellipse in kartesischen Normalkoordinaten aus:

$$x = a \cos \omega, \quad y = b \sin \omega. \quad (1)$$

<sup>1)</sup> L. LOCHER-ERNST, *Natürliche Umformung einer Kurve in ihre Evolute*. El. Math. 8, 73–75 (1953).

Bezeichnet  $\tau$  den Tangentenwinkel gegen die  $x$ -Achse, so gelangt man zu der um  $\alpha$  verdrehten Lage der Tangente durch den Ansatz

$$\frac{y - b \sin \omega}{x - a \cos \omega} = \operatorname{tg}(\tau + \alpha) \quad \text{mit} \quad \operatorname{tg} \tau = \frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos \omega}{a \sin \omega}.$$

Auswertung führt unter Verwendung der Abkürzungen  $\cos \alpha = \lambda$ ,  $\sin \alpha = \mu$  auf die Darstellung

$$\left. \begin{aligned} & (a \mu \sin \omega - b \lambda \cos \omega) x - (a \lambda \sin \omega + b \mu \cos \omega) y \\ & = (a^2 - b^2) \mu \sin \omega \cos \omega - a b \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Es liegt nahe, vermöge

$$x' = \lambda x + \mu y, \quad y' = -\mu x + \lambda y \quad (3)$$

eine *Drehung des Koordinatensystems* um den Winkel  $\alpha$  vorzunehmen und zur weiteren Vereinfachung die *affine Streckung*

$$x^* = x', \quad y^* = \frac{a}{b} y' \quad (4)$$

anzuschliessen. Die Evolutoide  $l$  wird dabei in eine Kurve  $l^*$  transformiert, die durch die Tangentengleichung

$$x^* \cos \omega + y^* \sin \omega = p - q \sin \omega \cos \omega, \quad (5)$$

$$\text{mit} \quad p = \lambda a, \quad q = \frac{\mu (a^2 - b^2)}{b}$$

beschrieben wird. Der Vollständigkeit halber sei auch ihre Punktgleichung angeführt, die sich aus (5) und der Ableitung nach  $\omega$  leicht berechnen lässt:

$$x^* = p \cos \omega - q \sin^3 \omega, \quad y^* = p \sin \omega - q \cos^3 \omega. \quad (6)$$

Durch Rückkehr über die Transformationen (4) und (3) gelangt man zu einer einfachen Parameterdarstellung der Ellipsenevolutoide selbst.

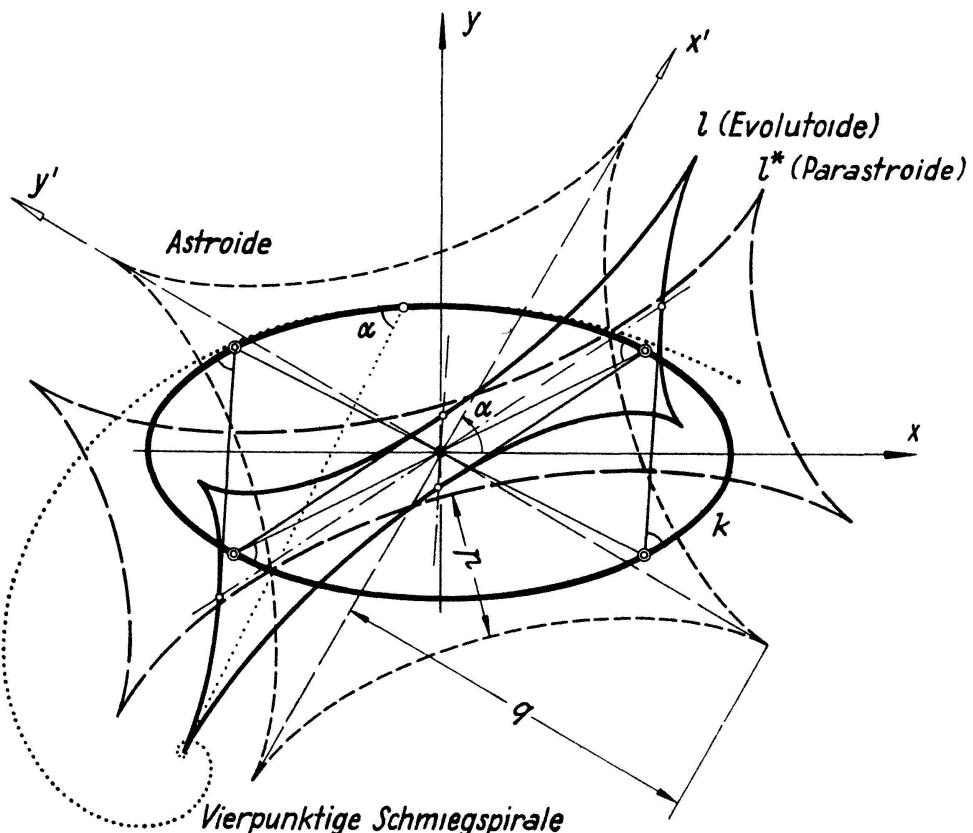
Zur Klärung der aufgeworfenen Frage nach den Symmetrien genügt aber bereits die Tangentengleichung (5). Vertauschung von  $\omega$  mit  $\pm \pi/2 - \omega$  lässt nämlich sofort erkennen, dass die Kurve  $l^*$  *spiegelsymmetrisch* bezüglich der Geraden  $y^* = \pm x^*$  ist. Hieraus folgt nun sofort die vermutete Symmetrie der Evolutoide  $l$ : Ihre Symmetrieachsen  $a(-\mu x + \lambda y) = \pm b(\lambda x + \mu y)$  gehen durch Drehung um den Winkel  $\alpha$  aus den beiden konjugierten Ellipsendurchmessern  $a y = \pm b x$  hervor, welche die Punkte  $\omega = \pm \pi/4$  und  $\pm 3\pi/4$  tragen und durch Längengleichheit gekennzeichnet sind. Die zu diesen Punkten gehörigen Evolutoidentangenten sind parallel zu den Symmetrieachsen und berühren die Evolutoide in ihren auf diesen Achsen gelegenen «Scheiteln» (vgl. Figur 1). Symmetrische Tangenten und damit Punkte der Evolutoide stammen von solchen Punktpaaren der Ellipse, deren Verbindungssehne parallel zu einem der konjugierten Durchmesser gleicher Länge verläuft.

Die Bauart der Tangentengleichung (5) lässt es angezeigt erscheinen, zu *polaren Speerkoordinaten* überzugehen, die eine (orientierte) Gerade durch ihren (vorzeichen-

begabten) Ursprungsabstand  $h$  und dessen Richtungswinkel  $\omega$  festlegen. Die Gleichung der Kurve  $l^*$  schreibt sich dann

$$h = p - q \sin \omega \cos \omega \quad (7)$$

und lässt in dieser einfachen Gestalt unmittelbar erkennen, dass  $l^*$  eine im Abstand  $p$  verlaufende *Parallelkurve* der *Astroide*  $\bar{h} = -q \sin \omega \cos \omega$  ist, die als Hüllkurve einer Strecke von der Länge  $q$  aufgefasst werden kann, deren Endpunkte auf den



Figur 1. Ellipsenevolutoide und dazu affine Parastroide ( $a:b = 2:1$ ,  $\alpha = \pi/3$ )

Koordinatenachsen  $x'$ ,  $y'$  gleiten. Als Parallelkurve einer Hypozykloide ist die wohlbekannte «Parastroide»<sup>1)</sup> eine Radlinie 3. Stufe<sup>2)</sup>. Die Evolutoiden der Ellipse sind mithin affine Parastroiden, als solche rationale Kurven 4. Klasse und 6. Ordnung und im übrigen Radlinien 4. Stufe.

Die vier Spitzen der Parastroide  $l^*$  – und damit jene der Ellipsenevolutoide  $l$  – ergeben sich durch Nullsetzen des Krümmungshalbmessers

$$q = h + h'' = p + 3q \sin \omega \cos \omega$$

für

$$\sin 2\omega = -\frac{2p}{3q} = -\frac{2ab \operatorname{ctg} \alpha}{3(a^2 - b^2)}. \quad (8)$$

<sup>1)</sup> H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Sammig. Schubert 56, Leipzig 1908), 110 ff. und 301.

<sup>2)</sup> W. WUNDERLICH, *Höhere Radlinien*. Österr. Ing.-Archiv 1, 277–296 (1946). «Radlinie  $n$ -ter Stufe» wird die Bahnkurve des Endpunktes eines  $n$ -gliedrigen, gelenkigen Polygonzuges genannt, dessen Anfangspunkt fest ist und dessen einzelne (starre) Seiten mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten rotieren.

Während jeder gewöhnliche Evolutoidenpunkt als Zentrum einer *logarithmischen Krümmungsspirale* vom Schnittwinkel  $-\alpha$  angesehen werden kann, welche die Grundkurve  $k$  dreipunkig berührt, ist jede Evolutoidenspitze Zentrum einer vierpunkig berührenden Spirale. Rücken schliesslich zwei Spitzen zusammen (zu einem dreifachen Punkt mit vereinigten Tangenten), so wird die Schmiegspirale sogar eine fünfpunkig berührende: Im vorliegenden Fall kann dies aus Symmetriegründen nur für  $\omega = \pm \pi/4$  und  $\pm 3\pi/4$  eintreten, also gemäss (8) für  $\operatorname{tg}\alpha = \pm 2 a b/3 (a^2 - b^2)$ . Auf diese Weise ergibt sich übrigens eine direkte Lösung der seinerzeit von R. BEREIS gestellten Aufgabe, jene logarithmischen Spiralen zu finden, die eine vorgelegte Ellipse zum (fünfpunkig berührenden) Schmiegkegelschnitt haben<sup>1)</sup>.

Abschliessend sei erwähnt, dass sich für die Evolutoiden der *Parabel* rationale Kurven 3. Klasse und 3. Ordnung ergeben, nämlich *affine semikubische Parabeln*.

W. WUNDERLICH, Wien.

## Ein einfacher Beweis des Satzes von Pohlke<sup>2)</sup>

Man kann das Verfahren der schießen Axonometrie als das Auftragen von Koordinaten in einem frei gewählten ebenen Dreibein erklären. Dann folgt planimetrisch, dass eine allgemeine ebene Figur affin verzerrt erscheint. Alle Lagenbeziehungen, ebenso jene Massbeziehungen, in denen die Länge der räumlichen Einheitsstrecke nicht benötigt wird, lassen sich konstruktiv behandeln, ohne dass man die Eigenschaft benutzt, dass das schieffaxonometrische Bild ein Schrägriss (eine Parallelprojektion) ist. Diese Eigenschaft wird bekanntlich im Satz von POHLKE ausgedrückt. Für diesen Satz und die Konstruktion des Kugelumrisses, der Sehstrahlrichtung und des räumlichen Dreibeins wird hier eine elementare Herleitung gegeben. Es werden zwei Hilfssätze verwendet:

1. Jedes frontalexonometrische Bild ist ein Schrägriss. Ist ein ebenes Dreibein  $U_0 A_0 B_0 C_0$  mit  $\overline{U_0 B_0} = \overline{U_0 C_0}$  und  $\not\propto B_0 U_0 C_0 = 90^\circ$  gegeben, so kann ein räumliches Dreibein  $UABC$  und eine Sehstrahlrichtung  $s$  sofort angegeben werden:  $U = U_0$ ,  $B = B_0$ ,  $C = C_0$ ;  $UA$  steht auf der Bildebene normal und hat die Länge  $\overline{U_0 B_0}$ ;  $s$  ist die Richtung von  $A$  nach  $A_0$ .

2. In der Ebene  $\pi$  seien im Innern eines Kreises  $c$  mit der Mitte  $U$  die Punkte  $P$  und  $Q$  gegeben.  $\gamma$  sei die Kugel um  $U$  durch  $c$ . Die Normalen zu  $\pi$  durch  $P$  und  $Q$  mögen  $\gamma$  in  $P_1, P_2$  bzw.  $Q_1, Q_2$  schneiden. Die Grosskreise von  $\gamma$  durch  $P_1, Q_1$  bzw.  $P_2, Q_2$  erscheinen im Normalriss auf  $\pi$  als eine Ellipse durch  $P$  und  $Q$ , die  $c$  in diametralen Punkten berührt. Die Grosskreise durch  $P_1, Q_2$  bzw.  $P_2, Q_1$  erscheinen ebenfalls als eine solche Ellipse. Bei der einen Ellipse werden  $P$  und  $Q$  durch die Berührungspunkte mit  $c$  getrennt, bei der anderen nicht. Umgekehrt kann man jede Ellipse, die  $c$  von innen in diametralen Punkten berührt, als Normalriss zweier symmetrisch zu  $\pi$  liegenden reellen Grosskreise von  $\gamma$  auffassen. Übt man auf  $c, P, Q$  noch eine Affinität aus, so folgt:

<sup>1)</sup> Aufgabe 159, El. Math. 7, 92 (1952); Auflösung ebenda 8, 91 (1953).

<sup>2)</sup> Vom Verfasser erscheint demnächst ein Buch *Konstruktive Geometrie für Techniker* (Springer-Verlag, Wien).