Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 10 (1955)
Heft: 2

Artikel: Quelques propriétés de la configuration complémentaire de Desargues
Autor: Sydler, J.-P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18073

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

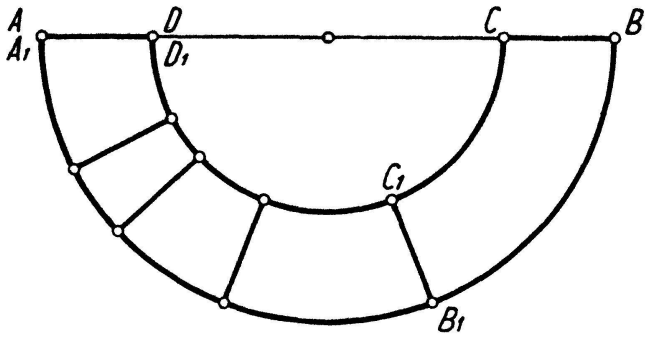
Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

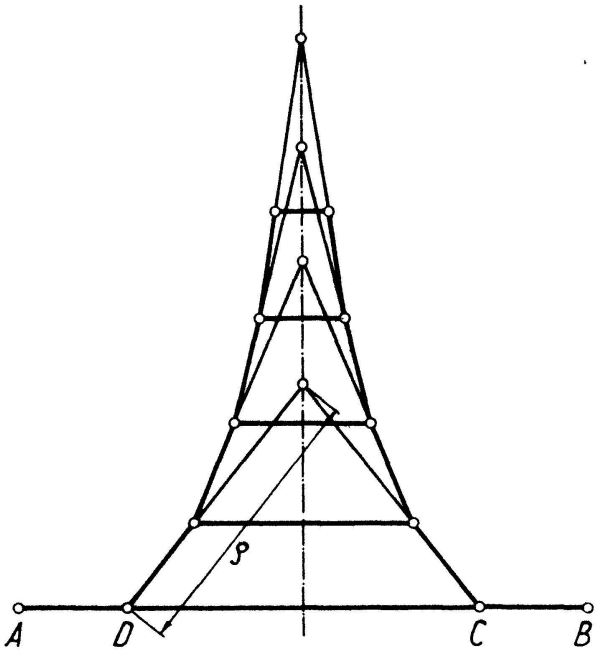
Download PDF: 04.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Wegen der Kongruenz der Streifen kann man jeden Streifen auf jede Kegelzone des Modells aufbiegen. Beim Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ folgt hieraus, dass eine Pseudosphäre so in sich verbogen werden kann, dass die Breitenkreise wieder in Breitenkreise übergehen; alle Punkte der Pseudosphäre sind daher bezüglich der Metrik auf der Fläche



Figur 18 *a*



Figur 18 *b*

miteinander gleichwertig, die Pseudosphäre hat also konstantes (und zwar negatives) Krümmungsmass.

Die entsprechenden Schrauben-Streifenmodelle liefern beim Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ Schraubenflächen konstanten negativen Krümmungsmasses. R. SAUER, München.

Quelques propriétés de la configuration complémentaire de Desargues

Soit C_1 une configuration de DESARGUES $(10_3, 10_3)$ formée par les 10 points 12, ..., 45 et par les 10 droites 123, ..., 345, les points ij, jk, ki étant sur la droite ijk (Figure 1). Cette configuration engendre une configuration C_2 $(15_2, 10_3)$ déterminée par les mêmes 10 droites 123, ..., 345 et par les 15 points d'intersection qui ne font pas partie de la configuration C_1 (Figure 2). Tout point est sur deux droites, toute droite contient trois points. Cette configuration C_2 jouit de propriétés dont les suivantes, à notre connaissance, sont encore inédites.

1° *C_2 contient seulement des polygones à 5, 6, 8 et 9 côtés.* Désignons par $A_1, \ldots, A_k$, $A_{k+1} = A_1$ un de ces polygones.

Soit A_{ij} le troisième point de la configuration situé sur A_iA_j. Soit encore $B(i, i+1, i+2)$ le point d'intersection de (A_i, A_{i+2}) et de $(A_{i,\,i+1}, A_{i+1,\,i+2})$.

2° *Dans un pentagone* $A_1 \ldots, A_5$, *les points* $B(1, 2, 3)$, $B(3, 4, 5)$ et A_{51} *sont sur une droite*, de même que les points $B(2, 3, 4)$, $B(4, 5, 1)$, A_{12}, etc. (Figure 3).

3° *Dans un hexagone* $A_1, \ldots, A_6$, *les points* $B(1, 2, 3)$, $B(3, 4, 5)$, $B(5, 6, 1)$ *sont sur une droite*, de même que les points $B(2, 3, 4)$, $B(4, 5, 6)$, $B(6, 1, 2)$ (Figure 4).

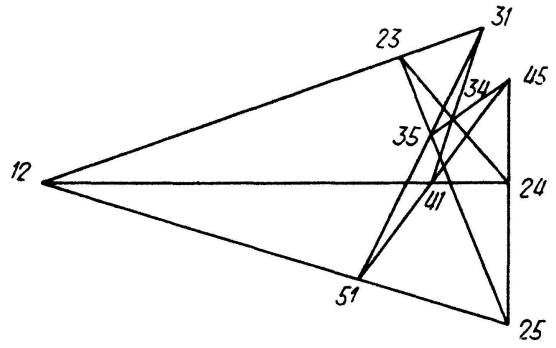


Figure 1

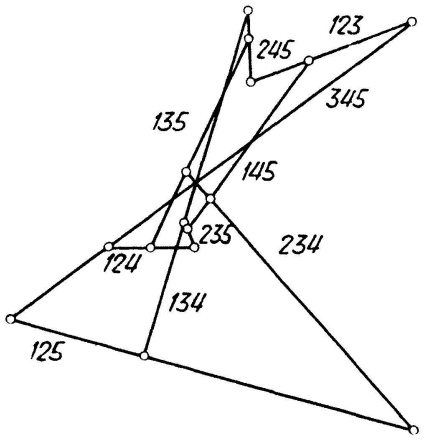


Figure 2

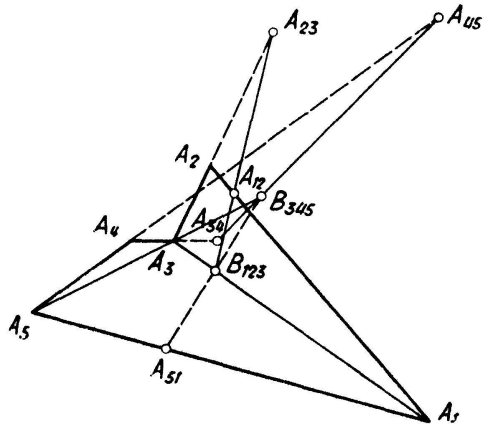


Figure 3

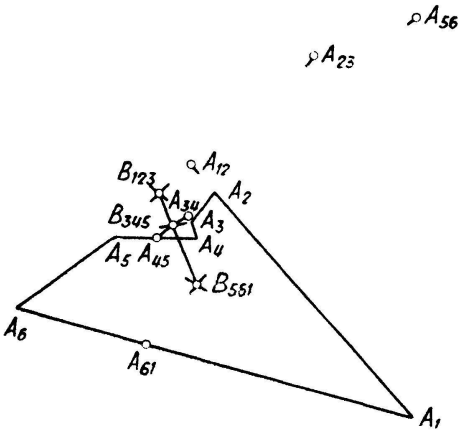


Figure 4

4° *Dans un octogone* $A_1, \ldots, A_8$, *les droites* $B(1, 2, 3) - B(3, 4, 5)$, $B(5, 6, 7) - B(7, 8, 1)$ et $A_1 - A_5$ *se coupent en un point* (Figure 5), de même que les droites

$$B(2, 3, 4) - B(4, 5, 6), \quad B(6, 7, 8) - B(8, 1, 2) \quad \text{et} \quad A_2A_6,$$

$$B(3, 4, 5) - B(5, 6, 7), \quad B(7, 8, 1) - B(1, 2, 3) \quad \text{et} \quad A_3A_7,$$

$$B(4, 5, 6) - B(6, 7, 8), \quad B(8, 1, 2) - B(2, 3, 4) \quad \text{et} \quad A_4A_8.$$

5° *Dans un ennéagone* $A_1, \ldots, A_9$, la droite $B(1, 2, 3) - B(3, 4, 5)$ coupe A_1A_5 en X_{15}, la droite $B(5, 6, 7) - B(7, 8, 9)$ coupe A_5A_9 en Y_{59}. *Les point* X_{15}, Y_{59} *et* $A_{1,9}$ *sont sur une droite*, de même pour toute permutation cyclique (Figure 6).

(Toutes ces propriétés peuvent évidemment s'énoncer directement dans la configuration de DESARGUES).

Si, tenant compte de ces propriétés d'incidence, on applique plusieurs fois le théorème de MÉNÉLAOS aux triangles adéquats, on trouve sans peine la propriété générale suivante:

6° *Pour tout pentagone* $(A_1, \ldots, A_5)$ *compris dans la configuration* C_2, *on a la relation*

$$\overline{A_1A_{12}}\,\overline{A_2A_{23}}\ldots\overline{A_5A_{51}} = -\overline{A_{12}A_2}\,\overline{A_{23}A_3}\ldots\overline{A_{51}A_1}.$$

7° *Pour tout polygone* $(A_1, \ldots, A_k, A_{k+1} = A_1)$ *compris dans la configuration* C_2, *on a la relation*

$$\overline{A_1A_{1,2}}\,\overline{A_2A_{2,3}}\ldots\overline{A_kA_{k,1}} = (-1)^k\,\overline{A_{1,2}A_2}\,\overline{A_{2,3}A_3}\ldots\overline{A_{k,1}A_1}.$$

Pour simplifier les explications, représentons la configuration C_2 par le schéma suivant: Les droites $1, \ldots, 9, 0$ forment deux pentagones $(1, \ldots, 5)$ et $(6, \ldots, 0)$ dont les

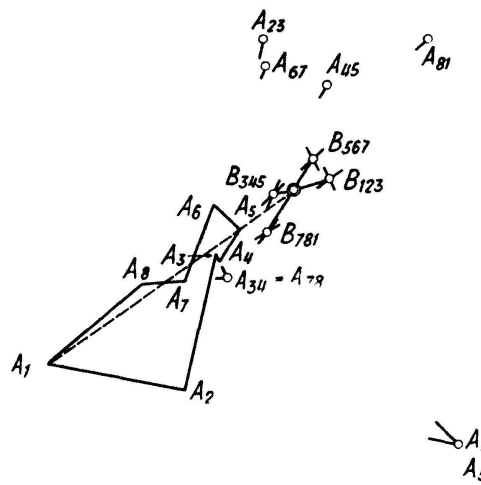


Figure 5

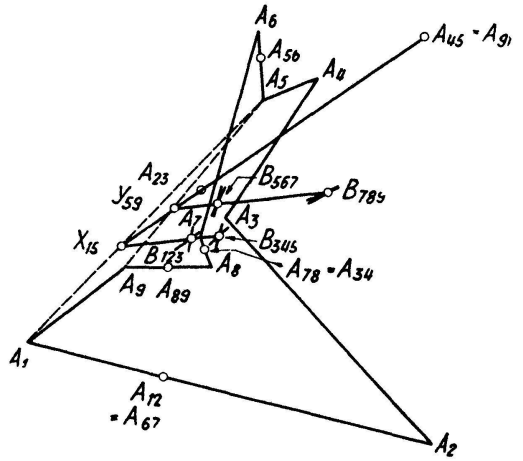


Figure 6

10 sommets $12, \ldots, 45, 67, \ldots, 90$ font partie de C_2, les cinq derniers points étant 10, 28, 36, 49, 57. C_2 contient 12 pentagones:

$$P_0(12345).\ P_{123}(12360),\ P_{234}(23498),\ P_{345}(34576),\ P_{451}(45109),\ P_{512}(51287),$$

$$P_{12}(12890),\ P_{23}(23678),\ P_{34}(34906),\ P_{45}(45789),\ P_{51}(51067),\ P_1(67890).$$

Il est possible d'orienter la configuration de façon que les pentagones deviennent des cycles. On a alors des relations simples:

$$P_0 = P_{123} + P_{345} + P_{51} = P_{234} + P_{451} + P_{12} = \cdots,$$

$$P_1 = P_{12} + P_{23} - P_{123} = P_{23} + P_{34} - P_{234} = \cdots,$$

$$P_1 = 2\,P_0 - (P_{123} + P_{234} + P_{345} + P_{451} + P_{512}).$$

On peut donc considérer les 6 cycles $P_0, P_{123}, \ldots, P_{512}$ comme cycles de base.

8° *Tout cycle polygonal est une combinaison linéaire de ces cycles.*

Désignons par f la fonction

$$\frac{\overline{A_1A_{12}}}{\overline{A_{12}A_2}}\cdots\frac{\overline{A_kA_{k,1}}}{\overline{A_{k,1}A_1}}.$$

9° *Si les cycles* P_1, P_2, P_3 *de fonctions* f_1, f_2, f_3 *sont tels que* $P_1 = P_2 + P_3$, *alors* $f_1 = f_2 f_3$.

Désignons enfin par $\{2\}, \ldots, \{9\}$ les propriétés 2 ... 9.

$$\{2\} \to \{6\}; \quad \{6\} + \{8\} + \{9\} \to \{7\} \to \{3\}, \{4\}, \{5\}.$$

Il suffit donc de démontrer la propriété $\{2\}$ pour que, grâce aux propriétés $\{8\}$ et $\{9\}$, toutes les autres soient valables. Comme la démonstration analytique de $\{2\}$ est simple, mais assez longue, nous ne l'imposerons pas au lecteur, les propriétés et leur enchaînement nous semblant seuls présenter quelque intérêt.

Soit tP_{ij} un polynome (orienté) semblable à P_{ij} dans le rapport linéaire t (orientation opposée pour t négatif). Désignons par $(u\,v\,w)$ le segment (orienté) $(u\,v) - (v\,w)$ coupé sur la droite v par les droites u et w.

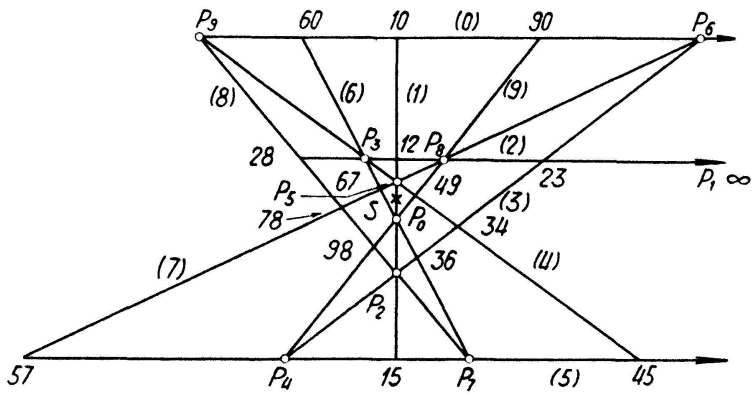


Figure 7

10° *Il existe un et un seul système de nombres* $a_1, \ldots, a_5$ *tels que les côtés des polygones* $a_1 P_{12}$, $a_2 P_{23}$, $a_3 P_{34}$, $a_4 P_{45}$, $a_5 P_{51}$, P_1, *parallèles à chacune des dix droites de la configuration, aient une somme algébrique nulle* (Figures 7 et 8).

Ceci revient à montrer que les 10 relations suivantes ont une et une seule solution:

1. $(012)\, a_1 + (510)\, a_5 = 0$,
2. $(128)\, a_1 + (823)\, a_2 = 0$,
3. $(236)\, a_2 + (634)\, a_3 = 0$,
4. $(349)\, a_3 + (945)\, a_4 = 0$,
5. $(457)\, a_4 + (751)\, a_5 = 0$,
6. $(067) + (367)\, a_2 + (063)\, a_3 + (067)\, a_5 = 0$,
7. $(678) + (678)\, a_2 + (578)\, a_4 + (675)\, a_5 = 0$,
8. $(789) + (289)\, a_1 + (782)\, a_2 + (789)\, a_4 = 0$,
9. $(890) + (890)\, a_1 + (490)\, a_3 + (894)\, a_4 = 0$,
10. $(906) + (901)\, a_1 + (906)\, a_3 + (601)\, a_5 = 0$.

Or on vérifiera que les déterminants des relations 1—5 et des relations

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot t \ (t = 7 - 10)$$

s'annulent à cause de la propriété (6). La solution (unique) des relations 1—4.6 donnera la solution cherchée.

La propriété subsistera pour 6 polygones qui s'expriment régulièrement en fonction des six polygones de base P_1, P_{ij}. On aura donc l'énoncé suivant:

Etant donnés six polygones généraux quelconques d'une configuration complémentaire de DESARGUES, *on peut trouver d'une et d'une seule façon (à l'échelle près) six polygones convenablement orientés et semblables aux polygones donnés, tels que tous les côtés parallèles aient une somme nulle.*

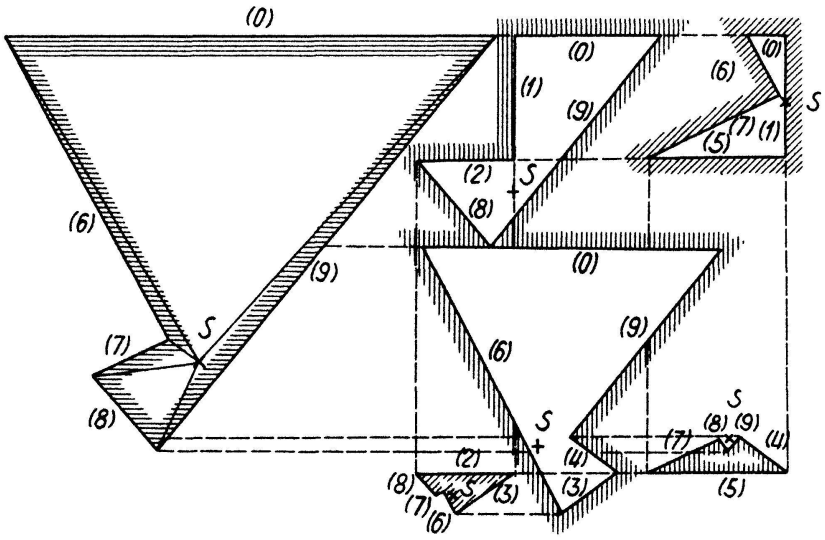


Figure 8

Si l'on représente chacun des polygones d'une configuration complémentaire de DESARGUES par un vecteur lié à l'origine d'un espace à dix dimensions, la composante t étant la longueur du côté parallèle à la t^e droite de la configuration, on a:

11° *Les vecteurs qui représentent les polygones d'une configuration complémentaire de* DESARGUES *sont tous dans un espace à cinq dimensions.*

En effet, la propriété précédente peut alors s'écrire: $-\vec{p_1} = \sum_{i=1}^{5} a_i \overrightarrow{p_{i,\,i+1}}$; $\vec{p_1}$ est dans l'espace déterminé par les vecteurs $\overrightarrow{p_{i,\,i+1}}$; enfin tout polygone s'exprime en fonction de $\vec{p_1}$ et $\overrightarrow{p_{ij}}$, ce qui démontre cette propriété.

La propriété plane 10 permet de déduire une propriété dans l'espace qui présente quelque intérêt.

Menons par un point quelconque S dix plans 0, 1, ..., 9 tels que: 1 soit orthogonal à 2; 2 à 3; 3 à 4; 4 à 5; 5 à 1; menons 0 perpendiculaire à 1; 6 perpendiculaire à 0 et 3; 7 à 6 et 5, 8 à 7 et 2; 9 à 8 et 4. Quel que soit 6, 9 est aussi perpendiculaire à 0. En effet, les normales menées par S coupent un plan π quelconque selon une configuration de DESARGUES: P_0, P_1, ..., P_9. Les traces des 10 plans et les traces des arêtes portant un dièdre droit forment dans ce plan π une configuration complémentaire de DESARGUES (Figure 7), configuration particulière qui est aussi antipolaire de la configuration de base par rapport à la projection de S. Choisissons six pentagones quel-

conques, par exemple (67890), (67823), (78945), (89012), (90634), (06751), et déterminons les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_5$ définis en 10 (Figure 8). Si $P(i\,j\,k\,l\,m)$ désigne le polyèdre de sommet S, de base π, formé par les plans i, j, k, l, m, le polyèdre

$$P \sim a_0 P(67890) + a_1 P(67823) + a_2 P(78945) + a_3 P(89012) + a_4 P(90634) + a_5 P(06751)$$

jouit de propriétés remarquables au point de vue de l'équivalence des polyèdres. Les dièdres d'arêtes obliques sont tous droits. Les arêtes horizontales ont une longueur algébrique nulle, c'est-à-dire que la longueur des arêtes qui portent un dièdre α est égale à la longueur des arêtes qui portent un dièdre $\pi - \alpha$. Ce polyèdre vérifie ainsi les conditions de DEHN pour l'équivalence de façon presque triviale. Nous pouvons montrer d'autre part que tout polyèdre qui vérifie ces conditions est réductible à un polyèdre n'ayant que des dièdres droits et des sommets d'où ne partent que 5 arêtes au plus. Le polyèdre P est l'exemple le plus simple d'un polyèdre vérifiant les conditions de DEHN et présentant les caractères les plus généraux qu'il faille considérer. A cause de la liberté du choix des plans 5,2 et 0, il vérifie même toutes les conditions nécessaires et suffisantes qui nous soient connues. Par contre, nous ne savons pas si P est effectivement équivalent à un cube. Ce polyèdre résume donc en quelque sorte l'état actuel de la recherche de l'équivalence des polyèdres. Si l'on peut montrer qu'il est équivalent à un cube, on trouvera peut-être la démonstration du cas général. S'il ne l'est pas, on établira de nouvelles conditions nécessaires qui seront probablement aussi suffisantes. Tel est le problème. J.-P. SYDLER, Zurich.

Über die Evolutoiden der Ellipse

Verdreht man in der Ebene sämtliche Tangenten einer gegebenen Kurve k um ihre Berührungspunkte um den gleichen Winkel α, so erhält man im Hüllgebilde der Neulagen für $\alpha = \pi/2$ die *Evolute*, für $\alpha \neq \pi/2$ eine «*Evolutoide*» von k. Für die durch kontinuierliches Anwachsen des Drehwinkels α von 0 bis π über die Evolutoiden als Zwischenstadien bewirkte Umorientierung einer Kurve k hat L. LOCHER-ERNST kürzlich das Beispiel der *Ellipse* herangezogen[1]). Deren am angeführten Ort durch hübsche Figuren wiedergegebene Evolutoiden erwecken den Eindruck, *zwei schiefe Symmetrien* zu besitzen. Da es sich dabei keineswegs um eine einfache Folge der Symmetrieeigenschaften der Ausgangskurve handeln kann, soll diese Vermutung hier auf analytischem Wege nachgeprüft werden; es wird sich dabei auch ein bisher anscheinend nicht bemerkter Zusammenhang der Ellipsenevolutoiden mit einer sehr bekannten Kurvenfamilie ergeben.

Wir gehen von der üblichen Parameterdarstellung der Ellipse in kartesischen Normalkoordinaten aus:

$$x = a \cos \omega, \quad y = b \sin \omega. \tag{1}$$

[1]) L. LOCHER-ERNST, *Natürliche Umformung einer Kurve in ihre Evolute.* El. Math. *8*, 73–75 (1953).