

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1955)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie  
**Autor:** Sauer, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18072>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

El. Math.

Band X

Nr. 2

Seiten 25–48

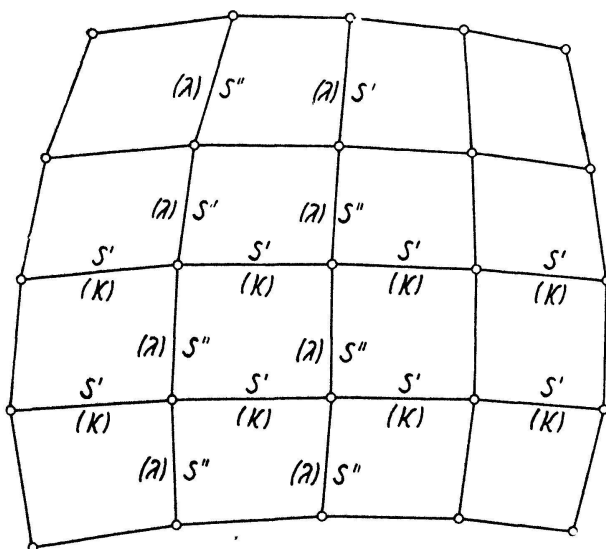
Basel, 10. März 1955

## Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie

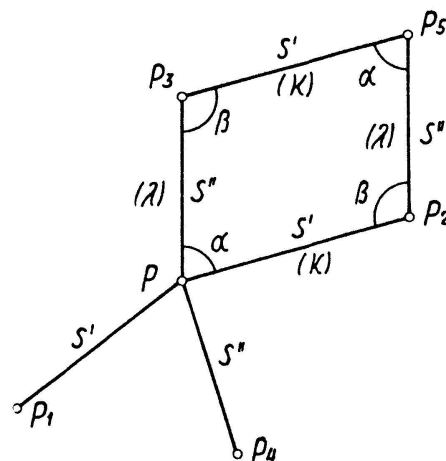
(Schluss)

### § 8. Flächen konstanten negativen Krümmungsmasses

8. 1. *Definition der ebeneckigen Tschebyscheff-Gitter*<sup>1)</sup>. Wir wenden uns nun zu speziellen ebeneckigen Gittern, nämlich zu solchen, bei denen die Leitpolygone der einen



Figur 13



Figur 14

Schar die konstante Seitenlänge  $s'$  und die Leitpolygone der anderen Schar die konstante Seitenlänge  $s''$  haben (Figur 13). Wir bezeichnen diese Gitter als Tschebyscheff-Gitter, da sie das differenzengeometrische Analogon der Tschebyscheffschen Kurvennetze  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  mit dem Linienelement

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega(u, v) du dv + dv^2$$

sind.

Die Vierecksmaschen sind «windschiefe Parallelogramme»; ihre Gegenseiten sind zwar nicht parallel, aber stets längengleich (Figur 14). Offenbar sind dann auch in

<sup>1)</sup> G. E. BENNETT, *Engineering* 76, 777–778 (1903), und *Proc. London Math. Soc.* 13, 151–173 (1914). – R. SAUER, *Math. Z.* 52, 611–622 (1950). – W. WUNDERLICH, *Math. Z.* 55, 13–22 (1951), und *Sitz.-Ber. Öster. Akad. Wiss., math.-naturw. Klasse, Abtlg. IIa*, 160, 39–77 (1951).

jeder Masche die einander gegenüberliegenden Viereckswinkel einander gleich:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta.$$

Neben den Viereckswinkeln  $\alpha, \beta$  führen wir noch die Windungswinkel ein, das heisst die Winkel aufeinanderfolgender Tangentenebenen des Gitters, zum Beispiel

$$\lambda_{PP_3} = \sphericalangle (P_3PP_2 | PP_3P_5).$$

Sie sollen positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem die Fortschrittingsrichtung (zum Beispiel  $PP_3$ ) mit der zugeordneten Drehung eine Rechts- oder Linksschraube bestimmt (Figur 14).

Aus der Gleichung

$$\frac{\sin \kappa}{s'} = - \frac{\sin \lambda}{s''} \quad (16)$$

ergibt sich, dass alle Leitpolygone mit der Seitenlänge  $s'$  den konstanten Windungswinkel  $\kappa$  und alle Leitpolygone mit der Seitenlänge  $s''$  den konstanten Windungswinkel  $\lambda$  besitzen. Da die Tangentenebenen des Gitters mit den Schmiegebenen der Leitpolygone zusammenfallen, sind die Windungswinkel zugleich die Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Schmiegebenen der Leitpolygone. Es liegt daher nahe, den Quotienten  $(\sin \kappa)/s'$  bzw.  $(\sin \lambda)/s''$  als Windung  $w$  der Leitpolygone zu bezeichnen. Wegen der Konstanz von  $\kappa, \lambda$  und  $s', s''$  gilt dann:

Die Leitpolygone der einen Schar haben konstante Seitenlänge  $s'$  und konstante Windung  $w'$ , die Leitpolygone der anderen Schar haben konstante Seitenlänge  $s''$  und konstante Windung  $w''$ .

Aus Gleichung (16) folgt ausserdem sofort

$$w' = -w'' = \text{const} = w, \quad (17)$$

das heisst: Die Leitpolygone der beiden Scharen haben entgegengesetzt gleiche Windungen.

8.2. *Sphärisches Bild der ebeneckigen Tschebyscheff-Gitter.* Die in Ziffer 6.2 erörterte sphärische Abbildung spezialisiert sich bei Tschebyscheff-Gittern folgendermassen: Die Windungswinkel  $\kappa, \lambda$  des Vierecksgitters sind gleich den Bogenlängen im sphärischen Bild; dieses ist also ein aus Grösstkreisbögen der Länge  $\kappa$  bzw.  $\lambda$  bestehendes Tschebyscheffsches Kurvennetz.

Ähnlich wie in Ziffer 1.2 definieren wir für jede Gittermasche des Tschebyscheff-Gitters ein Krümmungsmass  $K$  mit Hilfe des Flächeninhalts  $\Phi$  des sphärischen Vierecks, das sich als sphärisches Bild der Gittermasche ergibt. Wir definieren

$$K = - \frac{2 \sin \Phi / 2}{F}, \quad (18)$$

wobei  $2F$  die Oberfläche des durch die vier Eckpunkte der Gittermasche bestimmten Tetraeders ist. Eine elementare Rechnung liefert dann die Beziehung

$$K = \frac{w' w''}{\cos^2 \frac{\kappa}{2} \cos^2 \frac{\lambda}{2}} = - \frac{w^2}{\cos^2 \frac{\kappa}{2} \cos^2 \frac{\lambda}{2}} \quad (19)$$

zwischen dem Krümmungsmass der Gittermaschen und den Windungen der Leitpolygone. Aus der Konstanz von  $\kappa$ ,  $\lambda$  und  $w$  folgt dann: Ein ebeneckiges Tschebyscheff-Gitter hat für alle Gittermaschen konstantes, und zwar negatives Krümmungsmass.

8. 3. *Parallel-reziproke Zuordnung der ebeneckigen Tschebyscheff-Gitter und der ebenmaschigen scheitelwinkelgleichen Vierecksgitter.* Die in Ziffer 7. 1 eingeführte parallel-reziproke Zuordnung spezialisiert sich jetzt folgendermassen: Die zu einem ebeneckigen Tschebyscheff-Gitter parallel-reziproken Gitter sind ebenmaschige scheitelwinkelgleiche Vierecksgitter im Sinne von Ziffer 5. 1. Den nichtebenen Vierecksmaschen des Tschebyscheff-Gitters mit den gleichen Gegenwinkeln  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  (vgl. Figur 14) entsprechen nämlich im parallel-reziproken ebenmaschigen Gitter die nicht ebenen Vierkante mit den gleichen Scheitelwinkeln  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  (vgl. Figur 9). Die Windungswinkel  $\kappa$ ,  $\lambda$  der Tschebyscheff-Gitter treten im parallel-reziproken Gitter als Keilwinkel benachbarter ebener Vierecksmaschen auf.

Wir denken uns nun ein ebeneckiges Tschebyscheff-Gitter vorgegeben und wählen aus der Menge der zugeordneten parallel-reziproken ebenmaschigen scheitelwinkelgleichen Gitter ein bestimmtes Exemplar aus. Hierauf verknicken wir dieses Exemplar im Sinne von Ziffer 5. 2 und konstruieren zu jeder Verknickungsform das parallel-reziprok zugeordnete ebeneckige Tschebyscheff-Gitter. Auf diese Weise ergibt sich eine einparametrische Menge ebeneckiger Tschebyscheff-Gitter, welche alle dieselben Viereckswinkel  $\alpha$ ,  $\beta$  besitzen, während die Seiten  $s'$ ,  $s''$  und die Windungswinkel  $\kappa$ ,  $\lambda$  andere Werte  $s'^*$ ,  $s''^*$ ,  $\kappa^*$ ,  $\lambda^*$  angenommen haben. Durch passende ähnliche Vergrösserung oder Verkleinerung können wir stets erreichen, dass die Windungen  $w$ ,  $w'$  der Leitpolygone denselben konstanten Wert behalten. Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \kappa^*}{s'^*} &= \frac{\sin \kappa}{s'} = w = \text{const}, \\ \frac{\sin \lambda^*}{s''^*} &= \frac{\sin \lambda}{s''} = -w = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Aus den Gleichungen (11) ergibt sich ausserdem nach elementarer Rechnung für die Seitenlängen der Leitpolygone

$$\left. \begin{aligned} s'^* &= \varrho s' \frac{1}{\cos^2 \frac{\kappa}{2} + \varrho^2 \sin^2 \frac{\kappa}{2}}, \\ s''^* &= \frac{1}{\varrho} s'' \frac{1}{\cos^2 \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\varrho^2} \sin^2 \frac{\lambda}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

und schliesslich für das Krümmungsmass der Gittermasche

$$K^* = K \left( \cos^2 \frac{\kappa}{2} + \varrho^2 \sin^2 \frac{\kappa}{2} \right) \left( \cos^2 \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\varrho^2} \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right). \quad (22)$$

8. 4. *Grenzübergang zur Differentialgeometrie.* Beim Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehen die Windungen der Leitpolygone in die Windungen der Asymptotenlinien über, das Krümmungsmass der Gittermaschen konvergiert gegen das Krümmungsmass der Fläche.



Infolgedessen sind die ebeneckigen Tschebyscheffschen Vierecksgitter das differenzengeometrische Analogon der Flächen konstanten negativen Krümmungsmasses. Im einzelnen entsprechen die in den Ziffern 8. 1 bis 8. 3 entwickelten elementargeometrischen Beziehungen den folgenden bekannten differentialgeometrischen Sätzen:

- a) Satz von ENNEPER: Die Asymptotenlinien einer Fläche konstanten negativen Krümmungsmasses haben konstante und in beiden Scharen entgegengesetzt gleiche Windungen  $\pm w$ ; das Produkt  $-w^2$  ist gleich dem Krümmungsmass der Fläche [vgl. die Gleichungen (17) und (19) mit  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ ].
- b) Die Asymptotenlinien einer Fläche konstanten negativen Krümmungsmasses und ebenso ihr sphärisches Bild erzeugen ein Tschebyscheffsches Netz ( $s', s'' = \text{const}$  in Ziffer 8. 1 und  $\kappa, \lambda = \text{const}$  in Ziffer 8. 2).
- c) Das Asymptotenliniennetz einer Fläche konstanten negativen Krümmungsmasses ist parallel-reziprok zu konjugierten geodätischen Kurvennetzen auf Voßschen Flächen (vgl. Ziffer 8. 3).
- d) Die Verbiegungen der Voßschen Fläche (vgl. die Ziffern 5. 2 und 5. 3), bei denen ein geodätisches Kurvennetz konjugiert bleibt, liefern bei der parallel-reziproken Zuordnung die sogenannten Lieschen Transformationen der Asymptotenliniennetze auf Flächen konstanten negativen Krümmungsmasses: Die Windungen der Asymptotenlinien, das Krümmungsmass der Fläche und die Winkel, unter denen sich die Asymptotenlinien schneiden, bleiben erhalten; die Bogenlängen auf den Asymptotenlinien der einen Schar werden im Verhältnis  $1:\varrho$ , auf der anderen Schar im Verhältnis  $1:1/\varrho$  verzerrt [vgl. die Gleichungen (20), (21), (22) mit  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $\lambda \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ ].

## § 9. Streifenmodelle für Dreh- und Schraubenflächen

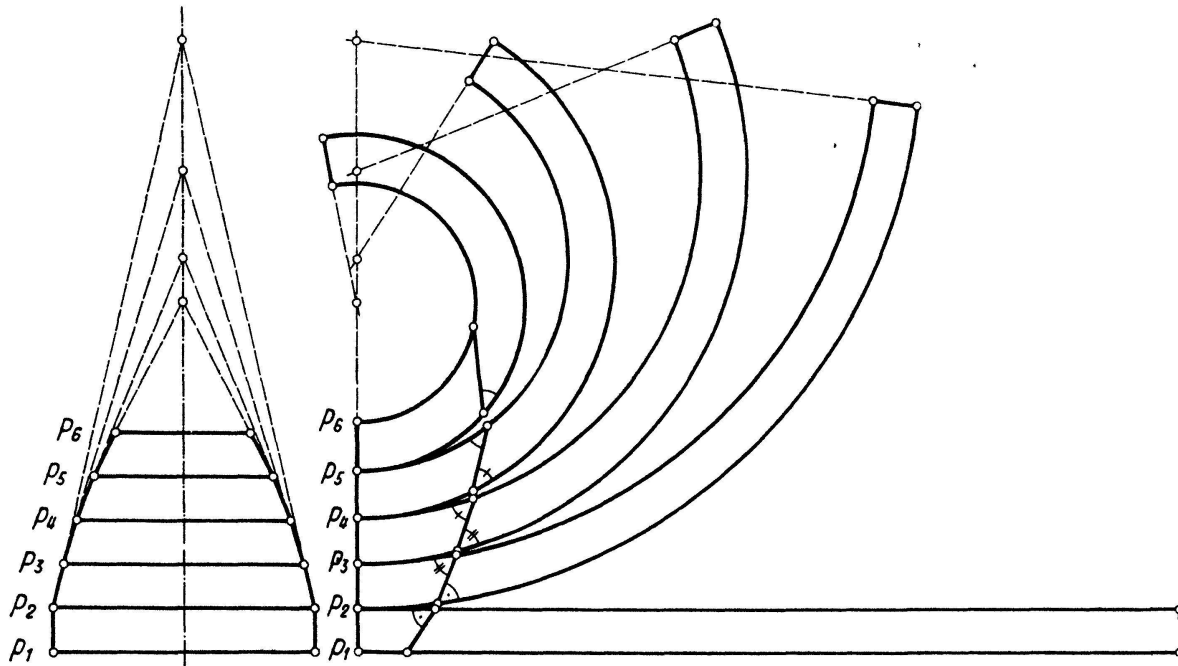
9. 1. *Definition der Streifenmodelle von Drehflächen.* Durch Drehung eines ebenen Polygons um eine in seiner Ebene liegende Gerade entsteht eine aus Kegelzonen – die auch in Zylinderzonen entarten können – zusammengesetzte Drehfläche (Figur 15a). Wir bezeichnen sie als Streifenmodell<sup>1)</sup>, da die ebene Abwicklung (Figur 15b) der Kegelzonen eine Folge ebener und zwar kreisringförmiger Streifen liefert. Aus Platzgründen ist in Figur 15b nur die vordere Hälfte des Streifenmodells abgewickelt. Bei einem Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$ , der das Polygonprofil des Streifenmodells in eine ebene Kurve überführt, konvergiert das Streifenmodell gegen eine Drehfläche mit der eben genannten Kurve als Profilkurve. Wenn diese Drehfläche positives Krümmungsmass hat, bilden die Streifen in der ebenen Abwicklung (von einem hinreichend kleinen  $\varepsilon$  an) Spalte, bei negativem Krümmungsmass überdecken sie sich; die ebene Abwicklung der Streifen steht also mit dem Krümmungsmass der Fläche in ähnlichem Zusammenhang wie die ebene Abwicklung der Sechskante eines Dreiecksgitters in Ziffer 1. 2.

9. 2. *Verbiegung von Drehflächen auf Schraubenflächen.* In Figur 16a und b sind Grund- und Aufriss einer Kegelzone samt dem als ebene Abwicklung sich ergebenden Kreisringstreifen ABCD dargestellt. Derselbe Kreisring lässt sich auf jeden beliebigen Drehkegel aufbiegen, wobei die Kreisränder und die Radienvektoren des Streifens

<sup>1)</sup> R. SAUER, Math. Z., 48, 455–466 (1942).

jeweils in Breitenkreise und Mantellinien des Kegels übergehen. Bei Verkleinerung des Kegelöffnungswinkels überdeckt der aufgewickelte Kreisring einen Teil des Kegels mehrfach, bei Vergrößerung des Öffnungswinkels überdeckt er nur einen Teil einer Kegelzone.

Ausserdem lässt sich derselbe Kreisring auf jede beliebige Schraubenböschungsfäche (= Tangentenfläche einer Schraubenlinie  $s$ ) aufbiegen (Figur 16 *b* und *c*): Der Schraubenlinie  $s$  («Gratlinie») entspricht in der ebenen Abwicklung der zu den Streifenrändern konzentrische Kreis  $k$ , der dieselbe Krümmung wie die Gratlinie  $s$  hat; die Tangenten von  $k$  kommen beim Aufbiegen auf die Schraubenfläche mit den Tan-

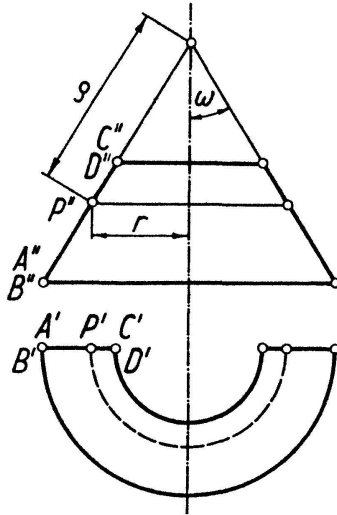
Figur 15 *a*Figur 15 *b*

genten der Gratlinie  $s$  zur Deckung, die Kreisränder mit Schraubenlinien der Schraubenfläche.

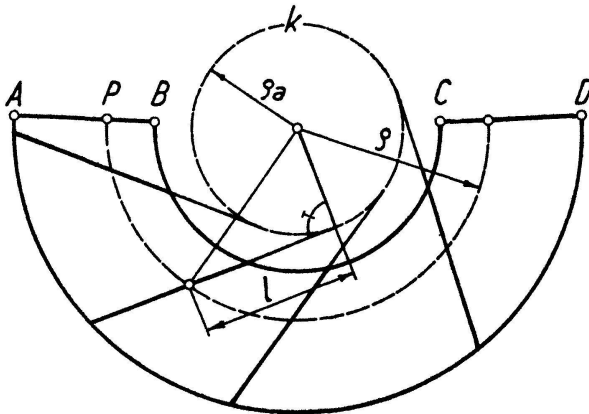
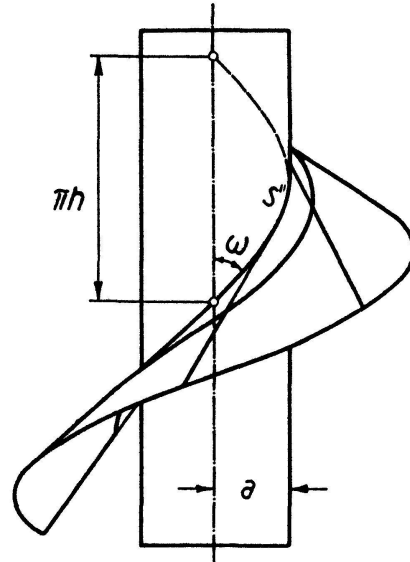
Das in Figur 15 *b* durch die ebene Abwicklung gegebene Streifenmodell lässt sich nach dem Vorangehenden auf eine einparametrische Menge von Drehflächen, die aus Kegelzonen zusammengesetzt sind, aufbiegen. Es lässt sich ausserdem aufbiegen auf eine zweiparametrische Menge von Schraubenflächen, die aus Zonen von Schraubenböschungsfächen bestehen. In jedem der beiden Fälle kann für den ersten Streifen der Kegel, auf den er aufgebogen werden soll (1 Parameter = Kegelöffnungswinkel  $\omega$ ), bzw. die Schraubenböschungsfäche (2 Parameter = Ganghöhe  $2\pi h$  und Radius  $a$  der Gratlinie  $s$ ) willkürlich vorgeschrieben werden; die Verbiegung der übrigen Streifen ist hierdurch festgelegt. Grenzlagen der Verbiegungen ergeben sich in ähnlicher Weise wie in Ziffer 4. 3.

Beim Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehen die hier behandelten Verbiegungen der Streifenmodelle in die einparametrische Gruppe der Verbiegungen einer Drehfläche in Drehflächen (vgl. Ziffer 4. 4, Fall *c*) und in die zweiparametrische Gruppe der Verbiegungen einer Drehfläche in Schraubenflächen (Boursches Theorem der Differentialgeometrie) über.

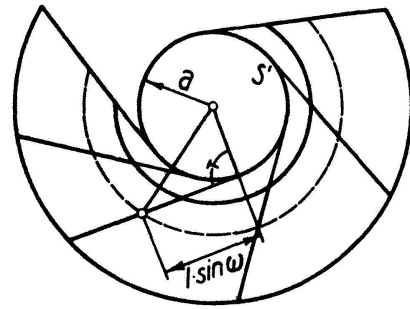
9. 3. *Geodätische Linien auf Dreh- und Schraubenflächen.* Die geodätischen Linien eines Streifenmodells sind in der ebenen Abwicklung in jedem Kreisringstreifen geradlinig und setzen sich beim Übergang von einem Streifen zum anderen unter gleichen Scheitelwinkeln fort; vgl. die in Figur 15b eingezeichnete Streckenfolge.



Figur 16a



Figur 16b



Figur 16c

Für eine geodätische Linie besteht hiernach innerhalb eines jeden Streifens nach Figur 17 die Beziehung

$$\rho \cos \alpha = p = \text{const} \quad (23)$$

( $\alpha$  = Winkel der geodätischen Linie gegen die Kreise vom Radius  $\rho$ ). Es bleibt jetzt noch festzustellen, wie sich die Konstante  $p$  von Streifen zu Streifen ändert:

Bei Aufbiegung der Streifen auf eine Drehfläche ( $\omega$  = Öffnungswinkel der Kegeln) folgt aus Figur 16a sofort

$$\sin \omega = \frac{r}{\rho}, \quad (24)$$

also mit Rücksicht auf Gleichung (23)

$$r \cos \alpha = p \sin \omega = \text{const}. \quad (25)$$

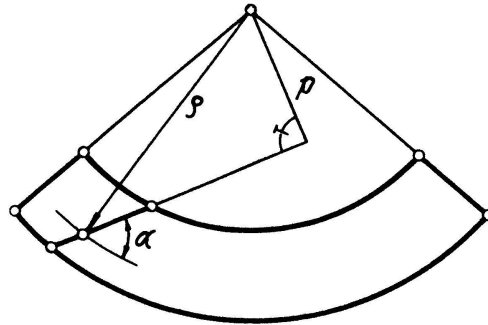
Da  $p$  und  $\omega$  innerhalb eines jeden Streifens konstant sind und beim Übergang von

einem Streifen zum anderen sowohl  $r$  als auch – wegen der Scheitelwinkelgleichheit – der Winkel  $\alpha$  sich stetig ändern, ist die linke Seite der Gleichung (25) längs der geodätischen Linie auf der gesamten Streifendrehfläche konstant.

Bei Aufbiegung der Streifen auf eine Schraubenfläche ( $2\pi h$  = Ganghöhe der Schraubenfläche;  $\omega$  = Steigungswinkel,  $a$  = Radius,  $1/\rho$  = Krümmung der Gratlinien  $s$  der einzelnen Schraubenstreifen) ergeben sich die Beziehungen (vgl. Figur 16b und c)

$$\left. \begin{aligned} h &= a \operatorname{ctg} \omega, & \rho_a &= \frac{a^2 + h^2}{a} = \frac{2h}{\sin 2\omega}, \\ r^2 &= a^2 + l^2 \sin^2 \omega, & \rho^2 &= \rho_a^2 + l^2 = \frac{4h^2}{\sin^2 2\omega} + l^2; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$l$  ist die auf den Mantellinien der Schraubenstreifen (= Tangenten der Gratlinien  $s$ )



Figur 17

gemessene Länge. Durch Elimination von  $l$  und Einsetzen in Gleichung (24) folgt nach kurzer Rechnung

$$\sqrt{r^2 + h^2} \cos \alpha = \rho \sin \omega = \text{const}, \quad (27)$$

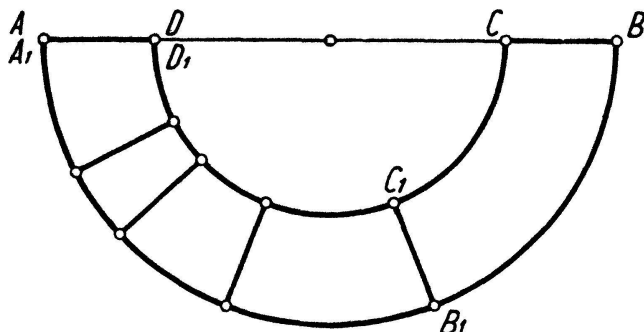
wobei die Konstante auf der rechten Seite wieder für die gesamte Streifenschraubenfläche gilt.

Beim Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehen die geodätischen Linien der Streifenmodelle in die geodätischen Linien beliebiger Dreh- und Schraubenflächen über. Die Gleichungen (25) und (27) bleiben beim Grenzübergang erhalten und drücken den bekannten Clairautschen Satz der Differentialgeometrie für die geodätischen Linien auf Dreh- und Schraubenflächen aus.

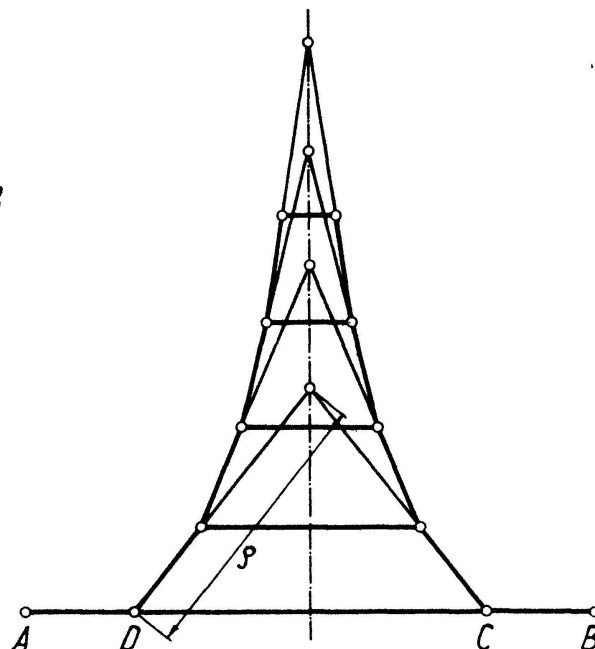
**9.4. Streifenmodell der Pseudosphäre.** Ein besonders bemerkenswertes Streifenmodell ergibt sich, wenn in der ebenen Abwicklung alle Streifen aus demselben Kreisring ausgeschnitten sind (Figur 18a). Die Streifen lassen sich dann in der ebenen Abwicklung übereinanderlegen. Jeder folgende Streifen ist kürzer als der vorangehende, da sein äusserer Rand mit dem inneren Rand des vorangehenden zur Deckung gebracht werden muss; so ist beispielsweise die Bogenlänge  $A_1B_1$  des zweiten Streifens  $A_1B_1C_1D_1$  gleich der Bogenlänge  $DC$  des ersten Streifens  $ABCD$ .

Beim Aufbiegen ergeben sich Drehflächen mit Kegelzonen, welche sämtlich dieselbe Mantellinienlänge  $\rho$  haben (Figur 18b). Der Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  liefert daher Pseudosphären, das heisst Drehflächen mit einer Traktrix als Profilkurve.

Wegen der Kongruenz der Streifen kann man jeden Streifen auf jede Kegelzone des Modells aufbiegen. Beim Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt hieraus, dass eine Pseudosphäre so in sich verbogen werden kann, dass die Breitenkreise wieder in Breitenkreise übergehen; alle Punkte der Pseudosphäre sind daher bezüglich der Metrik auf der Fläche



Figur 18 a



Figur 18 b

miteinander gleichwertig, die Pseudosphäre hat also konstantes (und zwar negatives) Krümmungsmass.

Die entsprechenden Schrauben-Streifenmodelle liefern beim Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  Schraubenflächen konstanten negativen Krümmungsmasses. R. SAUER, München.

## Quelques propriétés de la configuration complémentaire de Desargues

Soit  $C_1$  une configuration de DESARGUES  $(10_3, 10_3)$  formée par les 10 points  $12, \dots, 45$  et par les 10 droites  $123, \dots, 345$ , les points  $i, j, k$  étant sur la droite  $ijk$  (Figure 1). Cette configuration engendre une configuration  $C_2$   $(15_2, 10_3)$  déterminée par les mêmes 10 droites  $123, \dots, 345$  et par les 15 points d'intersection qui ne font pas partie de la configuration  $C_1$  (Figure 2). Tout point est sur deux droites, toute droite contient trois points. Cette configuration  $C_2$  jouit de propriétés dont les suivantes, à notre connaissance, sont encore inédites.

1°  $C_2$  contient seulement des polygones à 5, 6, 8 et 9 côtés. Désignons par  $A_1, \dots, A_k, A_{k+1} = A_1$  un de ces polygones.

Soit  $A_{i,j}$  le troisième point de la configuration situé sur  $A_i A_j$ . Soit encore  $B(i, i+1, i+2)$  le point d'intersection de  $(A_i, A_{i+2})$  et de  $(A_{i, i+1}, A_{i+1, i+2})$ .