Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 10 (1955)

Heft: 1

Artikel: Ein Problem über Wägen

Autor: Devidé, Vladimir

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-18071

Die Verknickungen der ebenmaschigen Vierecksgitter mit eben bleibenden Maschen führen beim Grenzprozess $\varepsilon \to 0$ auf die Flächenverbiegungen, bei denen ein gewisses Kurvennetz konjugiert bleibt.

Den Sätzen *a*), *b*) von Ziffer 7.2 stehen somit folgende analoge Sätze über die infinitesimale Flächenverbiegung gegenüber:

a) Die infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche negativen Krümmungsmasses haben als Drehrisse die zum Asymptotenliniennetz der gegebenen Fläche konjugierten Kurvennetze.

b) Es gibt entweder keine oder im allgemeinen genau eine infinitesimale Verbiegung, bei der ein konjugiertes Kurvennetz konjugiert bleibt; existiert eine solche Verbiegung, so existiert auch ein zu dem konjugierten Kurvennetz parallel-reziprokes Asymptotenliniennetz, und dieses ist der Drehriss der Verbiegung.

In enger Beziehung zur Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung und ihrer Darstellung durch mechanische Modelle stehen Untersuchungen von H. GRAF und H. THOMAS[1]) über Gleichgewichtsfragen gespannter Fäden. (Schluss folgt im nächsten Heft.) R. SAUER, München.

Ein Problem über Wägen

1. Ist uns ein Haufen von 3^n ($n \geqq 0$) Münzen vorgelegt, und wissen wir, dass er genau eine falsche Münze von *geringerem* Gewicht enthält, so ist es leicht, durch n-maliges Wägen die falsche Münze zu finden: Beim ersten Wägen setzen wir auf jede Waagschale je 3^{n-1} Münzen, und ebensoviel übriggebliebene lassen wir beiseite. Zeigt die Waage Gleichgewicht, so befindet sich offenbar die falsche Münze in der letztgenannten Gruppe. Sinkt die linke Waagschale, so befindet sie sich auf der rechten, und sinkt die rechte, so auf der linken. In jedem Falle ist dadurch die Aufgabe auf die analoge, aber mit $(n-1)$-maligem Wägen, zurückgeführt, da uns nach einer durchgeführten noch $n-1$ Wägungen zur Verfügung stehen, aber auch der die falsche Münze enthaltende Haufen jetzt nur noch 3^{n-1} Münzen enthält. Fahren wir so fort, so ist endlich durch das letzte (n-te) Wägen zu entscheiden, welche unter drei in Frage kommenden Münzen falsch ist, was durch das beschriebene Verfahren, Aufsetzen von je einer dieser Münzen auf jede Waagschale, sofort zu erledigen ist.

2. Wie wir sahen, war die in 1. gestellte Aufgabe sehr einfach zu lösen; die Lösung drängt sich eben fast von selbst auf. Die Sache wird aber anders, wenn in der Aufgabe folgende Abänderung eingeführt wird: von der falschen Münze wissen wir nicht mehr, ob sie zu leicht oder zu schwer ist, sondern nur, dass ihr Gewicht nicht das richtige ist. Die wesentliche dadurch hervorgerufene Komplikation liegt darin: Sinkt zum Beispiel bei einem Wägen die linke Waagschale, so wissen wir noch nicht, ob diese oder die rechte die falsche Münze enthält; die Münze könnte ja zu leicht sein und sich auf der rechten, oder zu schwer sein und sich auf der linken befinden. Natürlich wird

[1]) H. GRAF und H. THOMAS, Math. Z. *48*, 193–211 (1942), und *51*, 166–196 (1948), ferner H. THOMAS, Math. Z. *44*, 1–32 (1938), und *47*, 66–67 (1940). – Ausserdem vgl. J. RADON, Mitt. Math. Ges. Hamburg *8*, 147–151 (1940).

dadurch andererseits eine Verminderung der Anzahl der Münzen nötig; auf diese und weitere kleine Änderungen werden wir weiter unten näher eingehen. Zuerst soll aber das Problem – um das es sich in diesem Artikel auch eigentlich handelt – genau formuliert werden:

Nehmen wir $m = (3^n - 1)/2$ $(n \geqq 1)$ Münzen aus einem Haufen, der mehr als m Münzen enthält, unter denen sich eine von falschem Gewicht befindet. Durch n-maliges Wägen ist zu entscheiden, ob sich die falsche Münze unter den m herausgenommenen befindet, und wenn dem so ist, welche diese Münze ist, und ob sie zu schwer oder zu leicht ist. Ausser der Waage besitzen wir nur noch ein Gewicht G, das genau wie eine richtige Münze wiegt.

Bevor wir an die Lösung herantreten, raten wir dem Leser, den Spezialfall dieser Aufgabe für $n = 3$ zu erledigen, nämlich: Aus einem grösseren Münzenhaufen, der eine falsche Münze enthält, nehmen wir 13 Münzen heraus. Durch dreimaliges Wägen ist zu finden, ob die falsche unter den 13 herausgenommenen ist, und wenn dem so ist, welche diese Münze ist, und ob sie zu schwer oder zu leicht ist; dabei darf nur eine zweischalige Waage und die «Gewichtsmünze» G verwendet werden. Löst der Leser diese Aufgabe (gelingt ihm das nicht oder findet er keine Lust dazu, so benütze er das am Ende des Artikels gegebene Schema!), so wird er das Verfahren beim Lösen des allgemeinen Problems leichter durchschauen, und er wird bessere Einsicht gewinnen, was mit der Generalisation erreicht ist. Die speziell formulierte Aufgabe (für $n = 3$) dürfte nämlich vielleicht sogar mehr unmittelbaren Reiz haben als die allgemeine; aber erst bei der Lösung der letzteren bekommt man volle Einsicht in das Wesen des angewandten Verfahrens. Ferner, obzwar die spezielle Aufgabe im Prinzip streng finit lösbar ist – das heisst, die Lösung könnte per enumerationem der Möglichkeiten durch eine endliche (aber beträchtliche!) Anzahl von Versuchen durchprobiert werden –, so wird jedoch der Leser, wenn er sich entschliesst, diesen Weg einzuschlagen, sehr bald einsehen, dass praktisch systematisches Denken beim Lösen der Aufgabe nötig sein wird. Für das allgemeine Problem kann aber nicht behauptet werden, dass es durch Probieren auch nur im Prinzip lösbar wäre; hier ist die Notwendigkeit systematischer Erwägung evident.

Noch eine Bemerkung. Es ist die Aufgabe bekannt (ich verdanke Herrn KUREPA, dass er mich darauf aufmerksam machte), in der durch dreimaliges Wägen unter 12 Münzen die falsche herauszufinden ist, wenn bekannt ist, dass es genau eine solche darin gibt (die Gewichtsmünze G ist hier nicht notwendig). Zum Vergleich mit unserer Aufgabe und dem allgemeineren Problem, dessen Spezialfall sie ist, sei hier eine kurze Betrachtung eingeschaltet. Jedes Wägen kann 3 Resultate liefern: 1. die Waage zeigt Gleichgewicht, 2. die linke Waagschale steigt und die rechte sinkt, 3. die linke sinkt und die rechte steigt. Bei 3 Wägungen können also $3^3 = 27$ Kombinationen von 3 Waagschalenlagen eintreten. Jedem möglichen Fall vom falschen Gewicht einer Münze – und solcher gibt es 24, da irgendeine der 12 Münzen zu leicht oder zu schwer sein kann – muss wenigstens eine der oben genannten Kombinationen von 3 Waagschalenlagen entsprechen und umgekehrt, irgendeiner Lagenkombination höchstens einer jener Fälle. Der Lagenkombinationen gibt es aber – wie wir sahen – sogar 27 und nicht nur 24, was darauf hinweist, dass mit dieser Aufgabe über 12 Münzen die Angaben, die uns dreimaliges Wägen geben kann, nicht vollständig ausgenützt sind. Natürlich ist es nicht a priori evident, ob es überhaupt möglich ist, die Aufgabe so zu «komplizieren», dass die Ausnützung der Angaben, die uns dreimaliges Wägen geben kann, vollständig wäre: in dem Sinne nämlich, dass den 27 möglichen, von 3 sich beim Wägen nacheinander ergebenden Waagschalenlagen umkehrbar eindeutig 27 mögliche verschiedene Fälle über die Münzen zugeordnet wären. Dies ist nun doch der Fall beim oben erwähnten Spezialfall unseres Problems mit $n = 3$, da zu den bisherigen 24 Möglichkeiten mit der dreizehnten Münze zwei weitere, dass sie zu schwer oder zu leicht ist, hinzutreten, und endlich besteht die siebenundzwanzigste Möglichkeit darin, dass alle 13 Münzen richtig sind. Die Ausnützung der Angaben, die von unserem Problem verlangt werden kann, ist indessen auch im allgemeinen Fall vollständig: von m Münzen kann irgendeine zu leicht oder zu schwer sein, was $m + m = 2\,m$ Möglichkeiten liefert, wozu noch der Fall hinzukommt, dass alle richtig sind. Nun ist aber $2\,m + 1 = 3^n$, und ebenso viele Kombinationen gibt es bei n-maligem Wägen. Es sei auch bemerkt, dass sich die Generalisation von 3 auf n Wägungen erst bei der Aufgabe mit 13 Münzen natürlich aufdrängt, da bei der bekannten (mit 12 Münzen) nicht zu sehen ist, wieviel Münzen bei der Verallgemeinerung ins Spiel treten sollen.

Es wird natürlich eine effektive Konstruktionslösung des Problems verlangt, die uns instand setzen soll, das Problem für irgendein n auch praktisch zu lösen, und nicht nur etwa ein «Existenzbeweis» der Lösung.

3. Nun gehen wir endlich zur Lösung des gestellten Problems über.

Hilfssatz 1. Ist uns ein Haufen von 3^n $(n \geqq 0)$ Münzen vorgelegt, und wissen wir, dass er genau eine falsche Münze enthält, die ein geringeres Gewicht hat (oder wissen wir, dass er genau eine falsche Münze enthält, die ein grösseres Gewicht hat), so kann man durch n-maliges Wägen die falsche Münze herausfinden.

Der Beweis für den Fall einer zu leichten Münze wurde in 1. gegeben; auf dieselbe Weise erledigt man den Fall einer zu schweren Münze.

Hilfssatz 2. Sind uns zwei Haufen von Münzen vorgelegt, von denen der erste $(3^n - 1)/2$ $(n \geqq 0)$ Stücke enthält, unter denen sich vielleicht eine leichtere (schwerere) Münze befindet, und der zweite $(3^n + 1)/2$ Stücke enthält, unter denen sich vielleicht eine schwerere (leichtere) Münze befindet, und wissen wir ferner, dass genau eine unter allen diesen Münzen falsches Gewicht hat, so kann man – falls uns ausser den zwei genannten Haufen noch $2 \cdot 3^{n-1}$ richtige Münzen zur Verfügung stehen – durch n-maliges Wägen die falsche herausfinden.

Den Hilfssatz 2 beweisen wir durch vollständige Induktion.

Für $n = 0$ ist der Hilfssatz trivial. Es sei die Behauptung, die er ausspricht, für $n = k$ richtig. Ist $n = k + 1$, so zerlegen wir den ersten Haufen von $(3^{k+1} - 1)/2$ Münzen in die Gruppe A von $[(3^{k+1} - 1)/2 - 3^k] = (3^k - 1)/2$ und die Gruppe B von 3^k Münzen, und den zweiten Haufen von $(3^{k+1} + 1)/2$ Münzen zerlegen wir in die Gruppe C von $[(3^{k+1} + 1)/2 - 3^k] = (3^k + 1)/2$ und die Gruppe D von 3^k Münzen. Beim ersten Wägen setzen wir auf die linke Waagschale die Gruppen B und D, und auf die rechte setzen wir $2 \cdot 3^k$ richtige Münzen, über die wir nach der Voraussetzung des Hilfssatzes für $n = k + 1$ verfügen. Zeigt die Waage Gleichgewicht, so befindet sich die falsche Münze entweder in der Gruppe A oder in der Gruppe C, da in diesem Falle die Gruppen B und D gewiss nur richtige Münzen enthalten, und man kann sie durch die $(k + 1) - 1 = k$ noch zur Verfügung stehenden Wägungen nach der Induktionsvoraussetzung herausfinden. Steigt die linke Waagschale, so befindet sich die falsche

Münze in der Gruppe $B(D)$, und sinkt sie, so in $D(B)$. In jedem dieser Fälle ist das Herausfinden der falschen Münze durch die noch folgenden k Wägungen nach Hilfssatz 1 gesichert.

Jetzt können wir endlich das allgemeine Problem angreifen; die Lösung wird wieder mittels vollständiger Induktion durchgeführt.

Für $n = 1$ ist die Lösung trivial. Es sei nun das Problem für $n = k$ schon gelöst. Ist $n = k + 1$, so setzen wir – erstes Wägen – auf die linke Waagschale die Gruppe L von $(3^k - 1)/2$ Münzen und das Gewicht G, auf die rechte setzen wir die Gruppe R von $(3^k + 1)/2$ Münzen, und die Gruppe V von $(3^{k+1} - 1)/2 - (3^k - 1)/2 - (3^k + 1)/2 = (3^k - 1)/2$ übriggebliebenen Münzen lassen wir vorläufig beiseite.

Zeigt die Waage Gleichgewicht, so befindet sich die falsche Münze unter denen, die nicht gewogen wurden, also in der Gruppe V, und ist durch k noch zur Verfügung stehende Wägungen nach der Induktionsvoraussetzung herauszufinden, womit das Problem in diesem Falle gelöst ist.

Zeigt dagegen die Waage beim ersten Wägen nicht Gleichgewicht, so zerlegen wir die Gruppe L in $[(3^k - 1)/2 - 3^{k-1}] = (3^{k-1} - 1)/2$ Münzen der Gruppe A und 3^{k-1} Münzen der Gruppe B. Analog zerlegen wir die Gruppe R in $[(3^k + 1)/2 - 3^{k-1}] = (3^{k-1} + 1)/2$ Münzen der Gruppe C und 3^{k-1} Münzen der Gruppe D. Die Münzen der Gruppe V sind jetzt gewiss alle richtig. Das zweite Wägen führen wir nun so aus, dass wir auf die linke Waagschale die Gruppe A, das Gewicht G und 3^{k-1} richtige Münzen, aus V, und auf die rechte Waagschale die Gruppen B und C setzen. Für die Resultate beider Wägungen bestehen also 6 Möglichkeiten:

1. bis 3. Sinkt beim ersten Wägen die linke Waagschale, und beim zweiten:

1) sinkt sie auch, so enthält entweder A eine zu schwere, oder C eine zu leichte Münze; die nach dem ersten Wägen noch in Frage kommenden Gruppen B und D erweisen sich nach dem zweiten als richtig. Das Problem ist durch $(k + 1) - 2 = k - 1$ noch zur Verfügung stehenden Wägungen nach dem Hilfssatz 2 lösbar; die Gruppe V enthält die nötige Anzahl richtiger Münzen;

2) zeigt die Waage Gleichgewicht, so befindet sich in D eine zu leichte Münze, da A, B und C jetzt gewiss nur richtige enthalten. Das Problem ist durch die noch folgenden $k - 1$ Wägungen nach dem Hilfssatz 1 lösbar;

3) steigt die linke Waagschale, so enthält B eine zu schwere Münze, aus Gründen analog wie bei 2). Das Problem ist wieder nach dem Hilfssatz 1 lösbar.

4. bis 6. Analog, wenn beim ersten Wägen die linke Waagschale steigt, und beim zweiten:

4) sinkt, so enthält B eine zu leichte Münze, die nach Hilfssatz 1 zu finden ist;

5) zeigt die Waage Gleichgewicht, so enthält D eine zu schwere Münze, die wieder nach Hilfssatz 1 zu finden ist;

6) steigt die linke Waagschale, so enthält entweder A eine zu leichte oder C eine zu schwere Münze, und die Lösung liefert Hilfssatz 2.

Damit ist das Problem vollständig gelöst; aus den Beweisen sieht man auch, wie das Wägen effektiv durchzuführen ist.

4. Zum Schluss sei noch das Schema der Wägungen für den Fall $n = 3$ gegeben. Die 13 Münzen seien durch *1*, *2*, ..., *13* und die Gewichtsmünze durch G bezeichnet. Ergibt sich bei einem Wägen Gleichgewicht, so schreiben wir $L — R$; sinkt die linke Schale, so schreiben wir $L \diagup R$, und steigt sie, so $L \diagdown R$. Sind dann beim nächsten

Wägen die Münzen $a, b, \ldots$ auf die linke und die Münzen $c, d, \ldots$ auf die rechte Waagschale zu setzen, so schreiben wir $L(a, b, \ldots)$, $R(c, d, \ldots)$:

erstes Wägen:		zweites Wägen:		drittes Wägen:
$L(1, 2, 3, 4; G)$ $R(5, 6, 7, 8, 9)$	$L - R$	$L(10, G)$, $R(11, 12)$	$L - R$	$L(13)$, $R(G)$
			L / R	$L(1, G)$, $R(10, 11)$
			$L \setminus R$	$L(1, G)$, $R(10, 11)$
	L / R	$L(1; G, 10, 11, 12)$ $R(2, 3, 4; 5, 6)$	$L - R$	$L(7)$, $R(8)$
			L / R	$L(10, G)$, $R(1, 5)$
			$L \setminus R$	$L(2)$, $R(3)$
	$L \setminus R$	$L(1; G, 10, 11, 12)$ $R(2, 3, 4; 5, 6)$	$L - R$	$L(7)$, $R(8)$
			L / R	$L(2)$, $R(3)$
			$L \setminus R$	$L(10, G)$, $R(1, 5)$

Aus dem Resultate des dritten Wägens ist nun sofort die in der Aufgabe gestellte Frage über die falsche Münze zu beantworten. VLADIMIR DEVIDÉ, Zagreb.

Kleine Mitteilungen

Erinnerungen an die erste Internationale Mathematische Unterrichtskommission

Vor fünfzig Jahren war die Unterrichtskommission der Deutschen Naturforscher-Gesellschaft eingesetzt, die ein Jahr später die Meraner Vorschläge, im nächsten Jahr einige Ergänzungen dazu und im Jahr 1907 einen Bericht über die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten veröffentlichte. Vorsitzender der Unterrichtskommission war der Hallenser Mathematiker A. GUTZMER. Der führende Mathematiker in der Kommission aber war FELIX KLEIN; auf ihn gingen die leitenden Ideen der Meraner Vorschläge zurück; er hielt die Verbindung mit den Schulmännern und den Schulverwaltungen aufrecht. Ich kam in eine erste Fühlung mit den Reformbestrebungen als junger Referendar – wie man heute sagt. Während ich im zweiten Jahr meiner pädagogischen Ausbildung an einem Berliner Gymnasium eine Oberlehrerstelle zu verwalten hatte, kam ich anlässlich eines Vortrages über die Meraner Vorschläge in eine Verbindung mit FELIX KLEIN, den ich von meiner Göttinger Studienzeit her kannte. Ich beschäftigte mich mit der mathematischen Unterrichtsreform in Frankreich[1]) und studierte später die italienische Lehrbuchliteratur, wo mich insbesondere die Grundlagenfragen fesselten[2]). Da war es natürlich, dass ich Ostern 1908 an dem Internationalen

[1]) W. LIETZMANN, *Arithmetik und Algebra in den höheren Schulen Frankreichs*, ZmnU. (= Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht) *37*, 235, 302, 389 ff. (1906).

[2]) W. LIETZMANN, *Die Grundlagen der Geometrie im Unterricht* (*mit besonderer Berücksichtigung der Schulen Italiens*), ZmnU. *39*, 177 ff. (1908).