

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 10 (1955)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie  
**Autor:** Sauer, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-18070>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

à l'esprit large et bienveillant où l'extrême modestie s'alliait à la bonté. Vie belle et heureuse, vouée tout entière à la science, elle restera un noble exemple pour ses nombreux élèves qui lui garderont un souvenir ému et reconnaissant.

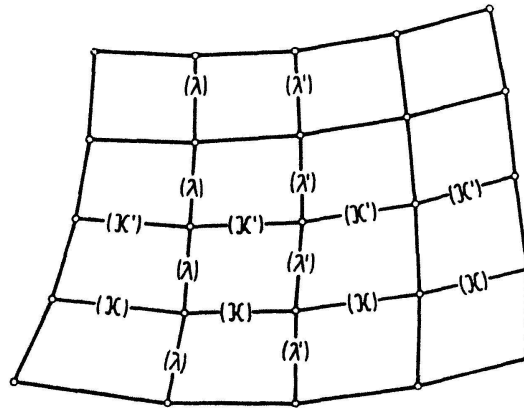
J. RUFFET, Genève.

## Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie

(Fortsetzung)

### § 5. Verbiegung der Voßschen Flächen

5.1. *Definition der scheidewinkelgleichen Vierecksgitter*<sup>1)</sup>. Einen weiteren bemerkenswerten Sonderfall der ebenmaschigen Vierecksgitter bilden die scheidewinkelgleichen



Figur 8

Gitter. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass in jedem inneren Gitterpunkt  $P$  (vgl. Figur 3a) die Scheitelwinkel gleich sind, das heisst, dass jeder innere Gitterpunkt Scheitel eines symmetrischen Vierkants ist mit

$$\alpha_1 = \alpha_3, \quad \alpha_2 = \alpha_4, \quad \kappa_1 = \kappa_2, \quad \lambda_1 = \lambda_2. \quad (9)$$

Offenbar sind dann die Keilwinkel  $\kappa$  und  $\lambda$  jeweils nicht nur an den Gegenseiten der Vierkante, sondern längs eines jeden Leitpolygons konstant (Figur 8).

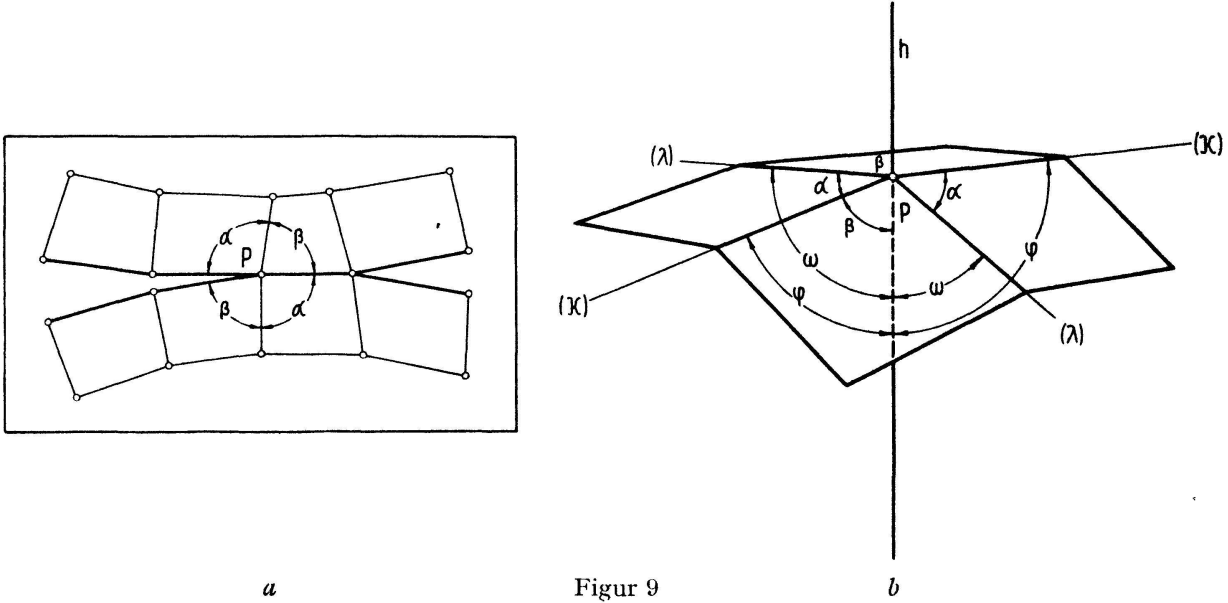
Aus der Scheitelwinkelgleichheit ergeben sich sogleich die folgenden weiteren Eigenschaften:

a) Breitet man, ähnlich wie in Ziffer 1. 3, die beiden Viereckstreifen, die einem nicht dem Rand angehörenden Leitpolygon rechts und links anliegen, in die Ebene aus, so geht das Leitpolygon in der ebenen Abwicklung in zwei zueinander symmetrische ebene Polygone über (Figur 9a). Nach der Definition durch Gleichung (5) haben daher die Leitpolygone in jedem inneren Gitterpunkt  $P$  die mittlere geodätische Krümmung  $g(P) = 0$ .

<sup>1)</sup> H. WIENER, Verh. Ges. Dtsch. Naturf. Ärzte, 75. Vers. Kassel, S. 29–30 (1903); R. SAUER und H. GRAF, Math. Ann. 105, 527–535 (1931).

b) In jedem inneren Gitterpunkt  $P$  haben die beiden sich dort schneidenden Leitpolygone eine gemeinsame Winkelhalbierende  $h$ , die wir Hauptnormale der Leitpolygone in  $P$  nennen wollen (Figur 9b).

5.2. *Verknickungen der scheinwinkelgleichen Vierecksgitter.* Ebenso wie die in § 4 behandelten Trapezgitter lassen auch die scheinwinkelgleichen Vierecksgitter



eine einparametrische Gruppe von Verknickungen zu. Diese Verknickungen ergeben sich folgendermassen:

Zwischen den Viereckswinkeln  $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha$  und  $\alpha_2 = \alpha_4 = \beta$  einerseits und den Keilwinkeln  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$  und  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  (Figur 9b) andererseits besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg} \frac{\kappa}{2} \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha + \sin \beta}. \quad (10)$$

Wenn man die Keilwinkel  $\kappa, \kappa', \kappa'', \dots$  und  $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$  durch  $\kappa^*, \kappa^{*'}, \kappa^{*''}, \dots$  und  $\lambda^*, \lambda^{*'}, \lambda^{*''}, \dots$  ersetzt, derart dass

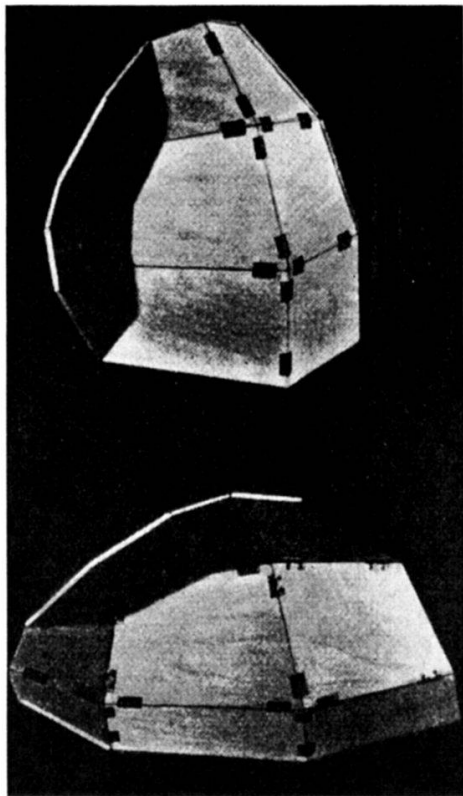
$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\kappa}{2} &= \varrho \operatorname{tg} \frac{\kappa^*}{2}, & \operatorname{tg} \frac{\kappa'}{2} &= \varrho \operatorname{tg} \frac{\kappa^{*'}}{2}, \dots \\ \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} &= \frac{1}{\varrho} \operatorname{tg} \frac{\lambda^*}{2}, & \operatorname{tg} \frac{\lambda'}{2} &= \frac{1}{\varrho} \operatorname{tg} \frac{\lambda^{*'}}{2}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(Parameter  $\varrho \neq 0$ )

gilt, und die sämtlichen Viereckswinkel  $\alpha, \beta$  beibehält, erfüllen die neuen Keilwinkel  $\kappa^*, \lambda^*$  und so fort wieder die Bedingung (10). Dadurch erhält man, wenn der Parameter  $\varrho$ , beginnend mit  $\varrho = 1$ , ein geeignetes Intervall durchläuft, eine einparametrische Menge von Verknickungen.

Die Verknickung führt ähnlich wie im Falle der Trapezgitter zu Grenzformen. Diese ergeben sich bei den scheinwinkelgleichen Gittern dadurch, dass die sämtlichen Viereckstreifen zwischen den Leitpolygonen der ersten oder der zweiten Schar

eben werden und sich dabei unter Erhaltung des Zusammenhanges gegenseitig überdecken. In Figur 10 ist ein Modell eines scheidelwinkelgleichen Vierecksgitters in zwei deutlich verschiedenen Verknickungsformen abgebildet; die Grenzformen lassen sich hier wegen der endlichen Dicke der Holzvierecke nicht realisieren.



Figur 10<sup>1)</sup>

5.3. *Grenzübergang zur Differentialgeometrie.* Beim Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehen die Leitpolygone in Leitkurven über, die auf der Fläche  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  ein konjugiertes Netz bilden und ausserdem in Analogie zu den in Ziffer 5.1 angegebenen Eigenschaften der Leitpolygone die folgenden Eigenschaften besitzen:

a) Die geodätische Krümmung der Leitkurven ist Null, das heisst; die Leitkurven sind geodätische Linien. b) Die sich in einem Flächenpunkt schneidenden Leitkurven haben dieselbe Hauptnormale, die dann als Lot zu zwei verschiedenen Flächentangenten zugleich Flächennormale sein muss; auch diese Eigenschaft ist bekanntlich für geodätische Linien kennzeichnend.

Die den scheidelwinkelgleichen Gittern entsprechenden Flächen  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  sind demnach Voßsche Flächen<sup>2)</sup>, das heisst Flächen mit zwei zueinander konjugierten Scharen geodätischer Linien.

Der einparametrischen Gruppe der Verknickungen der scheidelwinkelgleichen Vierecksgitter entspricht eine einparametrische Gruppe von Verbiegungen der Voßschen Flächen, bei denen das konjugierte geo-

dätische Netz konjugiert bleibt. Den Grenzformen der Verknickungen entsprechen als Entartungsfälle der Verbiegungen Einrollungen der Voßschen Flächen um eine Gerade als Grenzlage der sämtlichen Leitkurven der ersten oder der zweiten Schar.

## Abschnitt II: Ebeneckige Vierecksgitter und Streifenmodelle

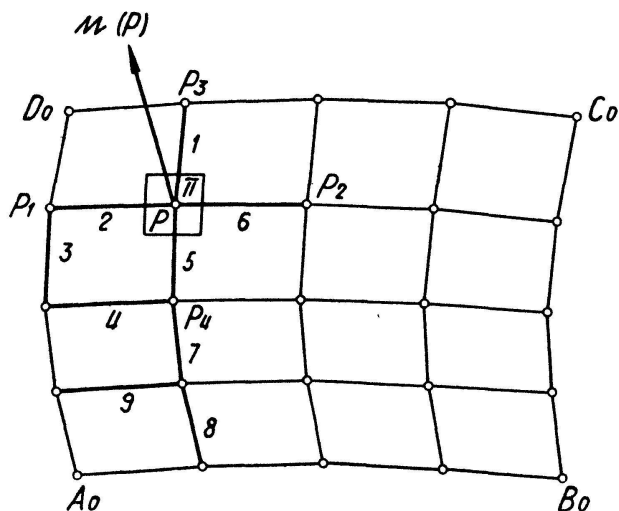
### § 6. Ebeneckige Vierecksgitter

6. 1. *Definition der ebeneckigen Vierecksgitter.* Die in den Paragraphen 3 bis 5 behandelten Vierecksgitter hatten ebene Maschen, während die Vierkante, welche jeweils von den vier von einem inneren Gitterpunkt  $P$  ausgehenden Vierecksseiten gebildet werden, im allgemeinen nicht eben waren. Bei den ebeneckigen Vierecksgittern, zu denen wir uns jetzt wenden, sind umgekehrt die Vierkante eben, die Gittermaschen dagegen sind im allgemeinen windschiefe, das heisst nichtebene Vierecke.

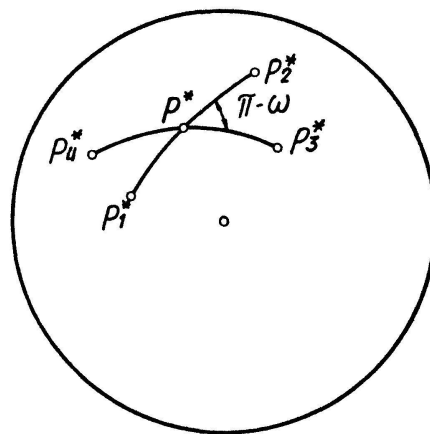
<sup>1)</sup> Diese Figur ist mit freundlicher Genehmigung des Springer-Verlages der Arbeit von R. SAUER und H. GRAF, Math. Ann. 105, 531 (1931), entnommen.

<sup>2)</sup> A. VOSS, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Abt., 18, 95–102 (1888); P. STÄCKEL, Math. Ann. 49, 255–310 (1897).

Jedem inneren Gitterpunkt  $P$  eines ebeneckigen Vierecksgitters ist demnach eine Ebene  $(\pi)$  zugeordnet (Figur 11a); wir bezeichnen sie als die Tangentenebene des Gitters in  $P$ . Sie fällt zusammen mit den Ebenen  $P_1PP_2$  und  $P_4PP_3$ , die wir Schmiegeebenen der sich in  $P$  schneidenden Leitpolygone nennen wollen.

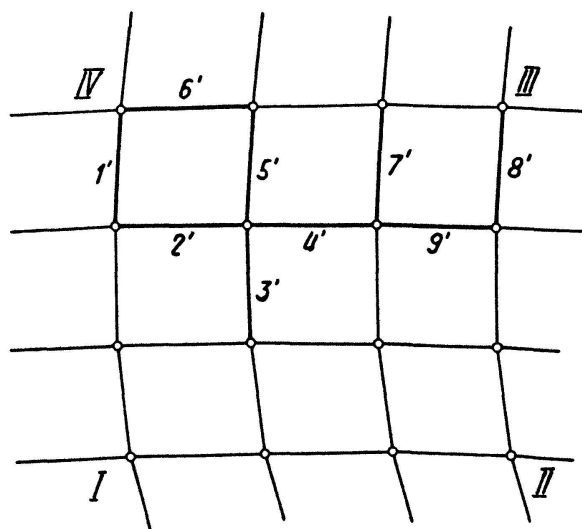


Figur 11a



Figur 11b

6. 2. *Sphärische Abbildung.* Ebenso wie in Figur 1a und b für Dreiecksgitter ein sphärisches Bild eingeführt wurde, bilden wir jetzt die ebeneckigen Vierecksgitter sphärisch ab (Figur 11a und b). Jedem Gitterpunkt  $P$  ist (nach Festlegung einer



Figur 11c

Aussen- und Innenfläche des Gitters) eindeutig ein nach aussen weisender Normalenvektor  $n(P)$  und durch den zu  $n(P)$  parallelen Radius der Einheitskugel ein Punkt  $P^*$  als sphärisches Bild zugeordnet. Jeder Vierecksseite  $PP_1$ ,  $PP_2$  usw. entspricht daher als sphärisches Bild ein Grösstkreisbogen  $P^*P_1^*$ ,  $P^*P_2^*$  usw., dessen Sehne zur Vierecksseite  $PP_1$ ,  $PP_2$  usw. senkrecht ist. Wie man sich leicht überzeugt, sind die Umlaufsinne  $P_1P_4P_2P_3$  im Gitter und  $P_1^*P_4^*P_2^*P_3^*$  im sphärischen Bild (wenn man sowohl das Gitter als auch die Kugeloberfläche von aussen betrachtet) entgegen-

gesetzt. Dem Winkel  $\omega = \sphericalangle P_2 P P_3$  im Gitter entspricht daher im sphärischen Bild der Supplementwinkel  $\pi - \omega = \sphericalangle P_3^* P^* P_2^*$ .

6. 3. *Grenzübergang zur Differentialgeometrie.* Statt wie in Ziffer 3. 3 von einem konjugierten Kurvennetz einer Fläche  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  auszugehen, betrachten wir jetzt Netze von Asymptotenlinien, das heisst von Kurven, deren Schmiegeebenen mit den Tangentenebenen der Fläche zusammenfallen. Die Sehnen-Vierecksgitter dieser Netze sind im allgemeinen nicht ebeneckig, beim Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  werden jedoch die Sehnen (Vierkante) in der Ordnung  $\varepsilon^2$  eben, während sie bei Netzen, deren Kurven nicht Asymptotenlinien sind, nur von der Ordnung  $\varepsilon$  eben werden. Man wird hier ähnlich wie in Ziffer 3. 3 den Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  modifizieren, was etwa auf folgende Weise geschehen kann: Man konstruiert zum Asymptotenliniennetz mit dem Parameter  $\varepsilon$  jeweils dasjenige ebeneckige Gitter, welches die Sehnenpolygone der Kurven  $u = u_0$  und  $v = v_0$  als Leitpolygone hat und bei dem auch die Seiten aller übrigen Leitpolygone der einen Schar dieselbe Länge haben wie die entsprechenden Sehnen des Kurvennetzes. Die Seitenlängen der Leitpolygone der anderen Schar sind hierdurch festgelegt und lassen sich nicht mehr vorschreiben.

Die ebeneckigen Vierecksgitter sind hiernach das differenzengeometrische Analogon der Asymptotenliniennetze der Flächen  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$  negativen Krümmungsmasses; die Tangentenebenen des Gitters und die mit ihnen zusammenfallenden Schmiegeebenen der Leitpolygone entsprechen den Tangentenebenen der Fläche und den mit ihnen zusammenfallenden Schmiegeebenen der Asymptotenlinien. Den in Ziffer 6. 2 angegebenen Eigenschaften des sphärischen Bildes ebeneckiger Vierecksgitter entspricht folgender bekannte differentialgeometrische Satz: Bei der sphärischen Abbildung einer Fläche negativen Krümmungsmasses sind die Asymptotenlinien und ihre Bildkurven durch orthogonale Linienelemente einander zugeordnet; die Winkel zweier Asymptotenlinien und ihre Bildwinkel sind zueinander supplementär.

## § 7. Infinitesimale Verbiegungen der Flächen negativen Krümmungsmasses

7. 1. *Parallel-reziproke Zuordnung ebeneckiger und ebenmaschiger Vierecksgitter.* Zu einem vorgegebenen ebeneckigen Vierecksgitter lassen sich parallel-reziprok zugeordnete ebenmaschige Vierecksgitter auf folgende Weise konstruieren (Figur 11a und c): Jeder Seite 1, 2 usf. des ersten Gitters entspricht eine parallele Seite 1', 2' usf. des zweiten Gitters, jedem ebenen Vierkant (1, 2, 5, 6) ein paralleles ebenes Viereck (1', 2', 5', 6'), jeder «Längsseitenfolge», das heisst jedem Leitpolygon (1, 5, 7, 8, ...) eine parallele «Querseitenfolge» (1', 5', 7', 8', ...).

Die parallel-reziproke Beziehung zwischen dem vorgegebenen ebeneckigen Gitter und den zugeordneten ebenmaschigen Gittern ist wechselseitig, das heisst, auch umgekehrt entspricht jedem Vierkant (2', 3', 4', 5') des zweiten Gitters ein paralleles Viereck (2, 3, 4, 5) des ersten Gitters und jeder Längsseitenfolge (2', 4', 9', ...) des zweiten Gitters eine parallele Querseitenfolge (2, 4, 9, ...) des ersten Gitters.

Zu jedem vorgegebenen ebeneckigen Vierecksgitter gibt es unendlich viele parallel-reziproke ebenmaschige Gitter. Man kann nämlich die Seitenlängen zweier sich schneidender Leitpolygone (zum Beispiel I, II und I, IV) willkürlich vorschreiben; dadurch ist dann das parallel-reziproke ebenmaschige Gitter eindeutig festgelegt. Bei

der Wahl der willkürlichen Seitenlängen ist die einschränkende Bedingung zu beachten, dass bei keinem der sich bei der Konstruktion ergebenden ebenen Vierecke sich der Rand überschneiden darf.

Gibt man umgekehrt ein ebenmaschiges Vierecksgitter vor, so gibt es hierzu im allgemeinen kein parallel-reziprokes ebeneckiges Gitter; denn die Parallelen zu den nichtebenen Vierkanten eines ebenmaschigen Gitters schliessen sich im allgemeinen nicht zu einem nichtebenen Viereck zusammen, wenn von diesem Viereck bereits zwei Seitenlängen festliegen. Nur spezielle ebenmaschige Vierecksgitter besitzen parallel-reziproke Gitter, und diese sind dann im allgemeinen eindeutig bestimmt.

7.2. *Infinitesimale Verknickungen der ebeneckigen Vierecksgitter*<sup>1)</sup>. Parallel-reziproke Konfigurationen sind in der graphischen Statik als Lage- und Kraftpläne wohl bekannt. Man kann sie aber ebenso auch kinematisch als Lageplan und Drehriss folgendermassen deuten:

Jede – im allgemeinen nicht ebene – Vierecksmasche eines ebeneckigen Vierecksgitters wird als starr betrachtet, benachbarte Vierecksmaschen sollen um ihre gemeinsame Seite verdrehbar sein. Dann stellt sich ebenso wie in § 4 die Frage, ob die vorgegebenen Gitter verknickbar sind. Wir beschränken uns jetzt aber durchweg auf infinitesimale Verknickungen, bei denen die Gitterpunkte  $P_{ik}$  mit den Ortsvektoren  $\mathbf{r}_{ik}$  in Punkte  $P_{ik}^*$  mit den Ortsvektoren

$$\mathbf{r}^*(i, k) = \mathbf{r}(i, k) + \eta \bar{\mathbf{r}}(i, k) \quad (\eta = \text{const}) \quad (12)$$

übergehen und die Längen der Vierecksseiten und Vierecksdiagonalen

$$|\mathbf{r}^*(i, k) - \mathbf{r}^*(j, l)| = |\mathbf{r}(i, k) - \mathbf{r}(j, l)| + \eta^2 \{ \dots \} \quad (13)$$

für  $\eta \rightarrow 0$  in der Grössenordnung  $\eta$  ungeändert bleiben.

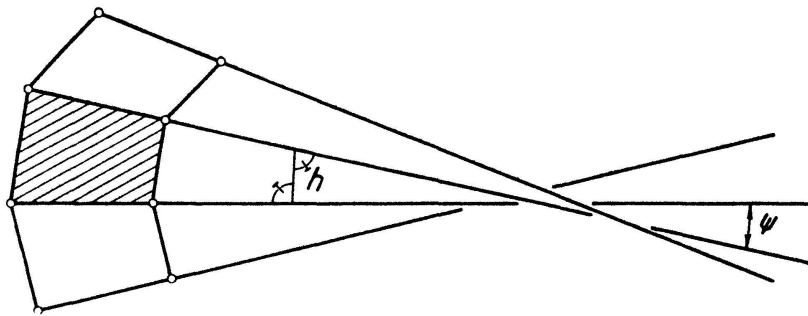
Bei diesen infinitesimalen Verknickungen werden benachbarte Vierecksmaschen um die gemeinsame Seite gegeneinander infinitesimal verdreht. Die Drehvektoren  $\eta \bar{\mathbf{r}}$  dieser infinitesimalen Verdrehungen müssen sich bei der Verknickung eines jeden Vierkants des Gitters zu einem Viereck zusammenschliessen, welches zum Vierkant parallel ist. Hierdurch führt jede Verknickung eines ebeneckigen Gitters zu einem parallel-reziproken ebenmaschigen Vierecksgitter als «Drehriss», und umgekehrt liefert jedes parallel-reziproke ebenmaschige Gitter, wenn man es als Drehriss deutet, eine Verknickung des vorgegebenen ebeneckigen Gitters. Es gelten also unter Berücksichtigung von Ziffer 7. 1 folgende Sätze:

- a) Jedes ebeneckige Vierecksgitter lässt unendlich viele infinitesimale Verknickungen mit starren Vierecksmaschen zu. Die Drehrisse dieser Verknickungen sind identisch mit den parallel-reziproken ebenmaschigen Gittern.
- b) Ein ebenmaschiges Vierecksgitter lässt entweder keine oder im allgemeinen genau eine infinitesimale Verknickung mit starr bleibenden ebenen Vierecksmaschen zu; existiert eine solche Verknickung, so ist ihr Drehriss das parallel-reziproke ebeneckige Gitter.

<sup>1)</sup> R. SAUER, *Projektive Liniengeometrie* (Walter de Gruyter, Berlin und Leipzig 1937), § 11. Ferner: Mh. Math. 57, 177–184 (1953).

Für den nachfolgenden Grenzübergang zur Differentialgeometrie ist es zweckmässig, die Forderung, dass die Vierecksmaschen bei den Verknickungen starr bleiben sollen, folgendermassen zu formulieren: In jeder Querseitenfolge des Gitters (Figur 12) ändert sich die gegenseitige Lage benachbarter Geraden, also insbesondere ihre Schränkung (= kürzester Abstand  $h$ : Winkel  $\psi$ ) nicht. Bei den ebeneckigen Gittern ist die Schränkung im allgemeinen von Null verschieden, bei den ebenmaschigen Gittern ist sie gleich Null.

7. 3. *Grenzprozess zur Differentialgeometrie.* Beim Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  zur Differentialgeometrie entspricht der parallel-reziproken Beziehung zwischen ebeneckigen und ebenmaschigen Vierecksgittern eine analoge parallel-reziproke Beziehung zwischen Asymptotenliniennetzen und konjugierten Kurvennetzen. Den durch die Gleichungen



Figur 12

(12) und (13) definierten infinitesimalen Verknickungen der Gitter entsprechen die infinitesimalen Flächenverbiegungen

$$\mathbf{r}^*(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \eta \bar{\mathbf{r}}(u, v) \quad (\eta = \text{const}), \quad (14)$$

bei denen die Längenelemente

$$|d\mathbf{r}^*| = |d\mathbf{r}| + \eta^2 \{ \dots \} \quad (15)$$

für  $\eta \rightarrow 0$  in der Grössenordnung  $\eta$  ungeändert bleiben. Jedes Flächenelement der Fläche  $\mathbf{r}(u, v)$  erfährt eine infinitesimale Verdrehung mit dem Drehvektor  $\eta \mathfrak{n}(u, v)$ ; die von den Vektoren  $\mathfrak{n}(u, v)$  aufgespannte Fläche (Verbiegungen mit einer Folge starr bleibender Geraden sollen von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben) wird nach W. BLASCHKE als Drehriss der betreffenden Verbiegung bezeichnet.

Beim Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  liefern die Verknickungen der ebeneckigen Vierecksgitter mit Erhaltung der Schränkung der Querseitenfolgen die Verbiegungen der Flächen negativen Krümmungsmasses mit Erhaltung der Schränkung der Quertangenten-Regelflächen ihrer Asymptotenliniennetze. Dies sind aber die allgemeinsten Verbiegungen der Flächen negativen Krümmungsmasses; denn bei Beschränkung auf die Grössenordnung  $\eta$  bleibt bekanntlich bei jeder Verbiegung einer Fläche negativen Krümmungsmasses die Schränkung der Quertangenten-Regelflächen des Asymptotenliniennetzes ungeändert. Die Verknickungen der ebeneckigen Vierecksgitter bilden demnach das elementargeometrische Analogon der allgemeinsten Verbiegungen der Flächen negativen Krümmungsmasses.

Die Verknickungen der ebenmaschigen Vierecksgitter mit eben bleibenden Maschen führen beim Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  auf die Flächenverbiegungen, bei denen ein gewisses Kurvennetz konjugiert bleibt.

Den Sätzen a), b) von Ziffer 7. 2 stehen somit folgende analoge Sätze über die infinitesimale Flächenverbiegung gegenüber:

- a) Die infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche negativen Krümmungsmasses haben als Drehrisse die zum Asymptotenliniennetz der gegebenen Fläche konjugierten Kurvennetze.
- b) Es gibt entweder keine oder im allgemeinen genau eine infinitesimale Verbiegung, bei der ein konjugiertes Kurvennetz konjugiert bleibt; existiert eine solche Verbiegung, so existiert auch ein zu dem konjugierten Kurvennetz parallel-reziprokes Asymptotenliniennetz, und dieses ist der Drehriss der Verbiegung.

In enger Beziehung zur Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung und ihrer Darstellung durch mechanische Modelle stehen Untersuchungen von H. GRAF und H. THOMAS<sup>1)</sup> über Gleichgewichtsfragen gespannter Fäden. (Schluss folgt im nächsten Heft.)

R. SAUER, München.

## Ein Problem über Wägen

1. Ist uns ein Haufen von  $3^n$  ( $n \geq 0$ ) Münzen vorgelegt, und wissen wir, dass er genau eine falsche Münze von *geringerem* Gewicht enthält, so ist es leicht, durch  $n$ -maliges Wägen die falsche Münze zu finden: Beim ersten Wägen setzen wir auf jede Waagschale je  $3^{n-1}$  Münzen, und ebensoviel übriggebliebene lassen wir beiseite. Zeigt die Waage Gleichgewicht, so befindet sich offenbar die falsche Münze in der letztgenannten Gruppe. Sinkt die linke Waagschale, so befindet sie sich auf der rechten, und sinkt die rechte, so auf der linken. In jedem Falle ist dadurch die Aufgabe auf die analoge, aber mit  $(n-1)$ -maligem Wägen, zurückgeführt, da uns nach einer durchgeführten noch  $n-1$  Wägungen zur Verfügung stehen, aber auch der die falsche Münze enthaltende Haufen jetzt nur noch  $3^{n-1}$  Münzen enthält. Fahren wir so fort, so ist endlich durch das letzte ( $n$ -te) Wägen zu entscheiden, welche unter drei in Frage kommenden Münzen falsch ist, was durch das beschriebene Verfahren, Aufsetzen von je einer dieser Münzen auf jede Waagschale, sofort zu erledigen ist.

2. Wie wir sahen, war die in 1. gestellte Aufgabe sehr einfach zu lösen; die Lösung drängt sich eben fast von selbst auf. Die Sache wird aber anders, wenn in der Aufgabe folgende Abänderung eingeführt wird: von der falschen Münze wissen wir nicht mehr, ob sie zu leicht oder zu schwer ist, sondern nur, dass ihr Gewicht nicht das richtige ist. Die wesentliche dadurch hervorgerufene Komplikation liegt darin: Sinkt zum Beispiel bei einem Wägen die linke Waagschale, so wissen wir noch nicht, ob diese oder die rechte die falsche Münze enthält; die Münze könnte ja zu leicht sein und sich auf der rechten, oder zu schwer sein und sich auf der linken befinden. Natürlich wird

<sup>1)</sup> H. GRAF und H. THOMAS, Math. Z. 48, 193–211 (1942), und 51, 166–196 (1948), ferner H. THOMAS, Math. Z. 44, 1–32 (1938), und 47, 66–67 (1940). – Ausserdem vgl. J. RADON, Mitt. Math. Ges. Hamburg 8, 147–151 (1940).