Den in Figur 7 dargestellten Grenzformen der Verknickungen entsprechen bei den Flächen (a) bis (e) Grenzformen der Verbiegungen, bei denen die Fläche entweder längs einer Profilkurve oder längs einer Bahnkurve eine gemeinsame Tangentenebene besitzt. (Fortsetzung folgt.) R. SAUER, München.

Kleine Mitteilungen

Eine Verallgemeinerung des Delischen Problems

Zu der bekanntermassen mit Zirkel und Lineal unlösbaren Aufgabe der Würfelverdopplung (Delisches Problem) ist es eine sinnvolle Verallgemeinerung, drei Würfel zu konstruieren, von denen zwei zusammen so gross sind wie der dritte. Ich will nun dazu einige besonders einfach zu zeichnende Lösungen angeben.

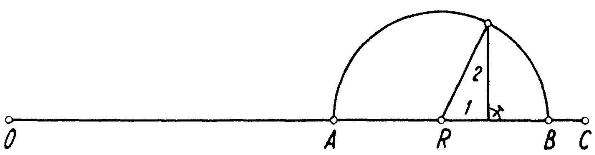
Da eine (nicht aufgehende) Kubikwurzel keine konstruierbare Grösse ist, ist die Aufgabe nur in dieser weiteren Form zu stellen und nicht etwa so, dass zu zwei gegebenen Würfeln der dritte mit der Summe (oder Differenz) der Inhalte verlangt wird. Es muss also zwischen drei *konstruierbaren*, das heisst lediglich mit Hilfe von Quadratwurzeln gebildeten Grössen a, b, c die Beziehung $a^3+b^3=c^3$ bestehen; und die Aufgabe besteht nun darin, solche Tripel zu finden.

Bei dem nächstliegenden Versuch der Lösung in rationalen Zahlen (also die Würfelseiten in einem passenden ganzzahligen Verhältnis) greift nun eine andere Unmöglichkeit ein; nämlich die des grossen Fermatschen Satzes für den Exponenten 3, wonach die Gleichung $a^3+b^3=c^3$ in ganzen Zahlen unlösbar ist. Wir müssen also für a, b, c Zahlen aus irgendeinem reellen konstruierbaren Zahlkörper nehmen.

Die einfachsten solchen Körper sind nun die quadratischen $K(\sqrt{m})$, und unter ihnen wieder solche mit möglichst kleiner Grundzahl m. In diesen Körpern ist nun die kubische Fermat-Gleichung lösbar für $m=2, 5, 6$ und andere, jedoch unlösbar für $m=3, 7, 10$ und andere. Eine besonders einfache Lösung gibt es bei $m=5$:

$$(9+\sqrt{5})^3+(9-\sqrt{5})^3=12^3$$

mit folgender geometrischer Konstruktion:



Figur 1

Da $\sqrt{5}$ die Hypotenuse zu den Katheten 1 und 2 ist, liefern mit $OR=9$ die Strecken OA, OB, $OC=12$ die drei passenden Würfelseiten.

Eine ganz analoge Konstruktion liefert die Gleichung $(12+\sqrt{33})^3+(12-\sqrt{33})^3=18^3$, wobei $\sqrt{33}$ die eine Kathete zur Hypotenuse 7 und der anderen Kathete 4 ist. Ich erwähne ferner noch:

$$42^3+(17\sqrt{2}-18)^3=(17\sqrt{2}+18)^3, \qquad 8^3+(\sqrt{85}-1)^3=(\sqrt{85}+1)^3,$$

$$18^3+(5\sqrt{6}-6)^3=(5\sqrt{6}+6)^3, \qquad 10^3+(\sqrt{82}-2)^3=(\sqrt{82}+2)^3,$$

wobei $\sqrt{85}$ Hypotenuse zu 2 und 9 oder zu 6 und 7, $\sqrt{82}$ Hypotenuse zu 1 und 9 ist.

Solche Beispiele lassen sich beliebig viele herleiten. Nach der Identität

$$\left[3x^2+\sqrt{-3(x^4+4xy^3)}\right]^3+\left[3x^2-\sqrt{-3(x^4+4xy^3)}\right]^3=(-6xy)^3,$$

(wo $xy < 0$, $|4y^3| > |x^3|$, damit für unsern Zweck die Wurzel reell) oder nach der noch allgemeineren

$$[\alpha(2y^3 - x^3) - 3\beta x y^2 + x\sqrt{-3P}]^3$$
$$+ [\beta(2x^3 - y^3) - 3\alpha x^2 y + y\sqrt{-3P}]^3 = [2\gamma(x^3 + y^3)]^3$$

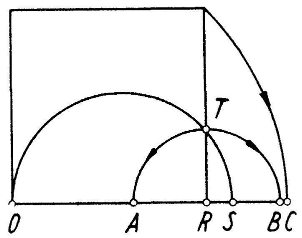
mit
$$P = \alpha^2(x^4 + 4xy^3) - 6\alpha\beta x^2 y^2 + \beta(y^4 + 4x^3 y),$$

wenn bereits $\alpha^3 + \beta^3 = \gamma^3$ (mit entsprechenden Realitätsbedingungen), welche für $\alpha = \gamma$, $\beta = 0$ die erste Formel beinhaltet, kann man auch zu immer höheren konstruierbaren Körpern aufsteigen.

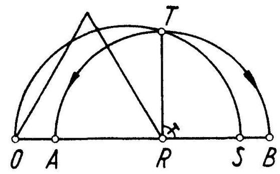
Danach finden sich einige noch ziemlich einfache Fälle mit biquadratischen Irrationalitäten, so zum Beispiel

$$\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1)}\right)^3 + \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1)}\right)^3 = (\sqrt{2})^3,$$

was eine vom Quadrat ausgehende geometrische Konstruktion bietet.



Figur 2



Figur 3

Die Quadratseite OR wird über R hinaus um ein Drittel der Differenz von Diagonale und Seite verlängert zum Punkt S. Sodann wird über OS der Halbkreis geschlagen, welcher die senkrechte Quadratseite im Punkte T schneidet. Schliesslich wird die Strecke RT beiderseits heruntergeklappt nach A und B. Dann bilden die Strecken OA, OB und die Quadratdiagonale OC die drei gesuchten Würfelseiten.

Eine andere Lösung

$$\left(1 + \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}}\right)^3 + \left(1 - \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}}\right)^3 = (\sqrt{3})^3$$

benützt das gleichseitige Dreieck.

Die Basis des Dreiecks OR wird um die Differenz von Höhe und Drittel der Seite über R hinaus zum Punkt S verlängert, dann über OS der Halbkreis geschlagen. Dieser trifft die Senkrechte über R in T. Schliesslich wird wieder RT beiderseits nach A und B heruntergeschlagen. OA, OB und die doppelte Dreieckshöhe, welche nur sehr wenig grösser ist als OB, geben die Würfelseiten.

Ferner erwähne ich noch

$$(\sqrt{6})^3 + \left(\sqrt{\sqrt{6} - \frac{1}{3}} - 1\right)^3 = \left(\sqrt{\sqrt{6} - \frac{1}{3}} + 1\right)^3$$

sowie

$$\left(33 - 18\sqrt{2} + \sqrt{181 - 128\sqrt{2}}\right)^3 + \left(33 - 18\sqrt{2} - \sqrt{181 - 128\sqrt{2}}\right)^3 = (18 - 6\sqrt{2})^3,$$

wo im letzteren Beispiel die beiden kleineren Würfel ziemlich nahe sind, somit eine gewisse Approximation an den klassischen delischen Fall vorliegt, welche Approximation natürlich beliebig weit zu treiben ist. A. AIGNER, Graz.

Zur Behandlung von Gleichungen mit Quadratwurzeln

In der kleinen Mitteilung *Bemerkung zum Rationalmachen von Gleichungen mit Quadratwurzeln,* El. Math. *1,* 35 (1946), wird behauptet, dass eine Gleichung von der Form

$$A + W_1 + W_2 = W_3 + W_4 \quad (1)$$

[1]

mit der elementaren Methode des Quadrierens nicht rational gemacht werden kann. Man beachte aber folgendes: Durch zweimaliges Quadrieren erhält man aus (1):

$$[A^2 + W_1^2 + W_2^2 + 2A(W_1 + W_2) + 2W_1W_2 - W_3^2 - W_4^2]^2 = 4W_3^2W_4^2$$

und hat nicht, wie am angeführten Ort behauptet wird, eine Gleichung mit drei, sondern nur mit zwei Wurzeln. Die Ausführung angezeigter Operationen führt auf

$$P + QW_1 + RW_2 + SW_1W_2 = 0 \quad (2)$$

[2]

Auflösen nach W_2 und Quadrieren gibt

$$W_2^2 = (P^2 + Q^2W_1^2 + 2PQW_1):(R^2 + S^2W_1^2 + 2RSW_1).$$

Die Auflösung nach W_1 und Quadrieren gibt eine rationale Gleichung. Man hat daher die Gleichung (1) durch viermaliges Quadrieren rational gemacht. Dieses Beispiel zeigt die Methode (die Ausführung sei dem Leser überlassen), die Gleichung

$$A + W_1 + W_2 + \cdots + W_{n-1} + W_n = 0$$

mit Hilfe von n Quadrierungen rational zu machen. Zu beachten ist, dass die Gleichung

$$A + W_1 + \sqrt{B + CW_1} = 0$$

durch zweimaliges Quadrieren rational gemacht werden kann. Man hat

$$A^2 + 2AW_1 + W_1^2 = B + CW_1,$$

und rational:

$$W_1^2(2A - C)^2 = (B - A^2 - W_1^2)^2.$$

R. Lauffer, Graz[3]).

Ungelöste Probleme

Nr. 2. Es sei D_n die kleinste (positive, reelle) Zahl mit der Eigenschaft, dass sich jede Punktmenge des n-dimensionalen Raumes vom Durchmesser $D = 1$ in $n + 1$ Teile zerlegen lässt, deren Durchmesser alle nicht grösser als D_n ausfallen. Nach einer bis heute noch unbewiesenen Vermutung von G. Borsuk (*Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre,* Fund. Math. *20,* 177–190 [1933]) gilt $D_n < 1$. Kürzlich

---

[1]) Wir setzen $P_i\sqrt{Q_i} = \sqrt{P_i^2 Q_i} = W_i$, und es sei W_i nicht rational.

[2]) Der Irrtum ist auf die ungeeignete Symbolik des Verfassers zurückzuführen.

[3]) Der Verfasser ist der Ansicht, dass im Unterricht zu Übungszwecken von irrationalen Gleichungen nur bescheidener Gebrauch zu machen ist. Am besten ist es, sich nur auf Beispiele zu beschränken, welche sich zwanglos aus geometrischen oder physikalischen Aufgaben ergeben und daher nicht den Charakter von Kreuzworträtseln haben.