

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 9 (1954)
Heft: 5

Artikel: Zur Erzeugung ebener Figuren durch Projektion
Autor: Jeger, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-17362>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

die Masszahlen dieses Parallelkörpers mit $M(-\varrho)$, $F(-\varrho)$ und $V(-\varrho)$ bezeichnet, so hat man wegen der unmittelbar aus den Definitionen folgenden Relation $[A(-\varrho)](\varrho) \subset A$ nach (10 b):

$$F(-\varrho) + 2M(-\varrho)\varrho + 4\pi\varrho^2 \leq F. \quad (\text{a})$$

Wendet man auf das hier auftretende $M(-\varrho)$ die Ungleichung (2 a) an, so resultiert mit einfacher Umrechnung

$$F(-\varrho) \leq (\sqrt{F} - \sqrt{4\pi}\varrho)^2. \quad (\text{b})$$

Da innerhalb der Parallelschar stets $F(-\varrho) = V'(-\varrho)$ gilt, so gewinnt man durch Integration in (b) von 0 bis r

$$V \leq F r - \sqrt{4\pi F} r^2 + \frac{4\pi}{3} r^3, \quad (\text{c})$$

oder bei passender Umformung schliesslich

$$\sqrt{F^3} - \sqrt{36\pi} V \geq (\sqrt{F} - \sqrt{4\pi} r)^3. \quad (\text{d})$$

Dies ist eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung (1), welche es abzulesen gestattet, dass Gleichheit für eigentliche Eikörper ($r > 0$) nur für die Kugel bestehen kann, da die rechte Seite in (d) nur verschwindet, wenn A mit seiner Inkugel zusammenfällt. Für uneigentliche Eikörper wird die isoperimetrische Ungleichung auch durch eine Strecke ($F = V = 0$) befriedigt.

H. HADWIGER, Bern.

Zur Erzeugung ebener Figuren durch Projektion

Zahlreiche Inzidenzsätze der ebenen Geometrie lassen sich auf sehr übersichtliche Weise oft dadurch beweisen, dass die auftretenden ebenen Figuren als Projektionen von räumlichen Figuren interpretiert werden, wobei geeignete Rotationsflächen zweiter Ordnung im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen. Ein auf dieser Idee aufgebauter Beweis der Kegelschnittssätze von PASCAL und BRIANCHON dürfte bekannt sein¹⁾. Im weitern lassen sich durch die räumliche Interpretation ebener Figuren in vielen Fällen für planimetrische Konstruktionsaufgaben recht einfache Lösungen gewinnen, die nur Hilfsmittel aus der darstellenden Geometrie benötigen²⁾. Bei der Beschäftigung mit dem genannten Problemkreis ist der Verfasser dieser Zeilen auf die nachfolgenden Zusammenhänge gestossen, die infolge ihrer Verknüpfung mit der darstellenden Geometrie der Rotationsflächen zweiter Ordnung von einigem Interesse sein dürften. Sollten von diesen Ausführungen einige Anregungen für den Geometriunterricht ausgehen, so ist eine Absicht des Verfassers in Erfüllung gegangen.

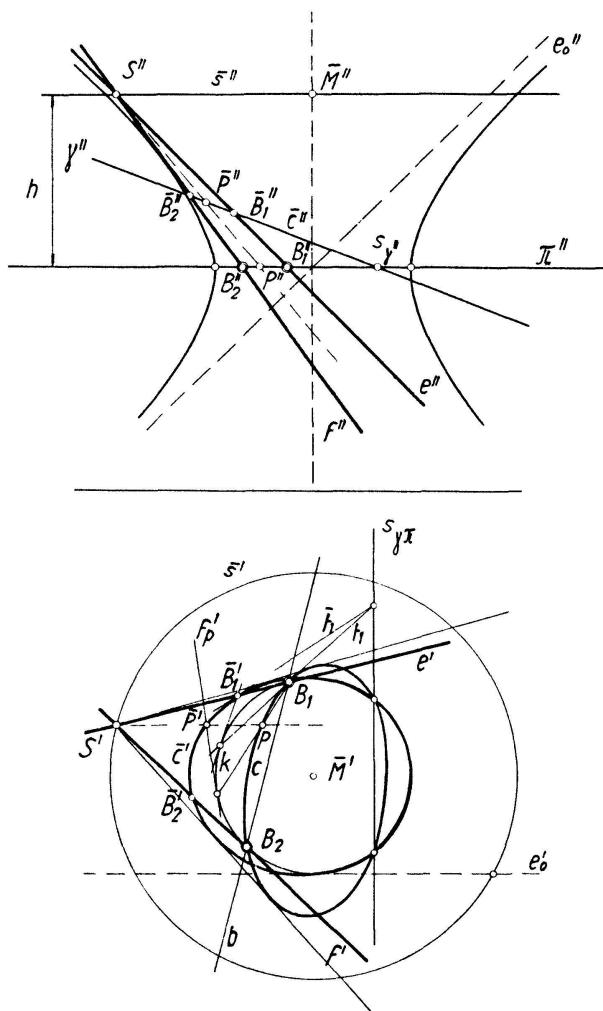
¹⁾ Eine ausführliche Darstellung findet sich etwa in W. BLASCHKE, *Projektive Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1954), Seite 70, sowie in E. STIEFEL, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Birkhäuser, Basel 1947), Seite 89.

²⁾ Siehe etwa im vorgenannten *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* von E. STIEFEL, Seite 102.

1. Eine Abbildung gewisser Kegelschnitte einer Ebene π
auf die Ebenen des Raumes

In der Zeichenebene π liege ein Kegelschnitt c vor, der von der festen Geraden b in den beiden Punkten B_1 und B_2 getroffen wird. Zunächst setzen wir B_1 und B_2 als reell und verschieden voraus.

Durch B_1 und B_2 zeichnen wir nun einen Kreis k von beliebigem Radius und fassen diesen als Kehlkreis eines einschaligen Rotationshyperboloides auf (Figur 1). π ist



Figur 1

für diese Fläche Kehlkreisebene. Für die Zeichnung sei π zugleich Grundrissalebene. Der Öffnungswinkel des Asymptotenkegels ist nicht von Bedeutung; er ist in der Figur zu 90° angenommen. Die beiden geradlinigen Erzeugendenscharen des Hyperboloides sollen als e - bzw. f -Schar bezeichnet werden.

Auf der Fläche gibt es zwei Punkte, deren Tangentialebene B_1 und B_2 enthält, nämlich den Schnittpunkt der e -Erzeugenden durch B_1 mit der f -Erzeugenden durch B_2 sowie den Schnittpunkt der f -Erzeugenden durch B_1 mit der e -Erzeugenden durch B_2 . Die beiden Flächenpunkte liegen symmetrisch in bezug auf π ; es sei S etwa derjenige von ihnen oberhalb π .

Projizieren wir c von S aus, so entsteht ein Kegel zweiter Ordnung, von dem S Spitze und c Leitkurve ist. Kegel und Hyperboloid schneiden sich in einer Kurve vierter Ordnung, von der das Erzeugendenpaar e und f ein Teil ist; der Rest der Durchdringung ist daher ein Kegelschnitt \bar{c} . Wir können \bar{c} als Projektion der Kurve c auf das Hyperboloid auffassen. Umgekehrt ist durch diese Projektion mit dem Zentrum S jedem ebenen Hyperboloidschnitt \bar{c} in der Ebene π ein Kegelschnitt c zugeordnet, der durch B_1 und B_2 läuft. Unsere Konstruktion führt demnach zu einer eineindeutigen Zuordnung (Abbildung) zwischen den Kegelschnitten von π , welche durch B_1 und B_2 gehen, und den ebenen Schnitten des Hyperboloids bzw. den Ebenen des Raumes. Beispielsweise entsprechen sich die Kreise in π und die Normalebenen zur Hyperboloidachse; speziell ist dem Kehlkreis die Ebene π zugeordnet.

Wir verwenden im weiteren die folgende Bezeichnungsweise für korrespondierende Objekte:

$$\begin{array}{ccccc} c_i & \xleftarrow{\quad} & \bar{c}_i & \xleftarrow{\quad} & \gamma_i \\ \text{Kegelschnitt in } \pi & & \text{Bildkegelschnitt} & & \text{Trägerebene} \\ \text{durch } B_1 \text{ und } B_2 & & \text{auf dem Hyperboloid} & & \text{des Kegelschnittes } \bar{c}_i \end{array}$$

Ist c ein ausgearteter Kegelschnitt (Geradenpaar), so degeneriert der Projektionskegel zu einem Ebenenpaar durch S . Es sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden. Gehört die Gerade b nicht zu c , so besteht der Kegel je aus einer Ebene durch e und durch f . Die Projektion \bar{c} ist dann ein Erzeugendenpaar des Hyperboloids und damit γ eine Tangentialebene der Fläche. Gehört dagegen b zum Kegelschnitt c , so wird der Projektionskegel aus der Ebene (e, f) und einer weiteren Ebene α gebildet. Als Projektion von c haben wir dann die Schnittkurve von α mit dem Hyperboloid anzusehen. Falls c nicht mit der doppelt zu zählenden Geraden b identisch ist, so ist diese Schnittkurve stets ein nichtausgearteter Kegelschnitt.

In Figur 1 ist der Grundriss so gedreht, dass die Ebene σ zweitprojizierend wird.

Beschreibung der wesentlichen Konstruktionen in Figur 1¹⁾: Bildpunkt \bar{P} (allgemeiner Punkt von \bar{c}): \bar{P} ist Durchstosspunkt des Projektionsstrahls SP mit dem Hyperboloid. Da S auf der Fläche liegt, ist dieses Konstruktionsproblem linear. Die Hilfsebene, welche durch P und die Erzeugende e aufgespannt wird, schneidet die Fläche im Erzeugendenpaar e und f_p . \bar{P} wird als Schnittpunkt der Geraden SP und f_p erhalten.

Bildpunkte von B_1 und B_2 : \bar{B}_1 und \bar{B}_2 sind Doppelpunkte der Durchdringungskurve vierter Ordnung von Hyperboloid und Projektionskegel. Die beiden Flächen berühren sich somit in \bar{B}_1 und \bar{B}_2 . Wir finden etwa \bar{B}_1 als Punkt von e , in welchem die Hyperboloid-Tangentialebene zugleich den Projektionskegel berührt. Da der Grundriss des Berührungsproduktes einer Hyperboloid-Tangentialebene und deren 1. Spur Pol und Polare bezüglich k sind, ist speziell \bar{B}_1 Pol zur Geraden t_1 . Der Kegelschnitt \bar{c} kann jetzt erhalten werden entweder als Schnitt des Hyperboloids mit der Ebene $\gamma = (\bar{B}_1 \bar{B}_2 \bar{P})$ oder als perspektivkollineares Bild von c ; Perspektivzentrum ist S , Perspektivachse die Schnittgerade $s_{\gamma\pi}$ von γ und π . Die Tangente \bar{t}_1 wurde unter Verwendung dieser Perspektivität konstruiert.

¹⁾ Für die Grundkonstruktionen am einschaligen Rotationshyperboloid sei auf das ausgezeichnete Werk von C. ROUBAUDI, *Traité de géométrie descriptive* (Masson, Paris 1948) verwiesen.

2. Kegelschnittbüschel

Wir wollen uns jetzt der weiteren Diskussion unserer Abbildung zuwenden und insbesondere einige Anwendungen auf reelle Kegelschnittbüschel machen.

Es seien zunächst c_1 und c_2 zwei Kegelschnitte in π durch B_1 und B_2 ; ihnen entsprechen im Raum zwei Ebenen γ_1 und γ_2 , die sich in einer (eventuell unendlichfernen) Geraden \bar{g} treffen. Die Projektion dieser Geraden von S aus auf die Ebene π ist die Verbindungsgerade g der beiden andern Schnittpunkte von c_1 und c_2 .

Nun betrachten wir ein Kegelschnittbüschel C , von dem B_1 und B_2 zwei Grundpunkte sind. Die beiden restlichen Grundpunkte seien mit G_1 und G_2 bezeichnet. Entsprechend unseren bisherigen Voraussetzungen über B_1 und B_2 beschränken wir uns vorerst auf Kegelschnittbüschel mit zwei reellen, getrennten und im Endlichen liegenden Grundpunkten. Aus der Bemerkung über das räumliche Bild eines Kegelschnittpaars c_1 und c_2 schliessen wir sofort auf

Satz 1. Ein Kegelschnittbüschel C in π , von dem B_1 und B_2 zwei Grundpunkte sind, hat als Bild ein Ebenenbüschel Γ . Die Trägergerade \bar{g} des Büschels Γ ist die Verbindungsgerade der Bilder der beiden andern Grundpunkte G_1 und G_2 des Büschels C .

Je nachdem die beiden Grundpunkte G_1 und G_2 des Büschels C reell getrennt, reell zusammenfallend oder konjugiert komplex sind, ist \bar{g} eine Gerade, welche das Hyperboloid schneidet, berührt oder meidet. Im Sonderfall, dass die Verbindungsgerade von G_1 und G_2 durch B_1 oder B_2 läuft (Büschel von ausgearteten Kegelschnitten), ist \bar{g} eine Erzeugende des Hyperboloids.

Beispielsweise hat das elliptische Kreisbüschel durch B_1 und B_2 als Bild das Büschel der Parallelebenen zu π ; \bar{g} ist die unendlichferne Gerade von π . Die Grundpunkte G_1 und G_2 sind hier konjugiert komplex (zyklische Punkte von π).

Weiter folgt

Satz 2. Die drei ausgearteten Kegelschnitte des Büschels C haben als Bilder die beiden Tangentialebenen des Hyperboloids durch die Gerade \bar{g} und die Verbindungsebene von S und g .

Derselbe Sachverhalt liegt auch dann vor, wenn B_1 und B_2 zusammenfallen oder wenn B_1 und B_2 ein konjugiert komplexes Punktpaar ist. Wie wir anschliessend zeigen werden, besteht ein Unterschied nur darin, dass an die Stelle des Hyperboloids in Verbindung mit einer Verschiebung der Realitätsverhältnisse zwei andere Rotationsflächen zweiter Ordnung treten. Wir wollen dieser Tatsache Rechnung tragen und die nachfolgenden Sätze gleich in allgemeiner Gestalt, das heisst ohne die vorläufig noch notwendige Einschränkung über B_1 und B_2 , formulieren.

Wir bezeichnen die Normalebene zur Hyperboloidachse durch den Punkt S mit σ und deren Schnittkreis mit der Fläche mit \bar{s} . Bezüglich der Lage der Grundpunkte G_1 und G_2 treffen wir jetzt folgende Fallunterscheidung:

a) G_1 und G_2 sind (reelle oder konjugiert komplexe) Punkte im Endlichen. g ist dann von der unendlichfernen Geraden verschieden, und es kann daher \bar{g} nicht in σ liegen. D sei der Durchstosspunkt von \bar{g} mit σ (siehe Figur 2).

Einer Ebene γ_h des Büschels C , welche \bar{s} in zwei reellen Punkten \bar{A}_1 und \bar{A}_2 schneidet, entspricht in π ein Kegelschnitt c_h mit den beiden unendlichfernen Punkten A_1 und A_2 , das heisst eine Hyperbel. Es ist daher ω zugleich der Winkel zwischen den beiden Asymptoten von c_h .

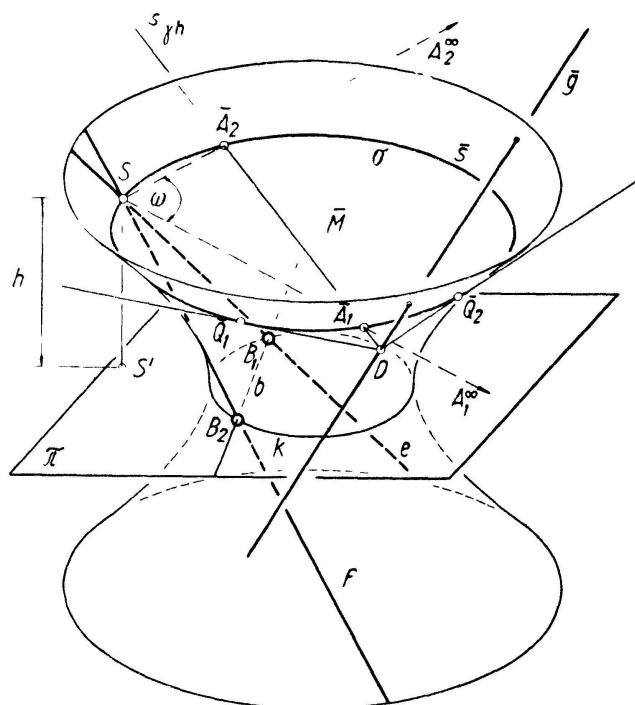
Geht γ_h durch den Mittelpunkt \bar{M} von \bar{s} , so ist c_h eine gleichseitige Hyperbel.

Satz 3. Jedes Kegelschnittbüschel mit vier endlichen Grundpunkten in allgemeiner Lage¹⁾ enthält mindestens eine gleichseitige Hyperbel. Enthält ein solches Büschel zwei gleichseitige Hyperbeln, so besteht es überhaupt nur aus gleichseitigen Hyperbeln.

Enthält nämlich ein Büschel zwei gleichseitige Hyperbeln, so geht \bar{g} notwendigerweise durch \bar{M} .

Einer Ebene γ_p , welche \bar{s} berührt, entspricht eine Parabel c_p . Der Figur 2 entnehmen wir

Satz 4. Ein Kegelschnittbüschel C mit vier endlichen Grundpunkten in allgemeiner Lage enthält zwei Parabeln. Sie sind reell, wenn der Durchstosspunkt D ausserhalb \bar{s} liegt.



Figur 2

Falls in einem Kegelschnittbüschel C ein Kreis c_k enthalten ist, so muss die Gerade \bar{g} eine Normale zur Hyperboloidachse sein. Die Ebenen γ_i des Büschels Γ schneiden dann σ in einem Feld von parallelen Geraden d_i , und es sind daher die Winkelhalbierenden Richtungen der Asymptoten aller Kegelschnitte von C fest. Dies heisst aber, dass C ein Büschel von parallelachsigen Kegelschnitten ist. In Figur 3 ist der Grundriss der zu einem derartigen Büschel gehörenden räumlichen Figur gezeichnet. Nach dem Peripheriewinkelsatz halbieren \bar{Q}_1 und \bar{Q}_2 sämtliche Bögen $\bar{A}_1\bar{A}_2$ auf dem Kreis \bar{s} . Gleichzeitig bestimmen \bar{Q}_1 und \bar{Q}_2 die Parabelebenen γ_p des Büschels Γ . Ihre Lage ergibt, dass die beiden Parabeln von C stets reell sind und orthogonale Achsen aufweisen. Umgekehrt enthält ein Büschel von parallelachsigen Kegelschnitten stets einen Kreis, wenn G_1 und G_2 nicht auf der unendlichfernen Geraden liegen. Aus der Parallelität der Achsen schliesst man nämlich auf die Parallelität der Spurgeraden d_i . Daraus folgt aber weiter, dass \bar{g} parallel zu π ist. Ein solches Büschel enthält daher

¹⁾ Dies will heissen, dass keine drei unter ihnen auf einer Geraden liegen.

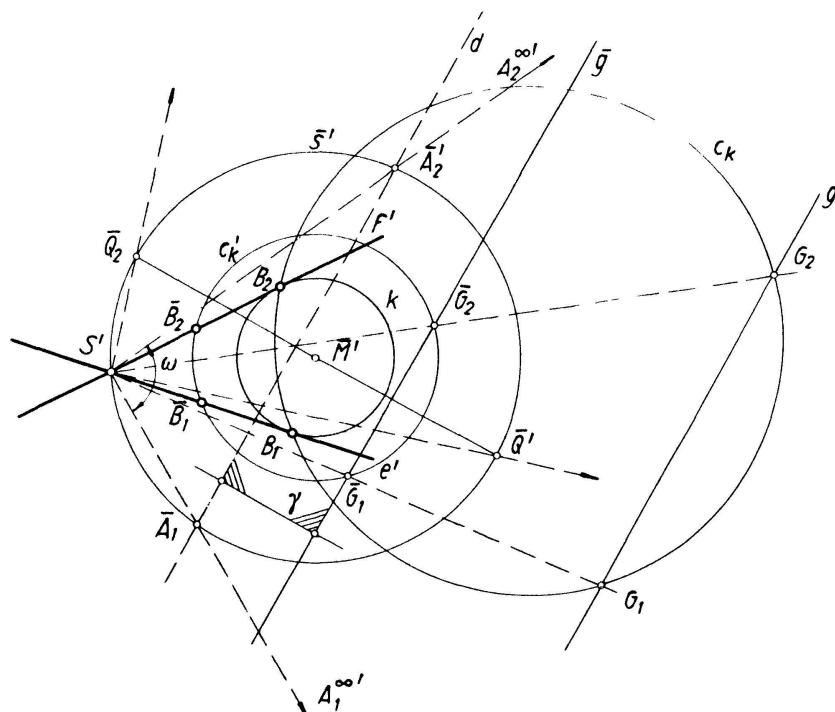
stets einen Kreis. Umfasst C zwei Kreise, so sind G_1 und G_2 die zyklischen Punkte von π und \bar{g} liegt in σ . Wir haben es dann mit einem Kreisbüschel zu tun.

Satz 5. Liegen die vier Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels im Endlichen und auf einem Kreis, so haben sämtliche Kurven des Büschels parallele Achsen.

Haben umgekehrt die Kegelschnitte eines Büschels parallele Achsen und liegt keiner der Grundpunkte auf der unendlichfernen Geraden, so enthält das Büschel einen Kreis.

Die beiden Parabeln eines derartigen Büschels sind stets reell und haben orthogonale Achsen.

b) G_1 und G_2 liegen auf der unendlichfernen Geraden, das heisst \bar{g} , ist eine Gerade der Ebene σ . C ist in diesem Falle ein Büschel von Kegelschnitten mit parallelen



Figur 3

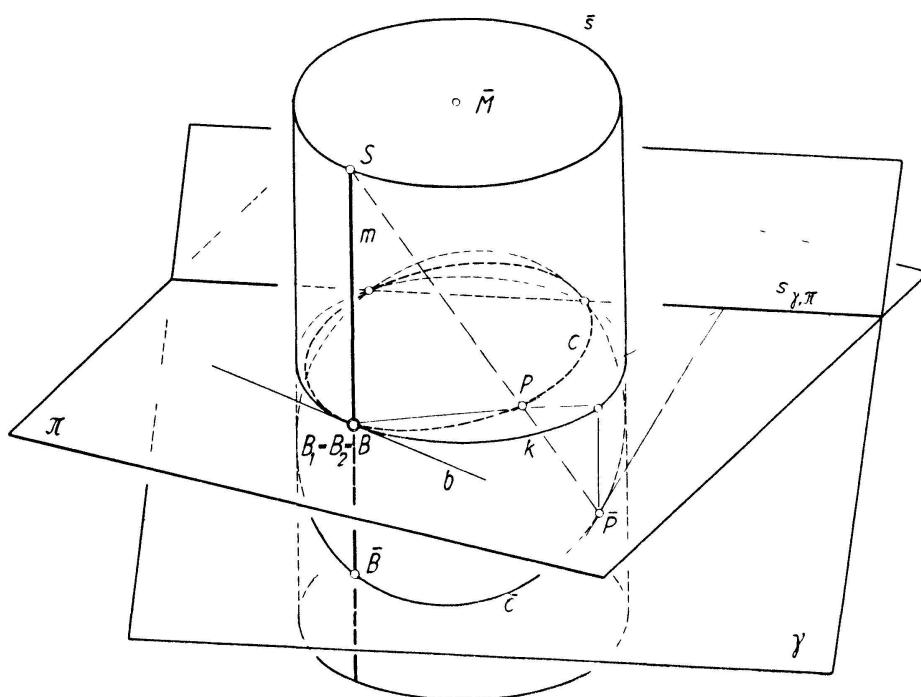
Asymptoten. Von diesem Typus ist beispielsweise das bereits erwähnte elliptische Kreisbüschel.

3. Die Punkte B_1 und B_2 fallen zusammen in einen Punkt B

In der Figur 1 wollen wir jetzt die Gerade b und den Kreis k als primäre Elemente auffassen, das heisst, wir betrachten die Punkte B_1 und B_2 als Schnittpunkte von b und k gegeben. Die bisherige Voraussetzung über B_1 und B_2 besagt dann, dass sich b und k in zwei reellen Punkten schneiden.

Wir haben uns nun dem Falle zuzuwenden, wo b Tangente an k ist. Gehen wir gleich vor wie vorher, so kommt das Projektionszentrum S in die Ebene π hinein zu liegen. Es ist daher nicht möglich, die Ebene π auf ein Hyperboloid mit dem Kehlkreis k zu projizieren. Ein geeigneter Grenzübergang zeigt aber sofort, welche Fläche an dessen Stelle zu treten hat. Es sei h der Abstand des Projektionszentrums S von der Ebene π bei der Hyperboloidabbildung (Figur 1 und Figur 2). Lassen wir die

Gerade b unter Festhaltung dieses Abstandes h gegen eine Tangente von k konvergieren, so schliesst sich der Asymptotenkegel des Hyperboloides, und die Fläche selbst strebt gegen einen Rotationszylinder mit dem Leitkreis k . Da der Öffnungswinkel des Asymptotenkegels zu Beginn des Grenzprozesses beliebig war, ist h willkürlich. Die Abbildung der Kegelschnitte von π , welche durch B_1 und B_2 gehen (das sind jetzt die Kegelschnitte, die durch B laufen und b zur Tangente haben), vollzieht sich nun hier über einen Rotationszylinder. Das Projektionszentrum S ist irgendein nicht in π liegender Punkt der Mantellinie durch B . Die Figur 4 zeigt die Verhältnisse in diesem Falle; c ist ein beliebiger Kegelschnitt durch $B_1 = B_2$, \bar{c} dessen Bild auf der Fläche und γ die Trägerebene von \bar{c} .



Figur 4

Zwei nichtausgeartete Kegelschnitte c_1 und c_2 haben als Bilder zwei Ellipsen \bar{c}_1 und \bar{c}_2 , die als ebene Zylinderschnitte stets perspektiv-kollinear sind (Affinität mit der Mantellinienrichtung als Affinitätsrichtung). Die Rückprojektion dieser Perspektivität auf die Ebene π führt auf den im folgenden Satz ausgesprochenen Sachverhalt.

Satz 6. Zwei nichtausgeartete Kegelschnitte, die sich in einem Punkte B berühren, sind stets perspektiv-kollinear mit dem Zentrum B .

Die festgestellte Kollineation zwischen c_1 und c_2 wird als *Berührungs kollineation* bezeichnet.

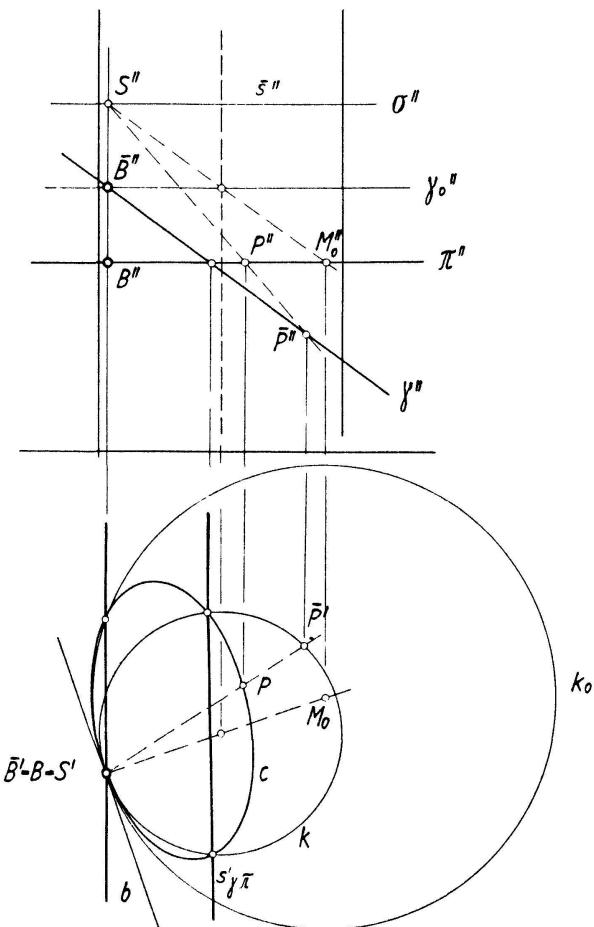
Einem Ebenenbüschel Γ mit der Trägergeraden \bar{g} entspricht jetzt in π ein Büschel von Kegelschnitten, die sich in B berühren. Ist \bar{g} speziell mit der Zylindermantellinie m durch S inzident, so liegt in π ein Kegelschnittbüschel vor, dessen Kurven in B sogar drei benachbarte Punkte gemeinsam haben. Dies bedeutet aber, dass in B die Krümmungen übereinstimmen. Aus dieser Tatsache entspringt ohne weiteres der

Satz 7. Den Kegelschnitten c von π , die in B dieselbe Krümmung haben, entspricht das Ebenenbüschel durch einen Punkt \bar{B} auf der Mantellinie m .

Die Parallelebene γ_k zu π im Ebenenbündel durch \bar{B} hat als Bild den Krümmungskreis c_k der Kegelschnitte c . Bezeichnen wir den Radius des Zylinderleitkreises k mit r , so besteht zwischen der Lage von \bar{B} und dem Radius ϱ des Krümmungskreises die Beziehung

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{h}{SB}$$

Dem Satz 7 lässt sich leicht eine Konstruktion für den Krümmungskreis in einem



Figur 5

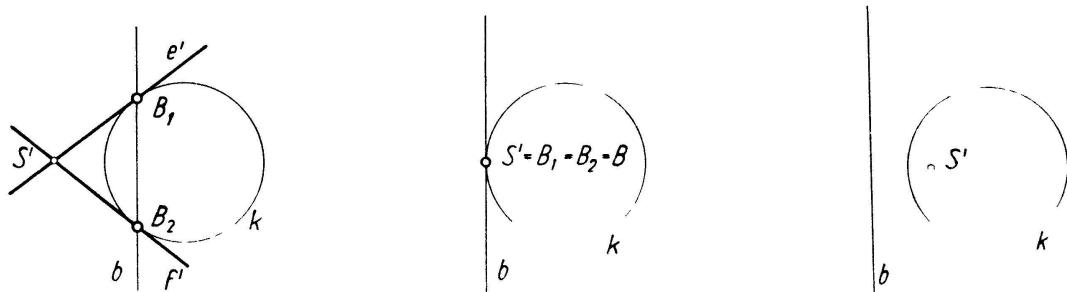
allgemeinen Punkt B eines Kegelschnittes c entnehmen. Sie ist in Figur 5 durchgeführt. Der Grundriss ist dort so gedreht, dass die Ebene γ projizierend wird, was aber nicht unbedingt notwendig ist. Bei geeigneter Wahl der Hilfslinien kann man erreichen, dass im Grundriss die bekannte Krümmungskreiskonstruktion entsteht, die auf der Verwendung von Berührungs kollineationen beruht¹⁾.

4. Die Punkte B_1 und B_2 sind konjugiert komplex

Fassen wir wieder b und k als primäre Objekte auf, so verläuft jetzt b ausserhalb von k . Die in diesem Falle auftretende Fläche zweiter Ordnung kann ohne weiteres

¹⁾ Die erwähnte Konstruktion ist unlängst in dieser Zeitschrift erschienen: F. THOMISSEN und G. TROMP, *Über einige Konstruktionen, die auf den Sätzen von Pascal und Sturm beruhen*, El. Math. 7, Fasz. 1, 5–8 (1952).

erhalten werden durch Verwendung komplexer Raumelemente. Um aber auf dem Boden des Anschaulichen zu bleiben, soll ein anderer Weg eingeschlagen werden. Eine Gegenüberstellung der drei möglichen Lagen von b und k , wie sie in Figur 6 vorliegt, gibt uns sofort einen Hinweis auf den Typus der gesuchten Rotationsfläche. In den beiden bis jetzt erledigten Fällen war der Grundriss S' des Projektionszentrums der Pol zur Geraden b bezüglich k ; zugleich war S Berührungs punkt der Flächentangentialebene mit der 1. Spur b . Versuchen wir diesen Sachverhalt für den nun vorliegenden Fall zu übernehmen, so liegt jetzt der Pol S' zu b innerhalb von k . Als Rotationsfläche mit der Symmetrieebene π kommt daher nur ein Ellipsoid in Frage. Ähnlich wie wir im ersten Falle stets ein spezielles Hyperboloid (Öffnungswinkel des Asymptotenkegels 90°) verwendet haben, können wir uns hier auf die



Figur 6

b schneidet den Kegelschnitt
 B_1, B_2 reell getrennt
Fläche: einschaliges Hyperboloid

b berührt den Kegelschnitt
 B_1, B_2 zusammenfallend
Fläche: Rotationszylinder

b meidet den Kegelschnitt
 B_1, B_2 konjugiert komplex
Fläche: Kugel (Rotationsellipsoid)

S ist Berührungs punkt der Flächentangentialebene durch b ;
In der Projektion: S' ist Pol zu b bezüglich k .

Kugel mit dem Grosskreis k beschränken. S ist wiederum Berührungs punkt der Flächentangentialebene mit der 1. Spur b . Die Erzeugenden e und f sind isotrope Geraden dieser Ebene.

Ist b die unendlichferne Gerade von π , so ist B_1 und B_2 das Paar der zyklischen Punkte. S' ist dann Mittelpunkt von k . Unsere Abbildung der Ebene π auf die Rotationsfläche zweiter Ordnung durch k ist in diesem Falle mit der sogenannten *stereographischen Projektion* identisch. Aus unseren bisherigen Betrachtungen folgt ohne weiteres, dass die stereographische Projektion kreistreu ist.

5. Die allgemeine stereographische Projektion

Es sei jetzt F_2 eine beliebige gekrümmte Fläche zweiter Ordnung und S ein regulärer Punkt auf derselben. Die beiden (reellen oder komplexen) Erzeugenden durch S seien mit e und f bezeichnet. Ferner sei π eine Ebene, von der wir nur verlangen, dass sie von der Tangentialebene in S verschieden ist; B_1 und B_2 seien die Durchstosspunkte von e und f mit π .

Die Projektion der Punkte in π von S aus auf die Fläche F_2 ist eine eineindeutige Abbildung, wenn wir auf F_2 den Punkt S herausheben und von π die Verbindungs-

gerade b von B_1 und B_2 weglassen. Die stereographische Projektion der Kugel ist ein Spezialfall dieser Abbildung, und wir wollen sie daher als *allgemeine stereographische Projektion* bezeichnen.

Wie man leicht einsieht, kommen der allgemeinen stereographischen Projektion sämtliche Eigenschaften zu, die wir für die drei diskutierten Abbildungstypen festgestellt haben.

Als Beispiel zur Anwendung der allgemeinen stereographischen Projektion soll der folgende Satz von *Sturm* bewiesen werden:

Sind drei Kegelschnitte c_1 , c_2 und c_3 , die nicht zusammen einem Büschel angehören, mit zwei Punkten B_1 und B_2 inzident, so gehen die Verbindungsgeraden der übrigen Punkte, die sie zu je zweien gemeinsam haben, durch einen Punkt (Sturmscher Punkt)¹⁾.

Beweis. Es sei π die Ebene der drei Kegelschnitte c_1 , c_2 und c_3 . Durch stereographische Projektion der Ebene π auf eine geeignete Fläche zweiter Ordnung, die so im Raum liegt, dass die beiden Erzeugenden e und f durch das Projektionszentrum S die Ebene π gerade in den Punkten B_1 und B_2 durchstossen, erhalten wir drei Bildkegelschnitte \bar{c}_1 , \bar{c}_2 und \bar{c}_3 bzw. drei Ebenen γ_1 , γ_2 und γ_3 . Diese drei Ebenen gehören infolge der Voraussetzung über die Kegelschnitte c_i nicht einem Büschel an und schneiden sich daher in einem Punkte \bar{H} . Bezeichnen wir die Schnittgerade von γ_i und γ_k mit \bar{g}_{ik} , so ist \bar{H} zugleich Schnittpunkt der drei Geraden \bar{g}_{12} , \bar{g}_{23} und \bar{g}_{31} . Durch Rückprojektion der beschriebenen räumlichen Figur auf die Ebene π entsteht dort die Sturmsche Figur: Die drei Verbindungsgeraden g_{12} , g_{23} und g_{31} der restlichen Schnittpunkte von je zwei Kegelschnitten c_i und c_k laufen durch einen Punkt H , den Bildpunkt von \bar{H} .

6. Einige Konstruktions- und Überlegungsaufgaben zur allgemeinen stereographischen Projektion

1. Man beschreibe das stereographische Bild des gemeinsamen Polardreiecks eines Kegelschnittbüschels C (Satz 2).
2. Es ist ein Kegelschnittbüschel C mit vier endlichen Grundpunkten B_1 , B_2 , G_1 und G_2 gegeben. Man konstruiere mit Hilfe der stereographischen Projektion
 - a) die in C enthaltene gleichseitige Hyperbel;
 - b) diejenige Hyperbeln von C mit dem vorgegebenen Asymptotenwinkel ω .
[Die Lösung geht aus Abschnitt 1 (Figur 2) hervor.]
3. In einem Kegelschnittbüschel C mit vier endlichen Grundpunkten konstruiere man die beiden Parabeln (Satz 4).
4. In einem Büschel aus gleichseitigen Hyperbeln konstuiere man diejenige mit vorgeschriebenen Asymptotenrichtungen (Satz 3).
5. Auf welche stereometrische Aufgabe führt das Problem, einen Kegelschnitt aus vier Punkten und einer Tangente zu konstruieren?

¹⁾ Eine Figur zu diesem Satze findet sich in der bereits erwähnten Arbeit von F. THOMISSEN und G. TROMP (siehe Fussnote 1, Seite 108). Dort wird auch ein kurzer synthetischer Beweis des Sturmschen Satzes angeführt, der allerdings sehr unvollständig ist. Es werden ausgeartete Kegelschnitte ausgeschlossen, und zudem wird der Fall $B_1 = B_2$ nicht berücksichtigt, obwohl sämtliche nachfolgenden Anwendungen gerade auf diesen beiden Spezialfällen beruhen.

6. Für ein Kegelschnittbüschel, dessen vier Grundpunkte auf einem Kreise liegen, ermittle man die gemeinsamen Achsenrichtungen (Figur 3).
7. Man beweise den Desargueschen Involutionssatz für Kegelschnittbüschel, welcher besagt, dass die Kurven des Büschels auf jeder Geraden m involutorische Punktreihen herausschneiden.
(Man verwende den Kegelschnitt, der durch die Verbindungsebene μ von m und S aus der Fläche zweiter Ordnung herausgeschnitten wird).
8. Welche stereometrische Aufgabe geht aus dem planimetrischen Problem hervor, einen Kreis zu konstruieren, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine vorgegebene Gerade berührt?
9. Von einem Kegelschnitt c kennt man drei Punkte A, B, P sowie den Krümmungskreis in P . Man konstruiere die beiden Tangenten in A und B (Figur 5).
10. Welche geometrischen Zusammenhänge deckt der Sturmsche Satz in den folgenden drei Spezialfällen auf?
 - a) zwei Kegelsnitte sind ausgeartet, der dritte hingegen ist nicht ausgeartet;
 - b) alle drei Kegelsnitte sind ausgeartet;
 - c) c_1, c_2 und c_3 sind Kreise.

M. JEGER, Olten und Zürich.

Ungelöste Probleme

Nr. 1. Herr G. PÓLYA weist darauf hin (Brief vom 27. April 1954 an den Unterzeichneten), dass es wünschenswert wäre, einen einfachen Beweis der Ungleichung

$$L^4 - 32 \pi^3 I \geqq 0$$

zu kennen. L bezeichnet den Umfang eines ebenen konvexen Bereichs und I das polare Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes. Gleichheit besteht für den Kreisbereich. Die Ungleichung ist unseres Wissens erstmals von G. PÓLYA und G. SZEGÖ (*Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* [Princeton 1951], S. 10) mitgeteilt und im Zusammenhang mit andern sich auf weitere Bereichsfunktionale beziehenden Relationen bewiesen worden. Eine von der dort entwickelten Theorie unabhängige Herleitung der Ungleichung, die mit einfachen Hilfsmitteln auskommt, ist nicht bekannt und auch dem Unterzeichneten nicht gelungen.

H. HADWIGER, Bern.

Aufgaben

Aufgabe 189. Es bedeute ω die Masszahl des Raumwinkels einer Ecke eines regelmässigen Polyeders und Ω die Masszahl der Summe der Raumwinkel des Polyeders ($\Omega = e \omega$, wobei e die Eckenanzahl). Als Einheit nehmen wir den vollen Raumwinkel; für den Würfel ist also $\omega = 1/8$, $\Omega = 1$. Zwischen den Zahlen Ω der regelmässigen Polyeder bestehen eigentümliche Beziehungen, die anzugeben und zu beweisen sind.