Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 9 (1954)

Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Da die arithmetische Wurzel in der Mathematik und den Naturwissenschaften am häufigsten vorkommt und die Wurzelregeln für diese Art Wurzeln auch uneingeschränkt gültig sind, wäre es wohl angebracht, das althergebrachte Wurzelzeichen für die Bezeichnung der arithmetischen Wurzeln beizubehalten.

Für die Bezeichnung der komplexen Wurzeln könnte man das Zeichen $\overrightarrow{\sqrt[n]{\ }}$ wählen, das an die Verwandtschaft zwischen komplexen Zahlen und Vektoren deutlich erinnert. Ein neues Zeichen für die algebraischen Wurzeln wäre dann nicht notwendig, da jede algebraische Wurzel als Sonderfall einer komplexen Wurzel angesehen werden kann. Durch einen Index könnte man die einzelnen Wurzelwerte noch unterscheiden.

Beispiele:

$$\sqrt{4}=2; \quad \overrightarrow{\sqrt{4}}=\pm 2; \quad \underset{k=0}{\overrightarrow{\sqrt{4}}}=+2; \quad \underset{k=1}{\overrightarrow{\sqrt{4}}}=-2.$$

$$\sqrt[3]{8}=2; \quad \overrightarrow{\sqrt[3]{8}}= \text{die Gesamtheit der Werte } +2,\ -1+j\sqrt{3},\ -1-j\sqrt{3};$$

$$\underset{k=0}{\overrightarrow{\sqrt[3]{8}}}=+2; \quad \underset{k=1}{\overrightarrow{\sqrt[3]{8}}}=-1+j\sqrt{3}; \quad \underset{k=2}{\overrightarrow{\sqrt[3]{8}}}=-1-j\sqrt{3}.$$

$$\left|\overrightarrow{\sqrt[3]{8}}\right|=\sqrt[3]{|8|}=2; \quad \text{allgemeiner: } \left|\overrightarrow{\sqrt[n]{z}}\right|=\sqrt[n]{|z|}.$$

Für die Bezeichnung der reellen negativen ungeraden Wurzel einer reell negativen Zahl könnte man übrigens ohne Missverständnis das alte Wurzelzeichen beibehalten.

Beispiel:
$$\underset{k=1}{\overrightarrow{\sqrt[3]{-8}}}=\sqrt[3]{-8}=-2;$$

aber
$$\underset{k=1}{\overrightarrow{\sqrt[3]{-8}}}=+1+j\sqrt{3}; \quad \underset{k=2}{\overrightarrow{\sqrt[3]{-8}}}=+1-j\sqrt{3}; \quad \sqrt[3]{|-8|}=\left|\overrightarrow{\sqrt[3]{-8}}\right|=2.$$

Schliesslich könnte man die erwähnte Unterscheidung zwischen den drei Arten von Wurzeln sinngemäss auch auf die Potenzen mit gebrochenen Exponenten übertragen.

R. Rose, Saarbrücken.

Bemerkung der Redaktion: Es gibt mehrere Bücher, in denen auf die im obigen Artikel genannten Schwierigkeiten aufmerksam gemacht und die Schreibweise der Wurzeln sorgfältig diskutiert wird. Zum Beispiel: P. Buchner, *Algebra* (vierter Teil, zweite Auflage) (Orell-Füssli-Verlag, Zürich 1953), Seite 26f.

Aufgaben

Aufgabe 184. In der Gruppentheorie werden für nichtkommutative Gruppen spezielle höhere Kommutatoren auf folgende Weise rekursiv definiert:

$$(x, y) = x\,y\,x^{-1}\,y^{-1},$$

$$(x, y, y) = [(x, y), y] = x\,y\,x^{-1}\,y\,x\,y^{-1}\,x^{-1}\,y^{-1} \quad \text{usw.}$$

Enthält der Kommutator n Elemente y, so ist

$$(x, y, y, \ldots, y) = \prod_{k=1}^{2^n} x^{a_k}\,y^{b_k},$$

wo $a_k=(-1)^{k+1}$. Man bestimme b_k als Funktion von k. E. Trost, Zürich.

Lösung: Der n-te Kommutator der betrachteten Folge sei $(x, y)_n$, also

$$(x, y)_1 = x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}.$$

Aus der in der Aufgabe angegebenen Darstellung folgt nun

$$(x, y)_{n+1} = \left(\prod_{k=1}^{2^n-1} x^{a_k} y^{b_k}\right)\left(x^{a_{2^n}} y\right)\left(\prod_{k=2^n}^{2} x^{-a_k} y^{-b_{k-1}}\right)\left(x^{-a_1} y^{-1}\right). \tag{1}$$

$(x, y)_{n+1}$ hat also dieselbe Form wie $(x, y)_n$. Ersichtlich sind die Exponenten $a_k = \pm 1$, $b_k = \pm 1$; sie sind nur von k, aber nicht von n abhängig, mit der alleinigen Ausnahme des letzten Exponenten $b_{2^n} = -1$. Hieraus ergibt sich sofort

$$\underline{b_{2^m} = (-1)^{2^{n-m}} \qquad (m \leqq n).}$$

Aus (1) lesen wir ab

$$a_{2^n+i} = -a_{2^n-i+1} \qquad (1 \leqq i \leqq 2^n), \tag{2}$$

$$b_{2^n+i} = -b_{2^n-i} \qquad (1 \leqq i \leqq 2^n - 1). \tag{3}$$

Mit (2) erkennen wir leicht, dass allgemein

$$\underline{a_k = (-1)^{k+1}.}$$

Wegen $a_k = \pm 1$ müssen wir nur $a_k \equiv 2k - 1 \pmod 4$ zeigen. Das stimmt für $k = 1$ und $k = 2$. Nehmen wir es für alle k mit $1 \leqq k \leqq 2^n$ $(n \geqq 1)$ an, so folgt aus (2) für $1 \leqq i \leqq 2^n$ wegen $2^{n+1} \equiv 0 \pmod 4$

$$a_{2^n+i} \equiv -(2^{n+1} - 2i + 1) \equiv 2^{n+1} + 2i - 1 \pmod 4.$$

Nun setzen wir $k = 2^s u$, wo u ungerade sein soll. Dann gilt mit der alleinigen Ausnahme $k = 2^n$

$$\underline{b_k = (-1)^{(u-1)/2}.}$$

Zum Beweis müssen wir zeigen, dass $b_k \equiv u \pmod 4$. Das gilt für $k = 1$ und $k = 2$ $(u = 1)$. Wir nehmen es für $1 \leqq k \leqq 2^n$ $(n \geqq 1)$ als richtig an. Für $1 \leqq i \leqq 2^n - 1$ ist $i = 2^s u$ mit $s \leqq n - 1$, also $2^n \pm i = 2^s (2^{n-s} \pm u)$, wo die Klammer ungerade ist. Aus (3) folgt nun wegen $2^{n-s+1} \equiv 0 \pmod 4$

$$b_{2^n+i} = -b_{2^n-i} \equiv -(2^{n-s} - u) \equiv 2^{n-s} + u \pmod 4.$$

Hieraus ergibt sich die allgemeine Gültigkeit durch vollständige Induktion.

A. BAGER, Hjørring.

Eine weitere Lösung sandte A. UNTERBERGER, Bludenz.

Aufgabe 185. Erweiterung der «Schachtelaufgabe»: Aus einem quadratischen Karton werden an den vier Ecken kongruente Deltoide (statt der üblichen Quadrate) ausgeschnitten, worauf die verbleibenden Randtrapeze aufgebogen werden, so dass eine Schachtel in Form eines Pyramidenstumpfes entsteht. Welche Abmessungen müssen die ausgeschnittenen Zwickel haben, damit das Schachtelvolumen ein Maximum wird, und welche Neigung gegen den Boden besitzen dann die Seitenflächen?

W. WUNDERLICH, Wien.

Lösung des Aufgabenstellers: Behandeln wir die Aufgabe gleich allgemeiner für einen Karton von der Gestalt eines regelmässigen n-Ecks, dessen Inkreisradius als Längeneinheit diene. Bezeichnen wir die Inkreishalbmesser des Schachtelbodens bzw. -randes mit x bzw. y, dann gilt für die Schachtelhöhe z

$$z^2 = (1 - x)^2 - (y - x)^2 = (1 - y)(1 - 2x + y). \tag{1}$$

Das Schachtelvolumen V berechnet sich mittels einer von n abhängigen Konstanten c

nach der Formel

$$V = c\,q\,z, \qquad \text{wobei} \qquad q = x^2 + x\,y + y^2. \tag{2}$$

Um das Maximum der gleichwertigen Grösse

$$Q = q^2 z^2 \tag{3}$$

zu ermitteln, ist das durch partielle Ableitung nach x bzw. y gewonnene Gleichungspaar

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2} Q_x &= q\,(2\,x + y)\,(1 - y)\,(1 - 2\,x + y) - q^2\,(1 - y) = 0, \\ \frac{1}{2} Q_y &= q\,(x + 2\,y)\,(1 - y)\,(1 - 2\,x + y) + q^2\,(x - y) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

aufzulösen. Nach Kürzung durch die nichtverschwindenden Faktoren q und $1 - y$ und geeignete Linearkombinationen gelangt man zu den äquivalenten Gleichungen

$$x^2 + x\,y + y^2 = x + y, \qquad 4\,x^2 - y^2 = x, \tag{5}$$

deren Auflösung über die Hilfsgrösse

$$t = \frac{y}{x} \tag{6}$$

auf die kubische Gleichung

$$t^3 + 2\,t^2 - 3\,t - 3 = 0 \tag{7}$$

zurückgeführt werden kann. Diese besitzt nur eine positive Wurzel

$$t = 1{,}4605\ldots, \tag{8}$$

und hierzu gehören zufolge (5) die Werte

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1 + 1}{1 + t + t^2} = \frac{1}{21}\,(9 + 3\,t - t^2) &&= 0{,}5356\ldots, \\ y &= \quad t\,x \quad = \frac{1}{21}\,(-3 + 6\,t + 5\,t^2) &&= 0{,}7823\ldots. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hiermit sind auch die Abmessungen der auszuschneidenden Deltoide in leicht ersichtlicher Weise festgelegt. Aus (1) folgt ferner die Höhe

$$z = \sqrt{\frac{12 - 3\,t + t^2}{63}} = 0{,}3934\ldots. \tag{10}$$

Die Aussenneigung der Seitenflächen ergibt sich – gleichfalls unabhängig von der Seitenzahl n – aus

$$\cos\alpha = \frac{y - x}{1 - x} = 1 - t^{-2} \qquad \text{oder} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{t\sqrt{2}} \tag{11}$$

zu

$$\alpha = 57^\circ\,55'\ldots. \tag{12}$$

Auf die etwas umständliche Nachprüfung der Maximumsbedingungen

$$Q_{xx}\,Q_{yy} - Q_{xy}^2 > 0, \qquad Q_{xx} < 0$$

– die tatsächlich erfüllt sind – soll hier nicht eingegangen werden.

Im vorgelegten Spezialfall $n = 4$ ist $c = 4/3$, und das Maximalvolumen beträgt $V \approx 0{,}691$; es überbietet damit den sich im Falle der üblichen quadratischen Ausschnitte (für $x = y = 2/3$) einstellenden Grösstinhalt $V' = 16/27 \approx 0{,}593$ um fast 17%.

Lösungen für den Spezialfall $n = 4$ sandten E. ROTHMUND (Zürich) und A. UNTERBERGER (Bludenz).

Aufgabe 186. Variante der «Schachtelaufgabe»: Aus einem quadratischen Karton werden an den vier Ecken krummlinig begrenzte Zwickel ausgeschnitten, derart, dass die verbleibenden Randstücke, längs Viertelkreiszylindern aufgebogen, sich lückenlos zusammenschliessen. Für welchen Zylinderradius erhält der entstehende Behälter den grössten Inhalt? W. WUNDERLICH, Wien.

Lösung: Wir lösen die Aufgabe für einen rechteckigen Karton mit den Seitenlängen a und b. r sei der Zylinderradius, der gleichzeitig die Höhe des Behälters ist. Für das Volumen ergibt sich durch Zerlegung in einen Quader, vier Viertelszylinder und acht halbe Zylinderhufe

$$V = r(a - \pi r)(b - \pi r) + \frac{\pi r^2}{2}(a + b - 2\pi r) + \frac{8}{3} r^3$$

$$= \frac{8}{3} r^3 - \frac{\pi r^2}{2}(a + b) + a b r.$$

Der aus

$$V' = 8 r^2 - \pi r (a + b) + a b = 0$$

sich ergebende Wert

$$r = \frac{\pi(a + b) - \sqrt{\pi^2 (a + b)^2 - 32 a b}}{16}$$

macht die zweite Ableitung negativ und ist somit der gesuchte Radius. Im Spezialfall $a = b$ erhält man $r = 0{,}22178\ldots a$. E. ROTHMUND, Zürich.

Bemerkung des Aufgabenstellers: Für $a = b = 1$ ist das Maximalvolumen $V = 0{,}0963$. Es übertrifft den bei der normalen Schachtelaufgabe erreichbaren Grösstinhalt $V = 2/27$ um etwa 30%.

Was die auszuschneidenden Zwickel betrifft, so sind diese, den Viertelellipsen entsprechend, in denen benachbarte Zylinderwände zusammenstossen, durch Sinuslinien der Amplitude r zu begrenzen; die auftretenden Bögen beginnen auf einer Quadratseite mit einem Scheitel und enden beim nächsten Wendepunkt, dessen Tangente mit einer Quadratdiagonale zusammenfällt.

Weitere Lösungen sandten A. UNTERBERGER (Bludenz), J. SCHOPP (Budapest) und J. STROMMER (Budapest).

Aufgabe 187. Verallgemeinerung der «Schachtelaufgabe»: Aus einem quadratischen Karton sind an den vier Ecken kongruente, krummlinig begrenzte Zwickel auszuschneiden, derart, dass der durch zylindrisches Aufbiegen der Reststücke entstehende Behälter den grösstmöglichen Inhalt bekommt. Welches Profil erhalten hierbei die Seitenwände? W. WUNDERLICH, Wien.

Lösung des Aufgabenstellers: Zur Untersuchung des Mittelschnittes werde ein Normalkoordinatensystem eingeführt, dessen x-Achse in der Bodenebene liegt und dessen y-Achse hierzu senkrecht ist. Bezeichnet ferner s die vom Ursprung aus gemessene Bogenlänge und gilt die halbe Quadratseite als Längeneinheit, so wird das Volumen durch das Integral

$$V = 4 \int x^2\, dy = 4 \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x'^2}\, ds \tag{1}$$

ausgedrückt, und es liegt das Variationsproblem vor, die Funktion $x(s)$ so zu bestimmen, dass das Integral ein Maximum annimmt.

Die Aufstellung der Eulerschen Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{ds} \cdot \frac{\partial F}{\partial x'} = 0,$$

in der F den Integranden bedeutet, führt auf die Differentialgleichung

$$x x'' + 2(1 - x'^2) = 0. \tag{2}$$

Diese lässt sich durch die Substitution

$$x' = t \qquad \left(x'' = \frac{dt}{ds} = \frac{dt}{dx} t\right) \tag{3}$$

zurückführen auf die Gleichung

$$\frac{2\,dx}{x} = \frac{t\,dt}{t^2 - 1}, \tag{4}$$

die sich unmittelbar integrieren lässt zu

$$4 \ln x = \ln(1 - t^2) + \ln C \tag{5}$$

oder, mit $C = a^4$,

$$x^4 = a^4 (1 - t^2). \tag{6}$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von $t\,(= dx/ds)$ folgt daraus

$$\frac{ds}{dx} = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 - x^4}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{\sqrt{a^4 - x^4}}. \tag{7}$$

Aus Symmetriegründen – man denke sich den Behälter an der Randebene gespiegelt – muss für $s = 1$ $dx = 0$, also $x = a$ sein. Der Wert von a, der halben Randbreite, ergibt sich mithin über (7_1), wobei zweckmässig die dimensionslose Hilfsgrösse $x/a = u$ eingeführt wird; aus

$$s_1 = 1 = a \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}} = \frac{a}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

worin $K\,(= 1{,}8541)$ das vollständige Legendresche Normalintegral erster Gattung ist, erhält man

$$a = \sqrt{2} : K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0{,}7627. \tag{8}$$

Aus (7_2) gewinnt man wiederum die Randhöhe

$$y_1 = b = a \int_0^1 \frac{u^2\,du}{\sqrt{1 - u^4}} = a\sqrt{2}\,E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0{,}4568, \tag{9}$$

wobei $E\,(= 1{,}3506)$ das vollständige Legendresche Normalintegral zweiter Gattung ist. Das erreichte Volumen hat schliesslich gemäss (1) und (7_2) den Wert

$$V = 4\,a^3 \int_0^1 \frac{u^4\,du}{\sqrt{1 - u^4}} = \frac{4}{3}\,a^2 = 0{,}7757; \tag{10}$$

damit wird der bei der üblichen Schachtelaufgabe erzielbare Grösstinhalt $V' = 16/27 = 0{,}5926$ um 31% übertroffen.

Der Zwickelrand bzw. das Wandprofil werden durch die bei der Integration der Gleichungen (7) sich ergebenden (unvollständigen) elliptischen Integrale $s = s(x)$ bzw. $y = y(x)$ beschrieben. Die Profilkurve ist durch eine bemerkenswerte geometrische Eigenschaft ausgezeichnet, indem ihr Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{1}{x' y'' - x'' y'} = \frac{a^2}{2x} \tag{11}$$

und ihre Subnormale (bezüglich der y-Achse)

$$N = \frac{x}{y'} = \frac{a^2}{x} \tag{12}$$

das konstante Verhältnis 1:2 aufweisen. Es handelt sich mithin um eine spezielle Ribaucoursche Kurve, die sich übrigens auch als Sturmsche Kurve auffassen lässt, da sie, wie unschwer nachzuprüfen ist, als Bahnkurve des Mittelpunktes einer gleichseitigen Hyperbel auftritt, wenn diese auf einer Geraden rollt.

A. Unterberger (Bludenz) gewinnt (7_2) durch folgende Überlegungen: Mit (1) muss auch $\pi \int\limits_0^{y_0} x^2\, dy$ ein Extremum sein, wo y_0 die Höhe des oberen Schalenrandes ist. Das ist aber das Volumen eines Rotationskörpers mit gleichem Meridian $x = x(y)$. Denkt man sich diese Drehfläche von einer Flüssigkeit erfüllt und soll durch Zufluss das Volumen bei biegsamen, längenkonstanten Meridianen maximal werden, dann muss die Flüssigkeit an jeder Wandstelle denselben Druck verursachen. Die statischen Gleichgewichtsbedingungen am derart belasteten Meridian ergeben für diesen die Differentialgleichung

$$x\, x'' + 2\, x'^2 + 2 = 0, \qquad x' = \frac{dx}{dy}.$$

$x' = p(x)$ liefert die integrable Gleichung

$$\frac{p\, dp}{p^2 + 1} = -2\, \frac{dx}{x} \quad \text{mit der Lösung} \quad \frac{C}{x^4} = x'^2 + 1,$$

wo in (7_2) $C = a^4$ ist.

Aufgabe 188. Ein Punkt heisse «rational in bezug auf ein zweidimensionales kartesisches Koordinatensystem», wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind. Man beweise: Wenn eine Kreislinie drei im obigen Sinne rationale Punkte enthält, dann liegen solche auf ihr überall dicht. A. Stoll, Zürich.

1. Lösung: O, A, B seien rationale Punkte auf einer Kreislinie c. Da eine Parallelverschiebung $x = x' + a$, $y = y' + b$ mit rationalen a, b das System der rationalen Punkte als ganzes invariant lässt, können wir $O = (0, 0)$ annehmen. Die Inversion

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

lässt auch das genannte System invariant und führt A, B in rationale Punkte A', B' auf dem Bild c' von c über. c' ist aber eine Gerade. Die rationalen Punkte von c' sind genau die Punkte, die $A'B'$ in rationalem Verhältnis teilen. Sie liegen überall dicht auf c'. Wegen der Stetigkeit der Abbildung liefert die Inversion nun rationale Punkte, die überall dicht auf c liegen. A. Bager, Hjørring (Dänemark).

2. Lösung: Da sich die Gleichung des Kreises durch die drei Punkte mit rationalen Koeffizienten schreiben lässt, wird jede Gerade mit rationaler Steigung m, die durch einen rationalen Punkt geht, den Kreis in einem zweiten rationalen Punkt schneiden. Da die Gesamtheit der rationalen m überall dicht ist, gilt dasselbe für die betrachteten Schnittpunkte. C. Bindschedler, Küsnacht; J.-P. Boss, La Chaux-de-Fonds.

3. Lösung: Der Kreis kann in der komplexen Zahlenebene durch die Doppelverhältnisgleichung

$$(z_1\, z_2\, z_3\, z) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z - z_1}{z - z_2} = \lambda$$

dargestellt werden, wobei λ alle reellen Zahlen durchläuft (einschliesslich ∞). Sind z_1, z_2, z_3 rationale Punkte, so liefert jedes rationale λ einen rationalen Punkt z.

H. LENZ, München, E. STAMM, Zürich.

Herr J. SCHOPP (Budapest) teilt uns folgende Verallgemeinerung mit: Wenn eine Kegelschnittlinie fünf rationale Punkte enthält, dann liegen die rationalen Punkte auf ihr überall dicht.

Seien 1, 2, 3, 4, 5 die fünf rationalen Punkte des Kegelschnittes. Wir zeigen, dass zwischen 1 und 5 weitere rationale Kegelschnittpunkte liegen. Sei P der Schnittpunkt der Geraden 1, 2 und 4, 5; sei weiterhin R ein rationaler Punkt auf 3, 4. Bezeichnen wir den Schnittpunkt von 2, 3 und R, 5 mit Q. PQ ist eine Pascal-Gerade des Kegelschnittes. Der gemeinsame Punkt S von 3, 4 mit der Pascal-Geraden ist ein Punkt von 1, 6, somit ist der Kegelschnittpunkt 6, der Schnittpunkt von Q, 5 und S, 1.

Da sämtliche Koeffizienten der obigen Pascal-Konfiguration rational sind, ist auch der Punkt 6 rational. Da aber die rationalen Punkte auf 3, 4 überall dicht liegen, liegen auch die rationalen Kegelschnittpunkte überall dicht.

Weitere Lösungen sandten R. LAUFFER (Graz) und J. STROMMER (Budapest).

Berichtigung

In Aufgabe 194 (El. Math. *8*, 143 [1953]) muss 3° ersetzt werden durch:

3° Si a varie, les paraboles p_1 et p_2 ont trois tangentes communes fixes et une tangente commune variable v. v enveloppe une courbe de quatrième classe.

4° Le lieu des foyers des paraboles p_1 est le cercle centré sur s et passant par B et par l'intersection de s et de AB.

5° Soit encore $B'(A')$ la projection de $A(B)$ à partir de l'intersection de a et de s, sur la perpendiculaire menée par $B(A)$ à s. Soient p_1' et p_2' les paraboles de foyers A' et B', tangentes à s. Les paraboles p_1' et p_2' se coupent en deux points R et S. Laissant A et B fixes, on fait varier a. Les points R et S engendrent deux nouvelles paraboles symétriques par rapport à s, passant par les projections de A et B sur s et dont le demi-paramètre est égal à la moyenne géométrique des distances de A et B à s.

Neue Aufgaben

214. Gegeben ist ein Kreis K_0 und eine Gerade g. Gesucht wird der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises K, der K_0 so berührt, dass ein Ähnlichkeitspunkt von K und K_0 auf g liegt.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

215. A, B, C sont les sommets d'un triangle donné; M un point de son plan; A', B', C' les sommets respectifs du triangle pédal qui correspond à M. On demande le lieu des points M pour lesquels les sens definis par ABC et $A'B'C'$ sont contraires et

$$\text{Aire}\,(A'B'C') = 2\ \text{Aire}\,(ABC)\,.$$

G. N. VLAHAVAS, London.

216. Gegeben sind zwei windschiefe Strecken AB und CD. Man konstruiere zwei berührend aneinanderschliessende Kreisbogen vom gleichen Radius, von denen der eine AB in A, der andere CD in C berührt.

J. STROMMER, Budapest.

217. Bestimme alle natürlichen Zahlen $g \geqq 2$ mit folgender Eigenschaft: Im Zahlensystem mit der Grundzahl g gibt es für beliebige natürliche n Quadratzahlen, deren letzte Ziffer 1 ist, während die n unmittelbar vorangehenden Ziffern beliebig vorgegeben sind.

A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

218. Man beweise die Relation

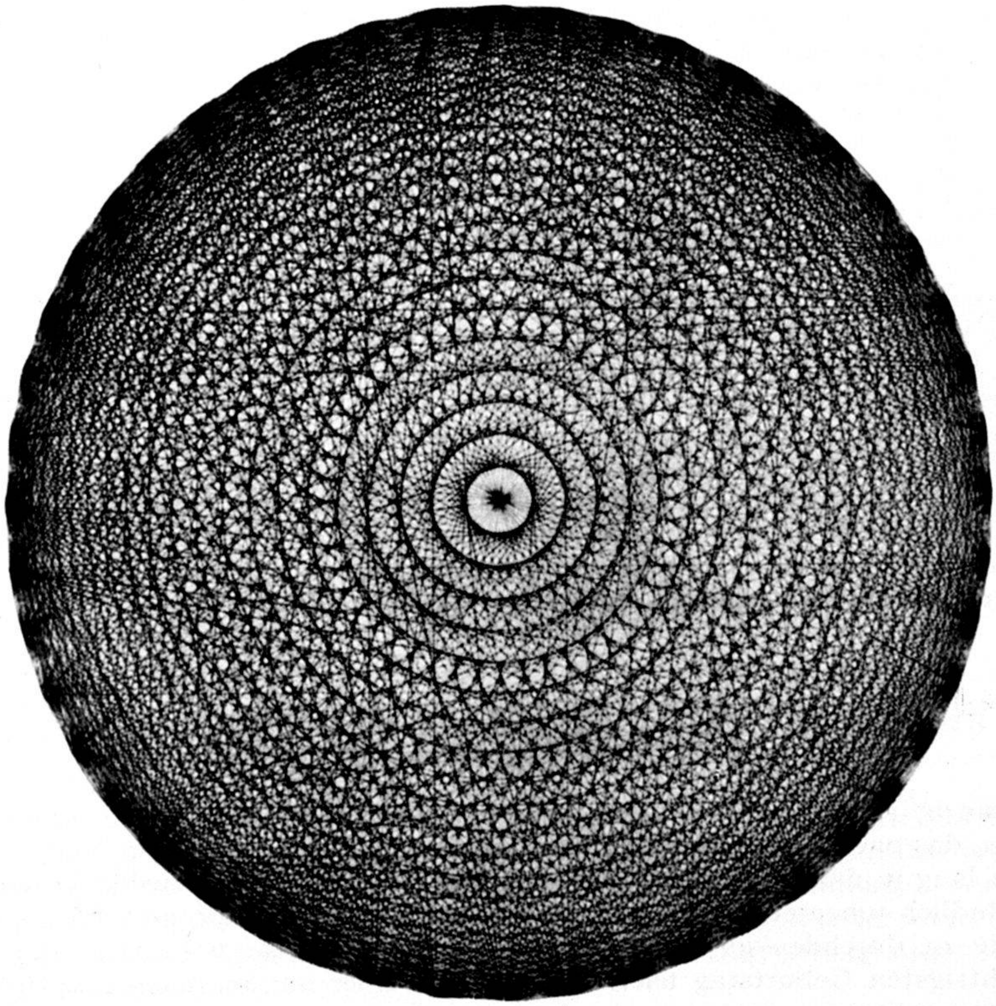
$$\alpha \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\alpha+\vartheta)}{(n\alpha+\vartheta)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x\,dx}{x^2} = \pi ,$$

wo ϑ eine feste Zahl ist, und die bekanntlich gilt für $\alpha \to 0$[1]), für jeden Wert von α in $0 < \alpha \leqq \pi$. M. G. BEUMER, Bergen op Zoom (Holland).

219. Eine projektive Ebene ist definiert als eine Gesamtheit von «Punkten» und «Geraden», so dass je zwei Punkte eine Gerade bestimmen, je zwei Gerade einen Punkt gemein haben, jede Gerade mindestens drei Punkte enthält und mindestens zwei Gerade existieren. Man zeige: Ist eine projektive Ebene mit n Punkten auf jeder Geraden Teil einer projektiven Ebene mit N Punkten auf jeder Geraden, so ist $N \geqq n^2$. H. LENZ, München.

Varia

Das 48-Eck: Herr K. WANKA (Wien) sandte uns eine Zeichnung des regelmässigen 48-Ecks mit allen Diagonalen, die wir hier reproduzieren, weil vielleicht einige Leser von der Gesamtwirkung einer solchen Figur angesprochen werden.



[1]) A. EINSTEIN, Ann. Physik *33*, 1924 (1910).