

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 9 (1954)  
**Heft:** 4  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Zum Schluss geben wir noch einen Beweis eines Spezialfalls des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung, nämlich des folgenden Satzes: Konvergiert die Summe unabhängiger stochastischer Variablen, die alle dieselbe Verteilungsfunktion mit dem Mittelwert 0 haben, gegen eine bestimmte Grenzfunktion, so ist diese Grenzfunktion die Normalverteilung.

Seien  $x_1, x_2, \dots$  unabhängige stochastische Variablen, die alle dieselbe Verteilungsfunktion und alle den Mittelwert 0 haben. Sei weiter  $\alpha_n(t)$  die charakteristische Funktion der Summe von  $n$  dieser Variablen. Bekanntlich ist

$$\alpha_{2n}(t) = [\alpha_n(t)]^2.$$

Wird die Anzahl der Summanden verdoppelt, so wird also auf die Funktion  $\alpha_n(t)$  der Operator

$$\alpha_{2n}(t) = T\{\alpha_n(t)\} = [\alpha_n(t)]^2$$

angewandt. Soll nun  $\alpha_n(t) \rightarrow \alpha(t)$  gelten, so soll sich durch diesen Übergang nur die Streuung, nicht aber die Gestalt dieser Funktion verändern. Diese Grenzfunktion muss also der Funktionalgleichung

$$\alpha(t\sqrt{2}) = [\alpha(t)]^2$$

genügen. Nehmen wir Logarithmen, so folgt

$$\ln \alpha(t\sqrt{2}) = 2 \ln \alpha(t).$$

Hieraus (Potenzreihe!)

$$\ln \alpha(t) = A t^2.$$

Die Konstante muss in diesem Zusammenhang negativ sein, wir setzen also  $A = -\sigma^2/2$ . Damit haben wir für die charakteristische Funktion  $\alpha(t)$  diejenige der Normalverteilung:

$$\alpha(t) = e^{-\sigma^2 t^2/2}.$$

K. F. MOPPERT, Basel.

## Kleine Mitteilungen

### Einige Parabeleigenschaften<sup>2)</sup>

(6) Es ist (Figur 2)  $\bar{K}\bar{3} = \bar{S}\bar{3} - \bar{S}\bar{K} = \bar{p} + \bar{x} - \bar{p} = \bar{x}$ . Für den Mittelpunkt  $M$  des Krümmungskreises im Parabelpunkt  $P$  als Ähnlichkeitszentrum gilt ferner

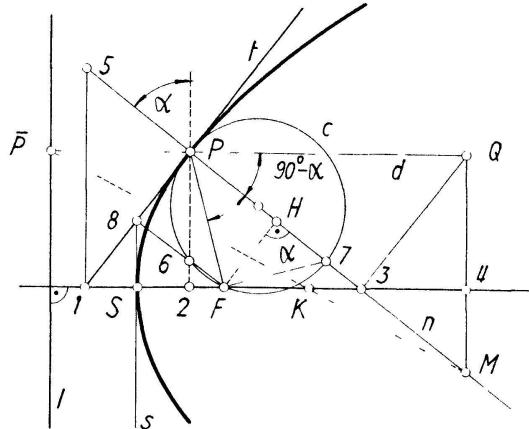
$$\bar{3}, \bar{4} : \bar{P}\bar{Q} = 2\bar{x} : (2\bar{x} + \bar{p}) = \bar{x} : \left(\bar{x} + \frac{\bar{p}}{2}\right) = \bar{K}\bar{3} : \bar{P}\bar{P}.$$

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu G. PÓLYA, Astron. Nachr. 209, 111 (1919); H. CRAMÉR, *Mathematical Methods of Statistics* (Princeton University Press, Princeton 1946), Seite 214.

<sup>2)</sup> Siehe R. JAKOBI, *Einige Parabeleigenschaften*, El. Math. 8, Nr. 5, 107 (1953).

Ergebnis 8: Aus dem Mittelpunkt  $K$  des Scheitelkrümmungskreises werden die auf der Leitlinie gelegenen Gegenpunkte  $\bar{P}$  der Parabelpunkte  $P$  jeweils in den Mittelpunkt  $M$  des zu  $P$  gehörenden Krümmungskreises projiziert<sup>1)</sup>.

(7) Weil  $\triangle(P, 1, 5) \cong \triangle(3, Q, M)$  ist, sind die auf der Normalen  $n$  gelegenen Strecken  $5P$  und  $M3$  gleich lang.

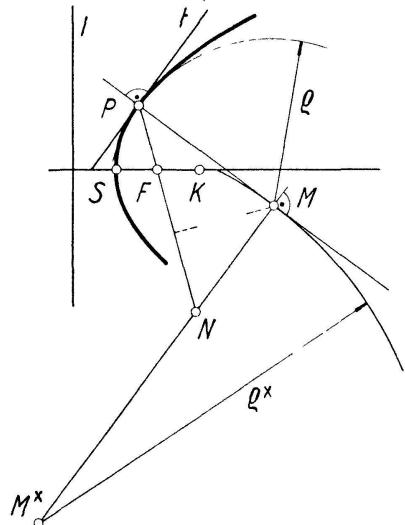


Figur 2

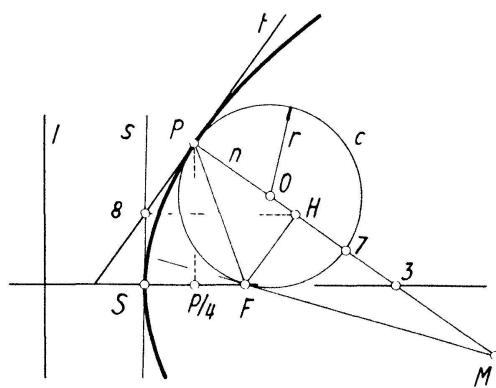
*Ergebnis 9:* Auf der Normalen  $n$  in einem Parabelpunkt  $P$  ist die Strecke vom Krümmungsmittelpunkt  $M$  bis zur Achse gleich der Strecke von  $P$  bis zum Schnittpunkt von  $n$  mit der Ordinate im Achsenpunkt der Tangente in  $P$ .

(8) Da  $\not\propto FP3 = \not\propto F3P$ , ist  $H$ , als Fußpunkt des Lotes in  $F$  auf  $n$ , auch Halbierungspunkt von  $\bar{P3}$ .

*Ergebnis 10:* Wird der Brennpunkt  $F$  orthogonal auf die Normale  $n$  in  $P$  projiziert, so erhält man damit den Halbierungspunkt  $H$  der auf  $n$  gelegenen Strecke zwischen



Figur 3



Figur 4

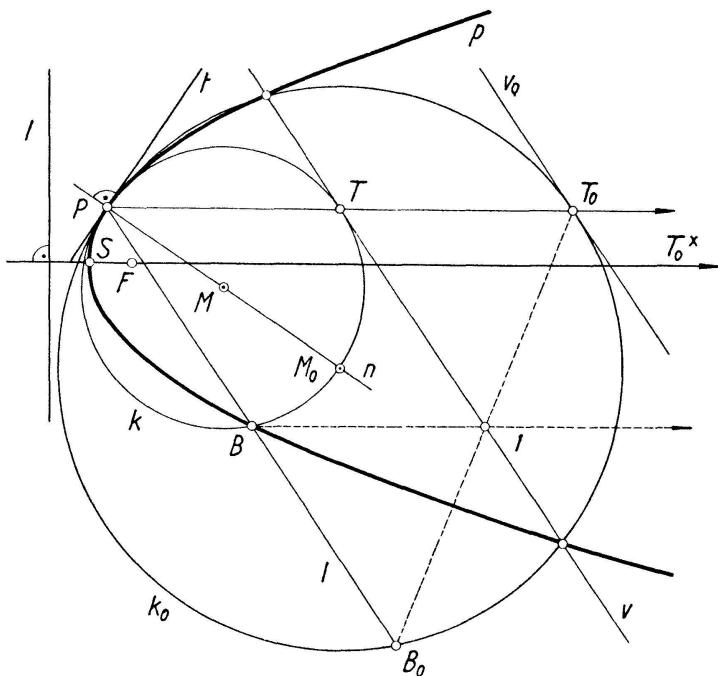
dem Krümmungsmittelpunkt  $M$  und dem Schnittpunkt der Ordinate im Achsenpunkt der Tangente.

(9) Unter dem zum Punkt  $P$  einer Kurve gehörenden zweiten Krümmungsmittelpunkt  $M^*$  versteht man den Mittelpunkt des Krümmungskreises ihrer Evolute, und zwar in dem zu  $P$  gehörenden Krümmungsmittelpunkt  $M$ . Der auf der Evolutennormalen  $n^* \parallel t$  im Punkt  $M$  gelegene Abschnitt zwischen der Affinnormalen in  $P$  und  $M^*$

<sup>1)</sup> Vgl. F. WRTILEK, *Tangenten- und Krümmungskreiskonstruktionen an ebenen Kurven mittels Deutung eines Kurvenparameters*, Mh. Math. Phys. 55 (1951).

wird durch  $M$  im Verhältnis 1:3 geteilt<sup>1)</sup>. Bei den Kegelschnitten fallen die Affinenormalen mit den Durchmessern zusammen. Ist  $d$  der zur Achse parallele Durchmesser in  $P$  und  $n^x \perp n$  in  $M$ , dann ist  $\overline{M^x M} = 3 \overline{MD}$ , wenn  $D = (d, n^x)$ . Wird  $\overline{MD}$  an  $n$  gespiegelt, so erhält man den auf dem Brennstrahl  $PF$  gelegenen Punkt  $N$  (Figur 3), und es ist  $\overline{MM^x} = 3 \overline{MN}$ .

**Ergebnis 11:** Der Brennstrahl  $PF$  teilt die Strecke zwischen dem zu  $P$  gehörenden ersten und zweiten Krümmungsmittelpunkt  $M$  und  $M^x$  im Verhältnis 1:2.



Figur 5

(10) Da (Figur 2)  $\angle 2P3 = \alpha = \angle F7P$ , ist  $6F \parallel n$ , wobei  $6 = (c, P2)$ . Außerdem trifft  $6F$  die Tangente  $t$  im Punkt  $8 = (t, s)$ . Da das  $\triangle(6, 7, P)$  rechtwinklig, ist  $\overline{6, 7} \parallel x$ . Daraus folgt

$$\overline{7,3} : \overline{7H} = \overline{6F} : \overline{6,8} = \overline{F2} : \overline{S2} = \left( \frac{p}{2} - x \right) : x.$$

Für den Parabelpunkt mit der Abszisse  $p/4$  wird dieses Verhältnis 1:1. In diesem Fall (Figur 4) halbiert also der Punkt 7 die Strecke  $3H$ , und es wird  $\overline{H7} : \overline{HP} = 1 : 2$ , das heisst,  $\overline{OH}$  ist ein Drittel des Radius  $r$  von  $c$ . Da  $\overline{OM} = 3r$ , sind  $H$  und  $M$  konjugierte Punkte bezüglich  $c$ , das heisst, die Tangente von  $M$  an  $c$  berührt diesen Kreis im Brennpunkt  $F$ , und  $FH$  ist die Polare von  $M$  bezüglich  $c$ .

**Ergebnis 12:** Im Parabelpunkt mit der Abszisse  $p/4$  geht die  $c$ -Tangente im Brennpunkt  $F$  durch den Mittelpunkt  $M$  des Krümmungskreises in  $P$ .

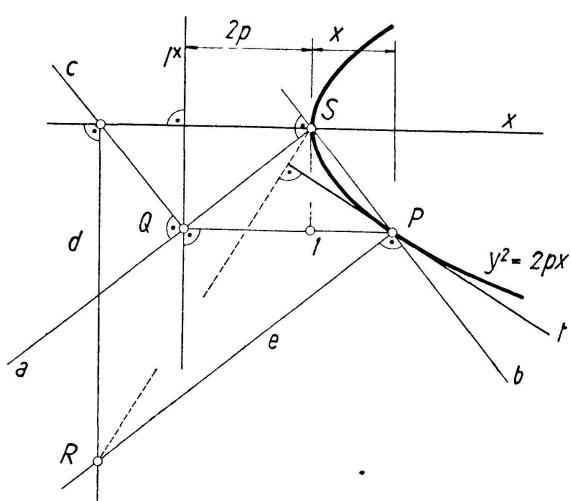
(11) Es soll (Figur 5) der zum Krümmungskreis  $k$  in einem Parabelpunkt  $P$  ähnliche Kreis  $k_0$ , bezüglich  $P$  und mit dem Modul 2, kollinear auf die Parabel  $p$  bezogen werden. Die Verschwindungsgerade  $v_0 \parallel v$  berührt  $k_0$  im Punkte  $T_0$ , dem Bild des unendlich fernen Punktes  $T_0^x$  der Parabelachse. Dem Parabelpunkt  $B = (e, k)$  wird der Schnittpunkt  $B_0 = (e, k_0)$  zugeordnet. Es entspricht also der Verbindungsgeraden  $B, T_0^x$  die Verbindungsgerade  $B_0T_0$ . Ihr Schnittpunkt 1 gehört der Kollineationsachse an. Nun ist  $\triangle(B_0, B, 1) \sim \triangle(B_0, P, T_0)$ , mit dem Modul 2; das heisst, der Punkt 1 halbiert die Strecke  $B_0T_0$ . Er muss daher auch auf  $v \parallel v_0$  liegen.  $v$  ist daher Kollineationsachse für die kollineare Zuordnung  $p \rightarrow k_0$ .

<sup>1)</sup> W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Bd. 2 (Springer, Berlin 1923), Seite 33.

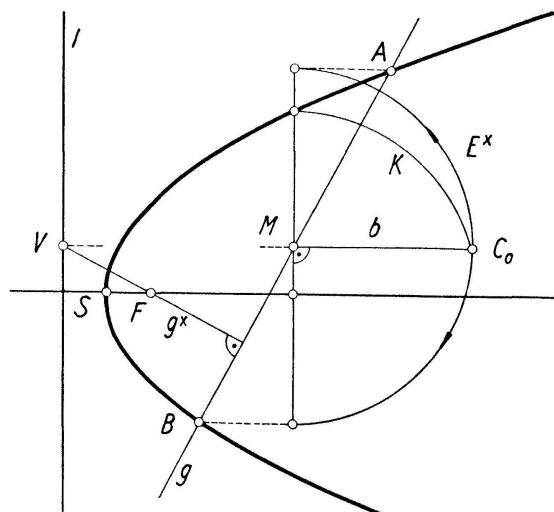
*Ergebnis 13:* Bezieht man eine Parabel  $\rho$  kollinear auf den Krümmungskreis in einem ihrer Punkte  $P$ , dann schneidet sie die Verschwindungsgerade  $v$  in den Schnittpunkten mit dem Kreis  $k_0$ , der zu  $k$  ähnlich liegt in bezug auf  $P$ , mit dem Modul 2.

(12) Im Hinblick auf das Zeichnen einer Parabel  $y^2 = 2\rho x$  ist es bemerkenswert, dass sich ihre Punkte  $P$  schon mit Hilfe eines einzigen rechtwinkligen Zeichendreieckes ermitteln lassen. Aus dem rechtwinkligen Dreieck  $(Q, S, P)$  (Figur 6) folgt  $S1 = \sqrt{2\rho x}$ .

*Ergebnis 14:* Für den im Scheitelpunkt  $S$  einer Parabel drehbar angebrachten rechten Winkel  $(a, b)$  gilt: Die Ordinate des Schnittpunktes des einen Winkelschenkels  $a$  mit einer festen und zur Parabelachse senkrechten Geraden  $1^x$  ist gleich der Ordinate des auf



Figur 6



Figur 7

dem anderen Winkelschenkel  $b$  gelegenen Parabelpunktes. Der Parameter der Parabel ist  $(S - 1^x)/2$ .

Mit Hilfe dieser Überlegung lässt sich ein einfacher Parabelzeichner bauen.

Aus dem Polplan<sup>1)</sup> dieses Mechanismus gelangt man dann zu einer Tangentenkonstruktion in  $P$ , die wiederum nur ein rechtwinkliges Zeichendreieck erfordert (Figur 6). Vorschrift: 1. Im Schnittpunkt  $Q$  des Schenkels  $a$  des um  $S$  drehbaren rechten Winkels  $(a, b)$  wird das Lot  $c$  auf  $a$  errichtet.

2. Das Lot  $d$  in  $(c, x)$  auf  $x$  wird mit dem Lot  $e$  auf  $b$  in  $P$  im Punkt  $R$  zum Schnitt gebracht.

3. Die Tangente  $t$  in  $P$  ist senkrecht auf der Verbindungsgeraden  $RS$ .

(13) Für die folgende Konstruktionsaufgabe soll die gegebene Parabel als der in der Zeichenebene gelegene Umrissmeridian eines Rotationsparaboloids gedeutet werden. Jeder Rotationszylinder, dessen Achse ebenfalls in der Zeichenebene liegt und parallel zur gegebenen Achse ist, hat mit dem Paraboloid, neben dem unendlich fernen Punkt der Achse, eine ebene Schnittkurve gemeinsam. Diese ist eine Ellipse oder – wenn die Achsen zusammenfallen – ein Kreis. Umgekehrt gilt das

*Ergebnis 15:* Die orthogonale Projektion einer auf einem Rotationsparaboloid gelegenen Ellipse  $E$  (Mittelpunkt  $M$ , grosse Halbachse  $\overline{MA} = \overline{MB} = a$ , kleine Halbachse  $\overline{MC} = \overline{MD} = b$ ) auf eine achsennormale Ebene ist ein Kreis  $E^x$  mit dem Radius  $b$ .

Es sollen nun die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  einer Parabel mit einer Geraden  $g$  (nicht parallel zur Achse) konstruiert werden. Zunächst liefert das im Brennpunkt  $F$  der Parabel errichtete Lot  $g^x \perp g$  (Figur 7) auf der Leitlinie  $l$  einen Punkt  $V$ , der dieselbe Ordinate hat wie der Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $AB$ . Gemäss der räumlichen Deutung

<sup>1)</sup> A. REUSCHEL, Über ein einheitliches kinematisches Konstruktionsprinzip zur Ermittlung von Tangenten und Krümmungskreisen der Bahnkurven, Eingriffslinien, Hüllbahnen und Polbahnen von ebenen bewegten Systemen, Dissertation, Technische Hochschule Wien (1944).

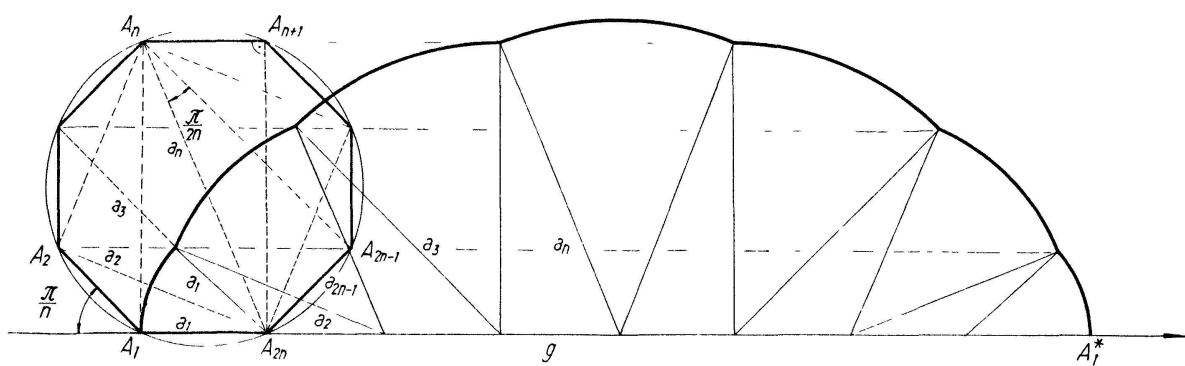
wird der Parallelkreis  $K$ , der in der durch  $M$  gehenden Ebene liegt, in die Zeichenebene geklappt. Durch  $\overline{MC_0} = b$  ist auch der umgeklappte Kreis  $E^*$  bestimmt und damit die Schnittpunkte  $A$  und  $B$  auf  $g$ .

Das Resultat wird im allgemeinen genauer sein als jenes, für das man die kollineare Beziehung zwischen der gegebenen Parabel und ihrem Scheitelkrümmungskreis benutzt.

R. JAKOBI, Braunschweig.

### Über die gemeine Zykloide

Rollt ein Kreis auf einer Geraden, so beschreibt ein Punkt der Kreisperipherie eine Kurve, die man als gemeine Zykloide bezeichnet. Mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung kann man zeigen, dass die Länge  $L$  der Zykloide zwischen zwei aufeinanderfolgenden Spitzen gleich dem Vierfachen des Durchmessers des rollenden



Figur 1

Kreises, der Flächeninhalt  $F$ , der von diesem Zykloidenbogen und der Geraden eingeschlossen wird, gleich dem Dreifachen des Inhaltes des rollenden Kreises ist. Wir wollen zeigen, wie man diese beiden Resultate auch ohne Differential- und Integralrechnung herleiten kann.

Zu diesem Zweck beschreiben wir dem Kreis ein reguläres  $(2n)$ -Eck ein und lassen dieses Polygon auf der Geraden  $g$  abrollen. Dabei beschreibt eine Ecke eine Kurve, die mit  $n \rightarrow \infty$  gegen die Zykloide strebt (Figur 1). Wir müssen daher die Länge  $L_{2n}$  des Stückes unserer Näherungskurve, das von einem Punkt auf der Geraden  $g$  bis zum nächsten Punkt auf der Geraden  $g$  führt, das also einer Umdrehung unseres Polygons entspricht, und den Flächeninhalt  $F_{2n}$ , der von diesem Kurvenstück und der Geraden  $g$  eingeschlossen wird, berechnen. Dann gilt

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_{2n} \quad \text{und} \quad F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{2n}.$$

Das zu untersuchende Stück unserer Näherungskurve besteht aus  $2n-1$  Kreisbogen, deren Radien der Reihe nach gleich den von einer Ecke ausgehenden Seiten und Diagonalen sind und die wir in der gleichen Reihenfolge mit  $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}$  bezeichnen. Zu jedem dieser Kreisbogen gehört ein Zentriwinkel, der gleich ist einem Außenwinkel unseres regulären Polygons, also gleich  $2\pi/(2n) = \pi/n$ . Das zu untersuchende Flächenstück setzt sich aus  $2n-2$  Dreiecken und  $2n-1$  Kreissektoren zusammen. Jedes dieser Dreiecke ist kongruent einem der Dreiecke, in die unser Polygon durch die von einer Ecke ausgehenden Diagonalen zerlegt wird. Die Summe aller dieser Dreiecksflächen ist also gleich der Fläche  $f_{2n}$  unseres regulären Polygons. Um einen einfachen Ausdruck für die Summe aller Sektorflächen zu erhalten, muss man beachten, dass  $a_\mu$  und  $a_{n+\mu}$  für  $\mu < n$  Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, dessen Hypotenuse der Durchmesser des Kreises ist. Es ist also  $a_\mu^2 + a_{n+\mu}^2 = 4r^2$  für  $\mu = 1, 2, \dots, n-1$ . Damit

erhalten wir

$$\begin{aligned} F_{2n} &= f_{2n} + \sum_{\nu=1}^{2n-1} \frac{1}{2} a_{\nu}^2 \frac{\pi}{n} = f_{2n} + \frac{\pi}{2n} \left[ a_n^2 + \sum_{\mu=1}^{n-1} (a_{\mu}^2 + a_{n+\mu}^2) \right] \\ &= f_{2n} + \frac{\pi}{2n} [4r^2 + (n-1)4r^2] = f_{2n} + \frac{\pi}{2n} 4n r^2 = f_{2n} + 2\pi r^2 \end{aligned}$$

und daraus

$$F = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{2n} = \pi r^2 + 2\pi r^2 = 3\pi r^2.$$

Für die Länge  $L_{2n}$  findet man

$$L_{2n} = \sum_{\nu=1}^{2n-1} a_{\nu} \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^{2n-1} a_{\nu} = \frac{2\pi r}{n} \sum_{\nu=1}^{2n-1} \sin \frac{\nu \pi}{2n},$$

da  $a_{\mu}$  und  $a_{2n-\mu}$  in dem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse  $2r$  dem Winkel  $\mu\pi/(2n)$  gegenüberliegen und da

$$\sin \frac{\mu \pi}{2n} = \sin \left( \pi - \frac{\mu \pi}{2n} \right) = \sin \frac{(2n-\mu)\pi}{2n}$$

ist. Unter Benützung der Formel

$$\sum_{\nu=1}^p \sin \nu \alpha = \frac{\sin \frac{(p+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

erhalten wir

$$L_{2n} = \frac{2\pi r}{n} \cdot \frac{\sin \frac{n\pi}{2n} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2 \cdot 2n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} = 8r \frac{\sin \frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} \sin \left[ \left( 1 - \frac{1}{2n} \right) \frac{\pi}{2} \right],$$

woraus sich für  $n \rightarrow \infty$   $L = 8r$  ergibt<sup>1)</sup>.

CHRISTIAN BLATTER, Basel.

### Eine Parallelogrammaufgabe

Angeregt durch ein von Herrn VLAHAVAS<sup>2)</sup> analytisch gelöstes, ähnliches Problem, soll folgende Aufgabe konstruktiv behandelt werden: Gegeben sind in der Ebene vier Punkte  $P_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) in allgemeiner Lage. Gesucht ist jenes Parallelogramm, das einem gegebenen ( $\pi$ ) ähnlich ist und dessen Seiten oder deren Verlängerungen durch die Punkte  $P_i$  gehen.

*Lösung:* In der komplexen Zahlenebene seien die Vektoren gegeben (siehe Figur 1):  $\overrightarrow{P_1 P_3} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{P_2 P_4} = \mathbf{b}$  und  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_1$  die Einheitsvektoren in Richtung der Parallelogrammseiten. Aus der Figur folgt:

$$\lambda_1 i \mathbf{e}_1 = \mathbf{a} + \mu \mathbf{e}_1, \quad \lambda_2 i \mathbf{e}_2 = \mathbf{b} + \nu \mathbf{e}_2.$$

Der Übergang zu den konjugiert komplexen Größen ergibt:

$$-\lambda_1 i \bar{\mathbf{e}}_1 = \bar{\mathbf{a}} + \mu \bar{\mathbf{e}}_1, \quad -\lambda_2 i \bar{\mathbf{e}}_2 = \bar{\mathbf{b}} + \nu \bar{\mathbf{e}}_2.$$

<sup>1)</sup> Anmerkung der Redaktion: Eine Verallgemeinerung obiger Flächenberechnung findet man in der Lösung zu Aufgabe 76, El. Math. 5, 117 (1950).

<sup>2)</sup> G. N. VLAHAVAS, *Circonscrire un carré à un quadrilatère donné*, El. Math. 7, 37 (1952).

Die Elimination von  $\mu$  und  $\nu$  liefert:

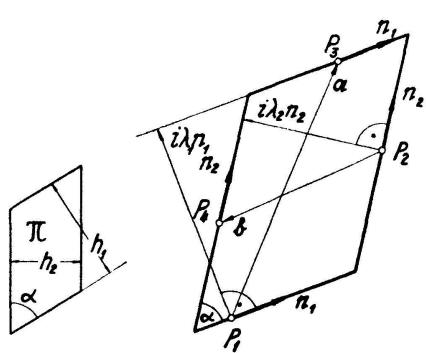
$$2\lambda_1 i = a \bar{e}_1 - \bar{a} e_1, \quad 2\lambda_2 i = b \bar{e}_2 - \bar{b} e_2.$$

Aus der Ähnlichkeit von gegebenem und gesuchtem Parallelogramm folgt:

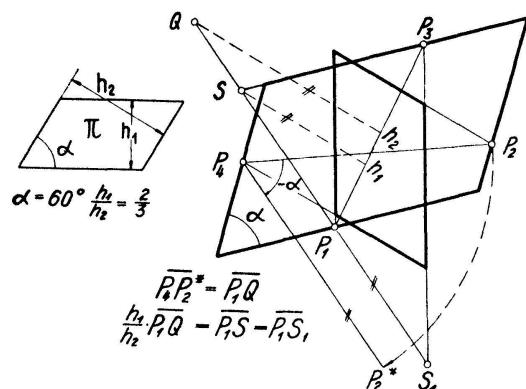
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{h_1}{h_2} = k.$$

Man eliminiert noch  $\lambda_1$ :

$$(a - k b \bar{e}_\alpha) \bar{e}_1 = (\bar{a} - k \bar{b} e_\alpha) e_1.$$



Figur 1



Figur 2

Setzt man noch  $c = a - k b \bar{e}_\alpha$ , so lautet die letzte Gleichung:

$$c \bar{e}_1 = \bar{c} e_1,$$

das heisst, der Vektor  $c$  muss die Richtung von  $e_1$  haben.

*Konstruktion:* Der Vektor

$$c = a - \frac{h_1}{h_2} b \bar{e}_\alpha$$

lässt sich sofort konstruieren (siehe Figur 2), wenn man zu dem Vektor  $a$  den um  $-\alpha$  gedrehten und im Verhältnis  $h_1/h_2$  gestreckten Vektor  $-b$  addiert. Wenn man von vornherein festlegt, welche der parallelen Seiten durch  $P_1$  und  $P_3$  gehen sollen, so sind zwei Lösungen möglich, da man  $P_3S$  durch  $P_3S_1$  ersetzen kann; im ganzen sind sechs Lösungen möglich.

Soll das gesuchte Parallelogramm speziell ein Quadrat sein, so ergibt sich die von Herrn BUCHNER<sup>1)</sup> als trigonometrische Lösung bezeichnete Konstruktion.

RUDOLF LUDWIG, Braunschweig.

### Bemerkung zu einer Aufgabe von Herrn van der Pol

Herr B. VAN DER POL stellte in dieser Zeitschrift kürzlich die folgende Aufgabe<sup>2)</sup>: *Zeige, dass neben dem bekannten Satz*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots = \frac{\pi}{4}$$

<sup>1)</sup> P. BUCHNER, *Aus der Theorie der geometrischen Konstruktionen*, El. Math. 1, 1-3 (1946).

<sup>2)</sup> Aufgabe 154, El. Math. 7, 48 (1952).

auch gilt

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15 \cdot 17} - \dots = \frac{\pi}{48}.$$

Es liegt nahe, die Leibnizsche Reihe in der von Herrn VAN DER POL angedeuteten Richtung weiter zu verallgemeinern und die Reihe der Kehrwerte der Produkte von je  $m$  aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen zu betrachten. Es zeigt sich dabei, dass zur Erzielung eines glatten Resultates die Glieder dieser Reihe im Falle eines ungeraden  $m$  wie oben mit abwechselndem, bei geradem  $m$  dagegen mit konstantem Vorzeichen genommen werden müssen. Unter Verwendung des Pochhammerschen Symbols

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a (a+1) \cdots (a+n-1)$$

kann dann die zu betrachtende Reihe offenbar wie folgt geschrieben werden:

$$\varphi(m) = 2^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k m}}{((1/2) + k m)_m}.$$

Diese Reihe ist ihrerseits ein spezieller Fall einer noch allgemeineren, von GLAISHER in einer grösseren Arbeit<sup>1)</sup> im wesentlichen mit reellen Methoden untersuchten Reihe. Es ist vielleicht dennoch gestattet, darauf hinzuweisen, wie man durch eine einfache Anwendung des Residuenkalküls zu einer prägnanten Darstellung für  $\varphi(m)$  gelangen kann, die übrigens von GLAISHER nicht angegeben wurde.

Wir betrachten zunächst die für  $0 \leq x \leq 1$  konvergente Reihe

$$\varphi(m, x) = 2^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k m}}{((1/2) + k m)_m} x^{(k+1)m-1/2}.$$

Wegen

$$\varphi(m, 1) = \varphi(m)$$

und

$$\frac{d^m}{dx^m} \varphi(m, x) = 2^{-m} \frac{x^{-1/2}}{1 \mp x^{m-2}}$$

folgt bei Anwendung der bekannten Formel für  $m$ -fache Integration

$$\begin{aligned} \varphi(m) &= \frac{2^{-m}}{(m-1)!} \int_0^1 \frac{(1-x)^{m-1} x^{-1/2}}{1 \mp x^m} dx \\ &= \frac{2^{-m+1}}{(m-1)!} \int_0^1 \frac{(1-z^2)^{m-1}}{1 \mp z^{2m}} dz \\ &= \frac{2^{-m-1}}{(m-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-z^2)^{m-1}}{1 \mp z^{2m}} dz. \end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wurde die Invarianz des Integrals bezüglich der Substitutionen  $z' = 1/z$  und  $z'' = -z$  benutzt. Da der Integrand eindeutig ist und im Unendlichen hinreichend stark verschwindet, ist das Integral gleich der  $(2\pi i)$ -fachen Summe

<sup>1)</sup> J. W. L. GLAISHER, *Summation of Series in which the r-th Term is the Reciprocal of the Product of the Members of the r-th Set of n Consecutive Terms in an Arithmetical Progression*, Messenger Math. 24, 124–171 (1894–1895).

<sup>2)</sup> In den folgenden Formeln steht ein oberes Vorzeichen jeweils für gerades, ein unteres für ungerades  $m$ .

der Residuen in der oberen Halbebene. Der Integrand ist dort singulär in den Punkten

$$z_k = i e^{(i\pi/m)k}, \quad -\frac{m}{2} < k < \frac{m}{2},$$

und das Residuum ist

$$\mp \frac{1}{2m} \cdot \frac{(1-z_k^2)^{m-1}}{z_k^{2m-1}} = \frac{1}{2m z_k^{2m}} \left( z_k - \frac{1}{z_k} \right)^{m-1}.$$

Wegen

$$z_k^{-m} = (-1)^k i^{-m}, \quad z_k - \frac{1}{z_k} = 2i \cos \frac{k\pi}{m}$$

ergibt sich damit unmittelbar

$$\varphi(m) = \frac{\pi}{4m!} \sum_{|k| < m/2} (-1)^k \left( \cos \frac{k\pi}{m} \right)^{m-1}.$$

Man findet hieraus leicht die folgenden algebraischen Ausdrücke für die ersten paar Werte von  $m$ :

$$\begin{array}{rcccccc} m & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \pi^{-1} \varphi(m) & = & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{48} & \frac{2 - \sqrt{2}}{192} & \frac{8 - 3\sqrt{5}}{3840} & \frac{17 - 9\sqrt{3}}{46080} \end{array}$$

Mit Ausnahme des Wertes für  $m = 5$  sind diese Resultate schon von GLAISHER, l. c., angegeben worden.

P. HENRICI, Washington, D.C.

## Über die Schreibweise der Wurzeln

In der Mathematik gibt es drei Arten von Wurzeln:

1. *Arithmetische Wurzeln*: Das sind die Wurzeln aus arithmetischen Zahlen (ohne Vorzeichen), wie sie auf der ersten Entwicklungsstufe der Mathematik vorkommen (Arithmetik, reine Geometrie, Goniometrie im rechtwinkligen Dreieck). Arithmetische Wurzeln sind absolute Zahlen und haben also kein Vorzeichen.

Beispiel:  $\sqrt{4} = 2$ .

2. *Algebraische Wurzeln*: Das sind die Wurzeln aus algebraischen Zahlen (mit Vorzeichen), wie sie auf der zweiten Entwicklungsstufe der Mathematik vorkommen (Algebra, analytische Geometrie, Trigonometrie am Einheitskreis).

Die ungerade algebraische Wurzel einer algebraischen Zahl existiert immer, und zwar eindeutig.

Beispiel:  $\sqrt[3]{-8} = -2$ .

Die gerade algebraische Wurzel kann dagegen nur aus einer positiven Zahl gezogen werden, und das Ergebnis ist zweiförmig.

Beispiel:  $\sqrt[4]{+4} = \pm 2$ .

3. *Komplexe Wurzeln*: Das sind die Wurzeln aus komplexen Zahlen, wie sie auf der dritten Entwicklungsstufe der Mathematik vorkommen. Ihr Ergebnis ist mehrförmig: Jede komplexe Zahl besitzt  $n$  verschiedene  $n$ -te komplexe Wurzeln.

Beispiel: Die dritte komplexe Wurzel aus  $-8$ ,  $\sqrt[3]{-8}$ , ergibt die drei Werte  $+1 + j\sqrt{3}$  (für  $k = 0$ ),  $-2$  (für  $k = 1$ ) und  $+1 - j\sqrt{3}$  (für  $k = 2$ ). Hierbei muss unter dem Zeichen  $\sqrt[3]{3}$  die *arithmetische* Quadratwurzel aus  $3$  verstanden werden.

Die bisherigen Ausführungen haben gezeigt, dass für die Bezeichnung der drei verschiedenen Wurzeln (arithmetische, algebraische und komplexe) das gleiche Wurzelzeichen gebraucht wird. Dies scheint im allgemeinen keine nachteiligen Folgen zu haben, da es ja öfters vorkommt (zum Beispiel in der deutschen Sprache), dass das gleiche Wort oder das gleiche Zeichen mehrere verschiedene Bedeutungen hat und der gewünschte Sinn sich im konkreten Falle meistens klar aus dem Zusammenhang ergibt. Es braucht hierbei nur erwähnt zu werden, dass das Wort «Wurzel» in der Algebra zuweilen auch die Bedeutung «Lösungswert» einer Bestimmungsgleichung besitzt.

Dennoch sollte in der Mathematik ein und dasselbe Zeichen nicht nach Belieben für drei verschiedene Begriffe eingesetzt werden können. Denn das widerspricht dem eigentlichen Wesen der Mathematik, die als exakte Wissenschaft auch eine klare und eindeutige Sprache haben sollte. Ausserdem sind Unklarheiten durchaus nicht ausgeschlossen, was sich, besonders vom pädagogischen Standpunkt aus gesehen, sehr nachteilig auswirken kann.

Betrachten wir zum Beispiel den Ausdruck:  $a = \sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{4}$ . Versteht man unter dem Wurzelzeichen die arithmetischen Wurzeln, so ergibt sich eindeutig:  $a = 5$ . Betrachtet man aber die algebraischen Wurzeln, so ergeben sich für  $a$  die vier Lösungswerte:  $+5, +1, -1$  und  $-5$ .

Ähnliche Unklarheiten können bei Wurzelgleichungen und Wurzelfunktionen auftreten. So kann man zum Beispiel nicht immer ohne weiteres ersehen, ob es sich bei der Bestimmungsgleichung

$$\sqrt[3]{5x+1} - \sqrt[3]{x+1} = 2$$

um nur eine oder vier verschiedene Wurzelgleichungen handelt.

Noch grösser kann die Unklarheit auf dem Gebiet der komplexen Zahlen werden. Schreibt man  $\sqrt[3]{8}$ , so steht durchaus nicht fest, ob nur der Wert  $+2$  oder die drei Werte  $+2$  (für  $k = 0$ ),  $-1 + j\sqrt{3}$  (für  $k = 1$ ) und  $-1 - j\sqrt{3}$  (für  $k = 2$ ) in Betracht gezogen werden sollen. Bestimmt aber ist die häufig anzutreffende Schreibweise  $\sqrt{-1} = j$  falsch; denn  $\sqrt{-1}$  ist auf komplexem Gebiete zweiförmig:  $\sqrt{-1} = \pm j$ .

Die grössten Irrtümer können entstehen, wenn man in der Algebra oder sogar auf dem Gebiete der komplexen Zahlen Wurzelregeln anwendet, die nur in der Arithmetik Gültigkeit besitzen.

Setzen wir zum Beispiel in der Formel

$$\sqrt[p]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p$$

für  $n = 2$ ,  $p = 4$  und  $x = 4$  ein, so ergäbe die Betrachtung der algebraischen Wurzeln:

$$\pm 16 = (\pm 2)^4 = +16.$$

Genau so unsinnig wird das Ergebnis, wenn man in der Formel:

$$\sqrt[n]{x^p} = \sqrt[np]{x^p}$$

für  $n = 3$ ,  $p = 2$  und  $x = -27$  einsetzt. Das Ergebnis würde lauten:

$$-3 = \sqrt[6]{(-27)^2} = \sqrt[6]{729} = \pm 3.$$

Der Fehler besteht in den beiden letzten Fällen darin, dass man eine in der Arithmetik gültige Regel auf die Algebra uneingeschränkt ausgedehnt hat. Der Grundstock des Übels beruht aber auf dem Umstand, dass man für die arithmetischen und die algebraischen Wurzeln das gleiche Zeichen gebraucht, wodurch man zu den erwähnten Fehlern geradezu angespornt wird.

Eine Behebung dieses Mißstandes könnte wohl dadurch erreicht werden, dass die Art der betrachteten Wurzeln (arithmetisch, algebraisch oder komplex) aus dem äusseren Zeichen direkt ersichtlich wäre.

Da die arithmetische Wurzel in der Mathematik und den Naturwissenschaften am häufigsten vorkommt und die Wurzelregeln für diese Art Wurzeln auch uneingeschränkt gültig sind, wäre es wohl angebracht, das althergebrachte Wurzelzeichen für die Bezeichnung der arithmetischen Wurzeln beizubehalten.

Für die Bezeichnung der komplexen Wurzeln könnte man das Zeichen  $\sqrt[n]{\cdot}$  wählen, das an die Verwandtschaft zwischen komplexen Zahlen und Vektoren deutlich erinnert. Ein neues Zeichen für die algebraischen Wurzeln wäre dann nicht notwendig, da jede algebraische Wurzel als Sonderfall einer komplexen Wurzel angesehen werden kann. Durch einen Index könnte man die einzelnen Wurzelwerte noch unterscheiden.

Beispiele:

$$\sqrt{4} = 2; \quad \sqrt[3]{4} = \pm 2; \quad \sqrt[k=0]{4} = +2; \quad \sqrt[k=1]{4} = -2.$$

$$\sqrt[3]{8} = 2; \quad \sqrt[3]{8} = \text{die Gesamtheit der Werte } +2, -1 + j\sqrt{3}, -1 - j\sqrt{3};$$

$$\sqrt[k=0]{8} = +2; \quad \sqrt[k=1]{8} = -1 + j\sqrt{3}; \quad \sqrt[k=2]{8} = -1 - j\sqrt{3}.$$

$$|\sqrt[3]{8}| = \sqrt[3]{|8|} = 2; \quad \text{allgemeiner: } |\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}.$$

Für die Bezeichnung der reellen negativen ungeraden Wurzel einer reell negativen Zahl könnte man übrigens ohne Missverständnis das alte Wurzelzeichen beibehalten.

Beispiel:

$$\sqrt[k=1]{-8} = \sqrt[3]{-8} = -2;$$

$$\text{aber } \sqrt[k=1]{-8} = +1 + j\sqrt{3}; \quad \sqrt[k=2]{-8} = +1 - j\sqrt{3}; \quad \sqrt[3]{|-8|} = |\sqrt[3]{-8}| = 2.$$

Schliesslich könnte man die erwähnte Unterscheidung zwischen den drei Arten von Wurzeln sinngemäss auch auf die Potenzen mit gebrochenen Exponenten übertragen.

R. Rose, Saarbrücken.

*Bemerkung der Redaktion:* Es gibt mehrere Bücher, in denen auf die im obigen Artikel genannten Schwierigkeiten aufmerksam gemacht und die Schreibweise der Wurzeln sorgfältig diskutiert wird. Zum Beispiel: P. BUCHNER, *Algebra* (vierter Teil, zweite Auflage) (Orell-Füssli-Verlag, Zürich 1953), Seite 26 f.

## Aufgaben

**Aufgabe 184.** In der Gruppentheorie werden für nichtkommutative Gruppen spezielle höhere Kommutatoren auf folgende Weise rekursiv definiert:

$$(x, y) = x y x^{-1} y^{-1},$$

$$(x, y, y) = [(x, y), y] = x y x^{-1} y x y^{-1} x^{-1} y^{-1} \text{ usw.}$$

Enthält der Kommutator  $n$  Elemente  $y$ , so ist

$$(x, y, y, \dots, y) = \prod_{k=1}^{2^n} x^{a_k} y^{b_k},$$

wo  $a_k = (-1)^{k+1}$ . Man bestimme  $b_k$  als Funktion von  $k$ .

E. TROST, Zürich.

*Lösung:* Der  $n$ -te Kommutator der betrachteten Folge sei  $(x, y)_n$ , also

$$(x, y)_1 = x y x^{-1} y^{-1}.$$