

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 9 (1954)
Heft: 3

Artikel: Über die natürliche Gleichung [Formel]
Autor: Klepper, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-17359>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

weiss, dass man mit etwas mehr Anstrengung den andern Apfel auch noch erreichen kann, während ein Zuschauer, der nur sieht, dass man den einen Apfel gerade erreicht hat, darüber im Zweifel ist. Man hat eben nicht nur den Apfel, sondern auch das Gefühl der Bewegungen, die man ausgeführt hat, um ihn zu pflücken.

Das Gefühl, dass eine Beweismethode noch weiter reicht, ist manchmal trügerisch. Oft stellt sich nachher heraus, dass in den höheren Fällen eine neue Schwierigkeit auftaucht. Trotzdem gehören solche Ahnungen über die Tragweite von Beweismethoden zu den nützlichsten Wegweisern bei der mathematischen Forschung.

B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich.

Über die natürliche Gleichung

$$R(s) = \mu a \left(\lambda + \cos \frac{s}{a} \right)$$

I.

Eine *Eilinie* ist eine geschlossene doppelunktfreie Kurve, deren Krümmung $\kappa = 1/R$ festes Zeichen hat. Ihre *natürliche Gleichung* $R = R(s)$ ist eine periodische Funktion $R(s) = R(s + u)$ der Bogenlänge s , deren (nicht notwendig primitive!) Periode u der Umfang der Eilinie ist. Wegen des *Vierscheitelsatzes für Eilinen* muss $R(s)$ innerhalb eines Periodenintervalls $0 \leq s < u$ mindestens vier relative Extrema, also $R'(s)$ mindestens vier Nullstellen haben.

L. BIEBERBACH¹⁾ erwähnt als einfaches *Beispiel* einer natürlichen Gleichung, die *keine Eilinie* kennzeichne, die positive Funktion $R = 2 + \sin s$ der primitiven Periode 2π , deren Ableitung in $0 \leq s < 2\pi$ ja nur an zwei Stellen verschwinde. Es ist die Absicht dieser Zeilen, zu zeigen, dass *diese Schlussweise nicht stichhaltig* ist. Es wird hier nämlich irrtümlich die primitive Periode 2π gleich dem Umfang u gesetzt.

Wir werden im Gegensatz zu der Aussage von BIEBERBACH zeigen, dass allgemeiner die Funktion

$$R(s) = \mu a \left(\lambda + \cos \frac{s}{a} \right) \quad (1)$$

für bestimmte $\lambda > 1$ und $\mu > 0$ stets die natürliche Gleichung einer Eilinie sein kann. (λ und μ sind dimensionslose Parameter, die Konstante a hat die Dimension einer Länge.) Die *primitive Periode* $p = 2a\pi$ von (1) kann dann natürlich wegen des Vierscheitelsatzes nicht identisch mit dem *Umfange* u der Eilinie sein. Es ist vielmehr $u = m p = 2a m \pi$ ($m > 1$, ganz). Die Eilinie wird dann $2m \geq 4$ Scheitel haben. Das Studium der Kurven (1) wird sich auch deshalb lohnen, weil sich bei ihnen einige interessante gestaltliche Verhältnisse ergeben.

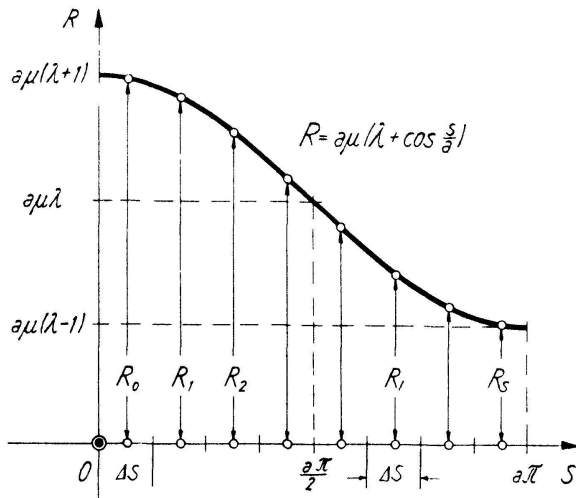
II.

Einen *Überblick über den Verlauf der Kurven* (1) kann man sich konstruktiv auf folgende Art²⁾ verschaffen. Wir tragen $R = R(s)$ in einem rechtwinkligen Koordina-

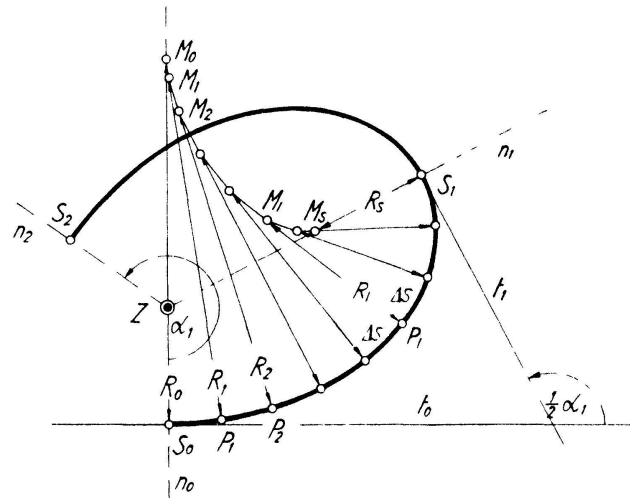
¹⁾ L. BIEBERBACH, *Differentialgeometrie* (Teubner, Leipzig 1932, S. 25).

²⁾ K. STRUBECKER, Vorlesung über Differentialgeometrie an der TH. Karlsruhe 1948/49.

tensystem (Figur 1a) auf und ersetzen innerhalb der gleich langen Bogenstücke Δs die Krümmungsradien $R(s)$ durch Mittelwerte R_i . Die Kurve wird nun durch Kreisbögen Δs der Radien R_i approximiert (Figur 1b). Auf den Normalen der Punkte P_i



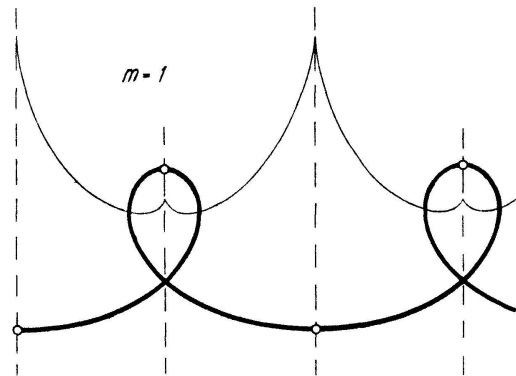
Figur 1a



Figur 1b

tragen wir jeweils die Radien $R_i = \overline{P_i M_i}$ ab, schlagen um M_i den Kreis vom Radius R_i und tragen auf ihm den Bogen $\Delta s = \widehat{P_i P_{i+1}}$ ab, wodurch der neue Kurvenpunkt P_{i+1} entsteht.

Es genügt, auf diese Art den Kurvenbogen $\widehat{S_0 S_1}$ zu konstruieren, der zu der halben primitiven Periode $p/2 = a\pi$ gehört. Der zur zweiten Halbperiode gehörige Bogen



Figur 2

$\widehat{S_1 S_2}$ ist nämlich zu $\widehat{S_0 S_1}$ *symmetrisch*. Die Kurve besteht dann in ihrem weiteren Verlauf aus lauter zu $\widehat{S_0 S_2}$ kongruenten Teilbögen $\widehat{S_2 S_4}$, $\widehat{S_4 S_6}$, ... und liegt damit in ihrem ganzen periodischen Verlaufe fest.

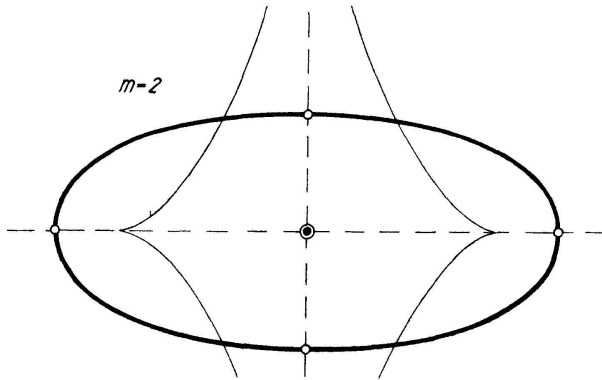
Die Krümmungsmittelpunkte M_i sind übrigens die Ecken eines Tangentenpolygons der *Evolute* der Linie (1).

Aus Symmetriegründen schneiden sich alle Scheitelnormalen n_0, n_1, n_2, \dots in einem festen Punkt Z , den wir als das *Zentrum* der Kurve (1) bezeichnen. Aufeinanderfolgende Scheitelnormalen n_k und n_{k+1} schneiden sich dabei stets unter demselben Winkel $\alpha_1/2$. Die Kurve schliesst sich nun dann und nur dann nach *genau einem vollen*

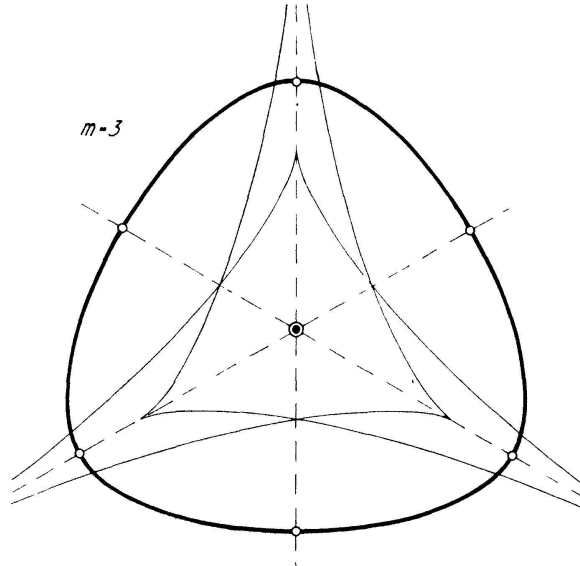
Umlauf um das Zentrum Z , wenn

$$m \alpha_1 = 2 \pi \quad (m > 1, \text{ ganz}) \quad (2)$$

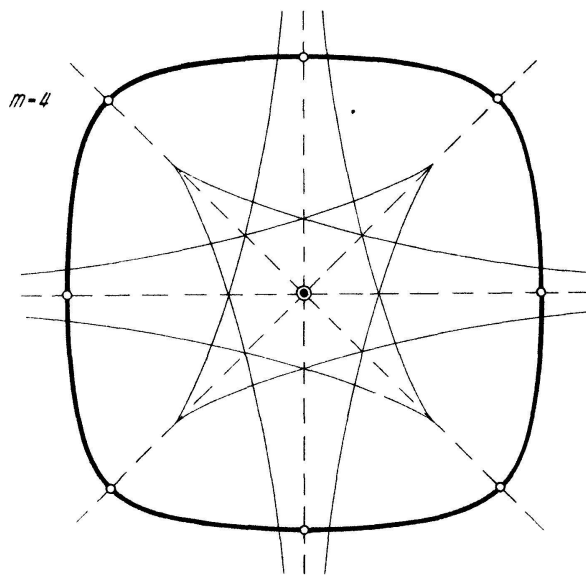
ist. Dann ergibt sich stets eine *Eilinie*, deren Umfang $u = 2 a m \pi$ ist. Für den ausgeschlossenen Fall $m = 1$ erhält man eine nicht geschlossene Kurve mit uneigentlichem



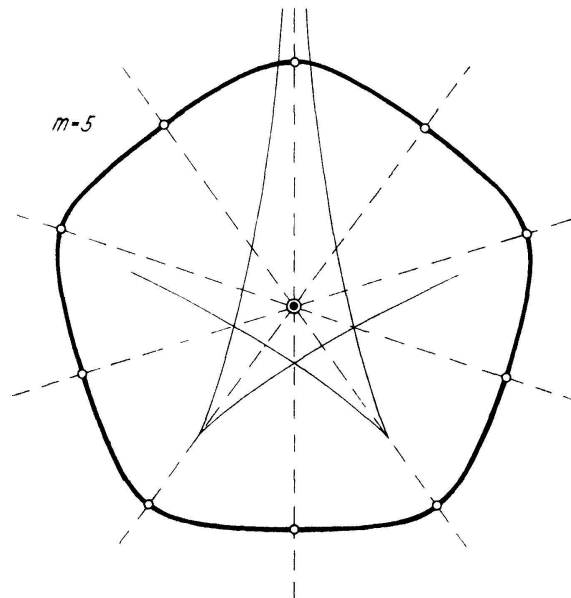
Figur 3



Figur 4



Figur 5



Figur 6

Zentrum Z_∞ (Figur 2); offenbar schwebte allein dieser Fall L. BIEBERBACH vor. Für $m = 2; 3; 4; \dots$ haben wir Eilinen mit $2m = 4; 6; 8; \dots$ Scheiteln und m Symmetrieachsen (Figuren 3, 4, 5, 6).

Die Kurve (1) schliesst sich dann und nur dann nach *genau* τ Umläufen, wenn

$$\sigma \alpha_1 = 2 \tau \pi \quad (3)$$

ist. Für $\sigma = 1$ kann sie jedoch *nie* *Eilinie* sein.

Wir befassen uns zunächst nur mit den Eilinen des Falles (2).

III.

Der Neigungswinkel der Kurventangenten von (1) gegen die positive x -Richtung ist

$$\alpha - \alpha_0 = \int \frac{ds}{R(s)} = \frac{2}{\mu \sqrt{\lambda^2 - 1}} \arctg \left(\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}} \operatorname{tg} \frac{s}{2a} \right). \quad (4)$$

Für $s = 0$ möge $\alpha = 0$ sein; dann wird $\alpha_0 = 0$. Nach der ersten halben primitiven Periode $p/2 = a\pi$ von (1) besitzt die Kurve den Neigungswinkel

$$\frac{\alpha_1}{2} = \frac{2}{\mu \sqrt{\lambda^2 - 1}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Wegen (2) erhalten wir daraus die folgende notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass (1) *die natürliche Gleichung einer Eilinie* ist:

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}. \quad (m > 1, \text{ ganz}) \quad (5)$$

Die *natürliche Gleichung dieser Eilinie* lautet dann

$$R(s) = \frac{m a}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \left(\lambda + \cos \frac{s}{a} \right). \quad (\lambda > 1) \quad (6)$$

Hierin stecken noch zwei willkürliche Parameter m und λ . Aus (4) wird nun mit $\alpha_0 = 0$

$$\alpha(s) = \frac{2}{m} \arctg \left(\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}} \operatorname{tg} \frac{s}{2a} \right). \quad (7)$$

Die kartesischen Koordinaten der Punkte unserer Eilinie sind bekanntlich

$$x - x_0 = \int \cos \alpha(s) ds, \quad y - y_0 = \int \sin \alpha(s) ds.$$

Ihre bequeme komplexe Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene lautet mit $z = x + iy$:

$$z - z_0 = \int e^{i\alpha(s)} ds = \int \frac{\left(\sqrt{\lambda + 1} \cos \frac{s}{2a} + i \sqrt{\lambda - 1} \sin \frac{s}{2a} \right)^{2/m}}{\left(\lambda + \cos \frac{s}{a} \right)^{1/m}} ds. \quad (8)$$

Führt man α statt s als Integrationsvariable ein, so erhält man nach etwas Rechnung schliesslich

$$z - z_0 = a m \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[\int \frac{\cos \alpha d\alpha}{\lambda - \cos m \alpha} + i \int \frac{\sin \alpha d\alpha}{\lambda - \cos m \alpha} \right]. \quad (9)$$

Die Integrale sind für alle ganzen m elementar lösbar. Die Darstellung (8) lässt den entscheidenden Einfluss von m auf die Gestalt der Eilinie erkennen.

IV.

Im einfachsten Falle $m = 2$ (Eilinie mit 4 Scheiteln und 2 Symmetrieachsen, $u = 2a\pi$) lautet nach der Substitution $\lambda + \cos(s/a) = t$ das Integral (8)

$$z - z_0 = -a \left[\sqrt{\frac{\lambda + 1}{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{(\lambda + 1)t - t^2}} + i \sqrt{\frac{\lambda - 1}{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{-(\lambda - 1)t + t^2}} \right].$$

Dessen Auswertung ergibt die folgende Parameterdarstellung der Eilinie

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= -a \sqrt{\frac{\lambda+1}{2}} \arccos \frac{\lambda+1-2t}{\lambda+1}, \\ y - y_0 &= -a \sqrt{\frac{\lambda-1}{2}} \operatorname{Arccos} \frac{-(\lambda-1)+2t}{\lambda-1}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die kartesische Gleichung ist dann für $x_0 = a\sqrt{(\lambda+1)}/2$ und $y_0 = 0$

$$\sqrt{\lambda+1} \cos \frac{x}{a\sqrt{2}(\lambda+1)} = \sqrt{\lambda-1} \operatorname{Arccos} \frac{y}{a\sqrt{2}(\lambda-1)}. \quad (11)$$

Diese transzendente Eilinie ist keine Ellipse, wie man vielleicht aus Figur 3 vermuten könnte; sie weicht jedoch von der Ellipse mit gleichen Hauptachsen um kaum mehr als Strichstärke ab.

V.

Wir studieren noch den Einfluss des Parameters λ auf die Eilinen mit $2m$ Scheiteln. Der Umfang dieser λ -Schar ist immer $u = 2am\pi$. Mit wachsendem $\lambda \rightarrow \infty$ geht (6) in die natürliche Gleichung des Kreises $R = ma$ über. Die Eilinie bläht sich zu einem Kreise gleichen Umfangs auf. Wegen

$$R_{\min} = R(a\pi + 2ak\pi) = ma \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}, \quad R_{\max} = R(2ak\pi) = ma \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}$$

gehen mit $\lambda \rightarrow 1$ der Scheitelkrümmungsradius R_{\min} gegen 0, aber alle Radien $R(s) \neq R_{\min}$ gegen ∞ . Die Eilinie zerfällt in Geradenstücke. Die Scheitel R_{\min} gehen jedoch in Ecken über. Da die Symmetrieeigenschaften der Kurve bei dem Grenzübergang erhalten bleiben, erhalten wir ein *regelmässiges m-Eck* mit der Seitenlänge $u/m = 2a\pi$. Dabei ist unter einem Zweieck die doppelt durchlaufene Strecke der Länge $2a\pi$ zu verstehen. Vgl. dazu für $m=3$ (6 Scheitel, 3 Symmetrieachsen) die Figur 7 mit den Werten $\lambda = 1; 1,01; 1,2; 3,0$ und ∞ .

VI.

Es liegt nahe, unter den Eilinen mit ungeradem m für spezielle λ *Gleichdicke* (Eilinen fester Breite d) zu vermuten. Es gilt:

1. Der Umfang des Gleichdicks ist $u = d\pi$.
2. Alle Normalen sind *Doppelnormalen*, und die beiden Krümmungsmittelpunkte auf den Doppelnormalen fallen in einem Punkte zusammen.

In den Scheiteln unserer Eilinie müsste dann gelten

$$\pi(R_{\min} + R_{\max}) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} 2ma\pi = \pi d = u.$$

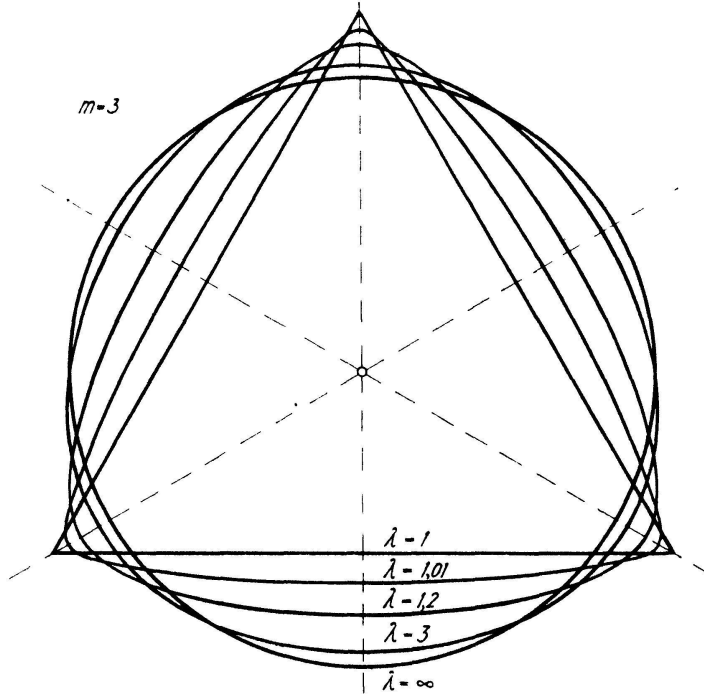
Daraus folgt

$$\lambda = \frac{2ma\pi}{\sqrt{u^2 - (2ma\pi)^2}}.$$

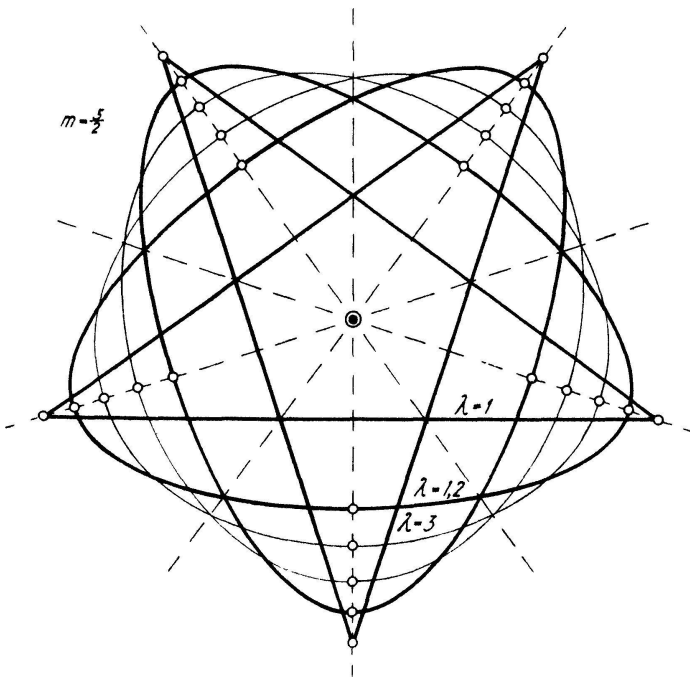
Da $u = 2ma\pi$ ist, wird $\lambda = \infty$. Es folgt: Nur die *Grenzlagen* $\lambda = \infty$ (Kreise) sind Gleichdicke.

VII.

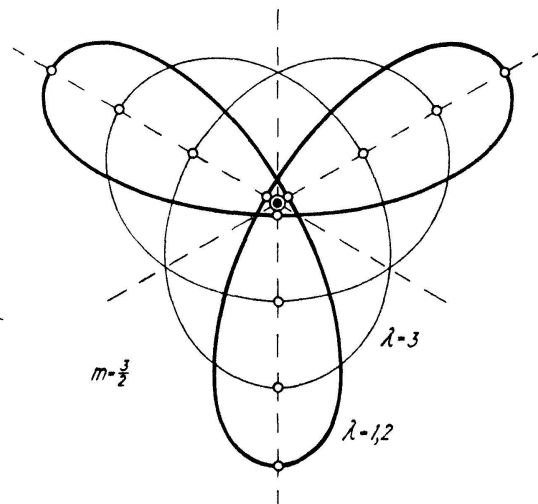
Für *nicht ganze* m erhalten wir eine Reihe eigenartiger Kurven, die – wie oben schon festgestellt wurde – nicht mehr eilinig sind, aber sich für rationale m schliessen. Wir ersetzen also m durch die positive rationale Zahl σ/τ . Wir erhalten aus (2) die



Figur 7



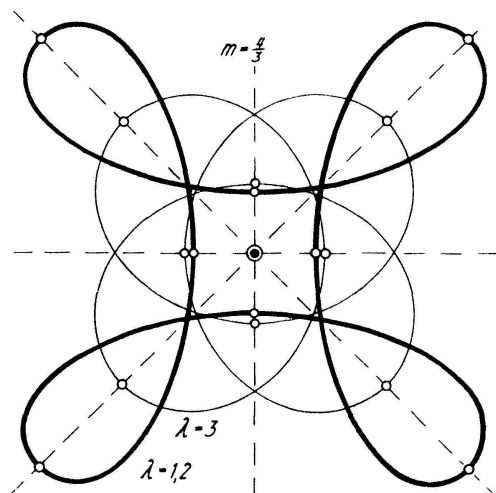
Figur 8



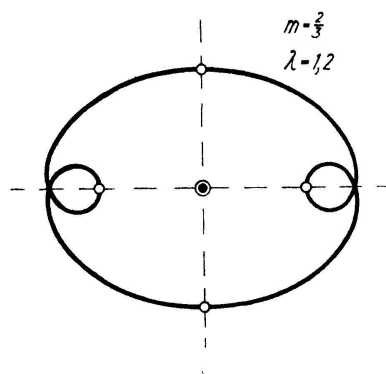
Figur 9

Gleichung (3). Aus dieser folgt: Die neuen Kurven schliessen sich nach genau τ vollen Umläufen. Sie durchlaufen die Periode $2 a \pi$ von $R(s)$ genau σ -mal. Die Kurven besitzen ein Zentrum Z , sie haben 2σ Scheitel und σ Symmetrieachsen, der Umfang ist

$u = 2 a \sigma \pi$ (Figuren 8, 9, 10 und 11). $\lambda \rightarrow \infty$ liefert wieder einen Kreis $R = (\sigma/\tau) a$ mit τ -fachem Umlauf und dem Gesamtumfange $u = \tau 2 R \pi = 2 \sigma a \pi$. Mit $\lambda \rightarrow 1$ erhält man ein σ -Eck, das zum Beispiel im Falle $\sigma = 5$, $\tau = 2$ ein regelmässiger 5-Stern (Pentagramm) ist (Figur 8).

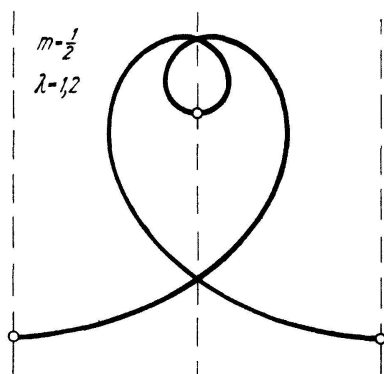


Figur 10

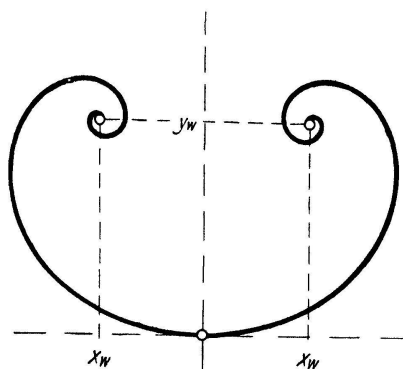


Figur 11

Der Sonderfall $\tau = 1$ fällt auf die schon behandelten Eiliniien $\sigma = m$ zurück. Im Falle $\sigma = 1$ erhalten wir (wie bei $m = 1$) Kurven mit uneigentlichem Zentrum Z_∞ (vgl. Figur 12, $\sigma/\tau = 1/2$, 1 Symmetrieachsenrichtung, 2 Umläufe).



Figur 12



Figur 13

Die Integrale (9) sind auch noch für rationale m elementar lösbar.

Für *irrationale* m schliessen sich die Kurven nicht, sie sind dann notwendig transzendent.

VIII.

Beim Grenzübergang $\lambda \rightarrow 1$ gingen wir stets von der natürlichen Gleichung (6) aus und erhielten regelmässige Vielecke. In der Darstellung (1) erhalten wir für $\lambda = 1$

$$R(s) = \mu a \left(1 + \cos \frac{s}{a} \right) = 2 \mu a \cos^2 \frac{s}{2a}. \quad (12)$$

Setzen wir in (5) $m = \sigma/\tau = \mu \sqrt{\lambda^2 - 1}$, so geht mit $\lambda \rightarrow 1$ $\tau \rightarrow \infty$. Wir müssen nach

VII eine *Kurve mit unendlich vielen Umläufen* erhalten. Die Konstruktion ergibt eine *Spirale* mit einer Symmetrieachse und zwei Wickelpunkten (Figur 13).

Der Neigungswinkel α ist in diesem Falle (mit $\alpha_0 = 0$)

$$\alpha = \int \frac{ds}{R(s)} = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg} \frac{s}{2a}. \quad (13)$$

Variiert s von 0 bis zur halben Periode $p/2 = a\pi$, so läuft tatsächlich α von 0 bis ∞ . Die Berechnung der *Parameterdarstellung der Kurve* führt auf nichtelementare Integrale:

$$x = 2a\mu \int_0^\alpha \frac{\cos \alpha \, d\alpha}{1 + (\mu\alpha)^2}, \quad y = 2a\mu \int_0^\alpha \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{1 + (\mu\alpha)^2}. \quad (14)$$

Die Koordinaten der *Wickelpunkte dieser Doppelspirale* sind

$$x_w = \pm a\pi e^{-1/\mu}, \quad y_w = a \left[e^{-1/\mu} \overline{Ei} \left(\frac{1}{\mu} \right) - e^{1/\mu} Ei \left(-\frac{1}{\mu} \right) \right]^{1/2}. \quad (15)$$

Die Doppelspirale hat zwischen ihren beiden Wickelpunkten die *endliche Länge* $4a\pi$.

W. KLEPPER, Karlsruhe.

Kleine Mitteilungen

Zwei Minimumprobleme über konvexe Rotationskörper

A. Einleitung

Vom Verfasser ist folgender Satz I bewiesen worden²⁾:

Satz I: Bei vorgeschriebener Körperlänge l und vorgeschriebener Meridiankurvenlänge L besitzen Zylinder und nur sie kleinstes Integral der mittlern Krümmung M , symmetrische Doppelkegel und nur diese Körper grösstes M .

In den analogen (L, F) - und (L, V) -Problemen liegen die Verhältnisse nicht so günstig. Immerhin gestattet die verwendete elementare Methode, folgende Sätze zu beweisen:

Satz II: Bei vorgeschriebener Körperlänge l und vorgeschriebener Meridiankurvenlänge L besitzen Kegelstümpfe (im weiteren Sinne) und nur diese Körper kleinste Oberfläche F .

Satz III: Bei vorgeschriebener Körperlänge l und vorgeschriebener Meridiankurvenlänge L besitzen

im Intervall $0 \leq L \leq \frac{4}{3}l$ Zylinder,

im Intervall $\frac{4}{3}l < L < \sqrt{2}l$ Kegelstümpfe (im engeren Sinne),

im Intervall $\sqrt{2}l \leq L < \infty$ Kegel

und nur diese Körper kleinstes Volumen V .

¹⁾ W. GRÖBNER und N. HOFREITER, *Integraltafel*, Bd. 2 (Springer, Wien und Innsbruck 1950), Nr. 333, 67a und 66a. Es ist

$$Ei(x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad \text{sowie} \quad \overline{Ei}(x) = \frac{1}{2} Ei^+(x) + \frac{1}{2} Ei^-(x),$$

wobei $Ei^+(x) = Ei(-x e^{-i\pi})$ und $Ei^-(x) = Ei(-x e^{i\pi})$ gilt.

²⁾ Ein Minimum-Maximum-Problem über konvexe Rotationskörper.