Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 9 (1954)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 173. Von EULER stammt das Problem der Bestimmung von Funktionen, die sich selber als Periode haben, das heisst der Funktionalgleichung

$$f[x + f(x)] = f(x)$$

genügen. Man gebe die allgemeine Lösung an. A. SPEISER, Basel.

Lösung: Aus $f[x + f(x)] = f(x)$ folgt sofort

$$f[x + n\, f(x)] = f(x) \quad (n = 0, 1, 2, 3 \ldots). \tag{1}$$

Die Annahme $f(0) = 0$ bewirkt im Ursprung eine wesentliche Singularität, aus der die Funktion nicht fortgesetzt werden kann, es sei deshalb $f(0) = a > 0$, folglich $f(n\,a) = a$. Nun sei eine beliebige Funktion $y = f_0(x)$ mit $f_0(0) = a$ für $0 \leqq x \leqq a$ definiert. Die zugehörige Kurve nenne ich die nullte Teilwelle w_0 der Funktion. Invers geschrieben, laute ihre Gleichung $x = \varphi_0(y)$. Dann folgt aus (1) sofort, dass

$$x = \varphi_0(y) + n\, y \tag{2}$$

die Funktionalgleichung löst. Die Funktion $y = f(x)$ soll nun auch nach hinten fortgesetzt werden durch die Forderung, dass n in (1) und (2) auch negative ganze Zahlen bedeuten kann. Dann ist zum Beispiel $f(-a) = a$. Eine andere Annahme führt zwar auf keinen Widerspruch, erzeugt aber für positive Werte von x neue Züge, was dadurch berücksichtigt werden kann, dass man für $f_0(x)$ auch mehrdeutige Funktionen zulässt.

S_n sei die Scherung mit $y = 0$ als Achse, die die y-Achse in die Gerade $x = n\,y$ überführt. Sie erzeugt die n-te Teilwelle w_n aus der nullten; w_n geht aber auch durch S_1 aus w_{n-1} hervor. Demnach gilt:

Alle Kurven, die der Funktionalgleichung genügen, haben die Eigenschaft, dass sie durch die Scherung S_1 in sich übergeführt werden.

Die Konstante $f(x) = a$ ist die einzige eindeutige und stetige Lösung. Man sieht nämlich leicht ein, dass eine stückweise stetige Lösung nicht überall eindeutig sein kann, jedes Minimum wird durch die fortgesetzten Scherungen vom vorangehenden Maximum schliesslich überholt. Hingegen kann man leicht unstetige, eindeutige Lösungen konstruieren, wie zum Beispiel:

$$f(0) = 0,$$
$$f(x) = q \quad \text{für rationales } x = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1,$$
$$f(x) = 0 \quad \text{für irrationales } x.$$

W. LÜSSY, Winterthur.

Anmerkung der Redaktion. Die Funktion in der obigen Lösung kann stetig gemacht werden, indem man die Punkte $[a, f_0(a)]$ und (a, a) geradlinig verbindet oder als nullte Teilwelle irgendeine Funktion mit $f_0(a) = a$ wählt. Die Fortsetzung nach hinten kann auch durch Spiegelung am Koordinatenursprung erfolgen. Man kann die y-Achse nach rechts oder links verschieben, denn mit $f(x)$ ist auch $f(x - x_0)$ eine Lösung der Funktionalgleichung. In der Tat hat man mit $F(x) = f(x - x_0)$

$$F[x + F(x)] = f[x - x_0 + F(x)] = f[x - x_0 + f(x - x_0)] = f(x - x_0) = F(x).$$

Die Funktionalgleichung tritt bei EULER (*Opera omnia* I_{27}, 365–383) auf bei der Lösung des folgenden Problems: Es sollen Kurven bestimmt werden, für die die Ordinate im Schnittpunkt einer Normalen mit der x-Achse gleich dem Normalenstück zwischen Kurve und x-Achse ist. EULER gibt als Lösung der Funktionalgleichung eine Funktion in Parameterdarstellung:

$$u = f(x) = h(\varphi), \qquad x = \frac{\varphi}{2\pi} h(\varphi) + k(\varphi),$$

wo $h(\varphi)$ und $k(\varphi)$ Fourier-Reihen sind. Wird φ um 2π vermehrt, so bleibt u ungeändert, und x vermehrt sich um $u = f(x)$. Aus der Lösung von LÜSSY mit $f_0(a) = a > 0$ ergibt sich die Eulersche Lösung auf folgende Weise (Mitteilung von A. PFLUGER):

$x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ sei die Parameterdarstellung einer Kurve, die $(0, a)$ mit (a, a) verbindet. Es ist also $\xi(0) = 0$, $\xi(1) = a$, $\eta(0) = \eta(1) = a$. Man setze

$$\begin{aligned} \xi(n+t) &= \xi(t) + n\,\eta(t) \qquad & 0 \leqq t \leqq 1 \\ \eta(n+t) &= \eta(t) \qquad & n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned} \tag{*}$$

Damit sind ξ und η für alle reellen t definiert und stellen eine Lösung der Funktionalgleichung dar. $\eta(t) = h(t)$ ist eine periodische Funktion mit der Periode 1. Setzen wir $\xi(t) - t\,\eta(t) = k(t)$, so ist $k(0) = k(1) = 0$. $k(t)$ kann periodisch fortgesetzt werden, denn es ist wegen (*)

$$k(n+t) = \xi(n+t) - (n+t)\,\eta(n+t) = k(t).$$

Damit hat man die Eulersche Darstellung:

$$\xi(t) = t\,h(t) + k(t), \qquad \eta(t) = h(t), \qquad -\infty < t < \infty,$$

wo $h(t)$ und $k(t)$ periodische Funktionen der Periode 1 sind. Natürlich können diese Schritte auch in umgekehrter Richtung gemacht werden, woraus die Äquivalenz der beiden Lösungen folgt.

Aufgabe 174. Man zeige: Ein von sechs berührend aneinanderschliessenden, 60gradigen Kreisbögen berandetes Mittelpunktsoval hat die Eigenschaft, in einem festen gleichseitigen Dreieck zwangläufig umwendbar zu sein, das heisst, eine kontinuierliche und geschlossene Bewegung zu gestatten, während welcher es ständig alle drei Seiten berührt. W. WUNDERLICH, Wien.

Lösung: Wegen der Zentralsymmetrie des Ovals sind gegenüberliegende Randbögen kongruent. Numeriert man also die Kreisbögen der Reihe nach von 1 bis 6, dann gilt für die entsprechend bezifferten Radien $r_1 = r_4$, $r_2 = r_5$, $r_3 = r_6$, und es bedeutet keine Einschränkung, etwa $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \geqq 0$ vorauszusetzen.

Als erstes soll gezeigt werden, dass die Kreisbogenmittelpunkte M_i zwei kongruente gleichseitige Dreiecke $M_1 M_3 M_5$ und $M_2 M_4 M_6$ bilden. Ist U der Schnittpunkt der Geraden $M_1 M_2$ und $M_3 M_4$, so gilt

$$\overline{M_2 U} = \overline{M_2 M_3} = r_2 - r_3 \quad \text{und} \quad \overline{M_1 U} = \overline{M_1 M_2} + \overline{M_2 U} = r_1 - r_3 = r_1 - r_6 = \overline{M_1 M_6}.$$

Auf Grund der 60gradigen Zentriwinkel ist $M_1 U M_6$ ein gleichseitiges Dreieck, so dass U auf $M_5 M_6$ liegt. Analog laufen die Strahlen $M_2 M_3$, $M_4 M_5$ und $M_6 M_1$ durch einen Punkt V. Wegen $\overline{M_2 M_3} = r_2 - r_3 = r_5 - r_6 = \overline{M_5 M_6}$ sind $M_2 M_3 U$ und $M_5 M_6 V$ zwei kongruente gleichseitige Dreiecke. Hieraus folgt

$$\overline{M_2 M_3} = \overline{M_3 U} = \overline{M_5 V}, \quad \overline{M_1 M_2} = \overline{M_5 U} = \overline{M_1 V},$$

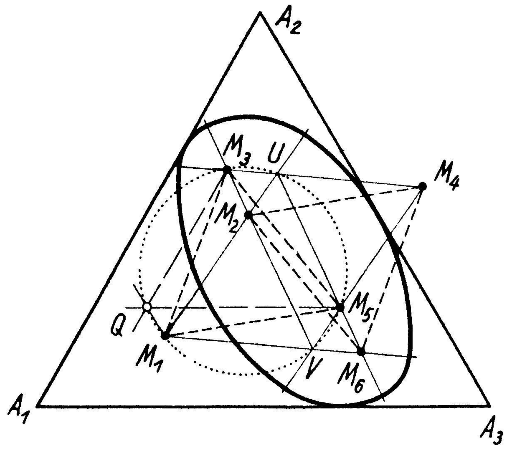
$$\sphericalangle M_1 M_2 M_3 = \sphericalangle M_3 U M_5 = \sphericalangle M_1 V M_5 = 120^\circ,$$

so dass

$$\triangle M_1 M_2 M_3 \cong \triangle M_3 U M_5 \cong \triangle M_1 V M_5.$$

Somit ist $\overline{M_1 M_3} = \overline{M_3 M_5} = \overline{M_5 M_1}$ und analog $\overline{M_2 M_4} = \overline{M_4 M_6} = \overline{M_6 M_2}$. Die Umkreise der Dreiecke $M_1 M_3 M_5$ und $M_2 M_4 M_6$ schneiden sich in U und V.

Die fragliche Eigenschaft des Ovals ist gleichwertig der Behauptung, alle dem Oval umbeschriebenen gleichseitigen Dreiecke seien gleich gross. Sei $A_1A_2A_3$ ein solches Umdreieck, das etwa die Bögen 1, 3, 5 berühre. Die durch die Mittelpunkte M_1, M_3, M_5 parallel zu den berührenden Dreiecksseiten gezogenen Geraden laufen auf Grund des Peripheriewinkelsatzes durch *einen* Punkt Q des Umkreises von $M_1M_3M_5$. Q liegt sicher nicht ausserhalb des Dreiecks $A_1A_2A_3$, und für einen solchen Punkt ist die



Summe seiner Abstände von den Dreieckseiten gleich der Dreieckshöhe h (Beweis mittels Flächenzerlegung). Demnach gilt $h = r_1 + r_2 + r_3 = \text{const}$, was zu beweisen war. Berührt das Dreieck $A_1A_2A_3$ die Bögen 2, 4, 6, so ist Q auf dem Umkreis des Dreiecks $M_2M_4M_6$.

J. SCHOPP, Budapest, W. WUNDERLICH, Wien.

Bemerkung des Aufgabenstellers

Besonders hinzuweisen wäre auf die beiden Grenzfälle $r_1 = r_2 > 0$, $r_3 = 0$ und $r_1 > 0$, $r_2 = r_3 = 0$, die in der Aufgabe 129 von E. TROST [El. Math. *6*, 64 (1951); Auflösung: El. Math. *7*, 91 (1952)] auftreten. Es handelt sich um «Linsen» aus zwei 120- bzw. 60gradigen Kreisbögen, deren Umwendbarkeit im gleichseitigen Dreieck übrigens schon länger bekannt ist; vgl. diesbezüglich F. REULEAUX, *Lehrbuch der Kinematik*, Bd. I (1875) bzw. M. FUJIWARA und S. KAKEYA, Tôhoku Math. J. *11* (1917). Hinsichtlich weiterer durch Kreisbögen berandeter Figuren, die in regelmässigen Vielecken zwangläufig umwendbar sind, vgl. W. WUNDERLICH, Z. angew. Math. Mech. *19* (1939), auch M. GOLDBERG, Amer. Math. Monthly *55* (1948).

Weitere Lösungen sandten W. KLEPPER (Karlsruhe), R. LAUFFER (Graz), E. ROTHMUND (Zürich), J. STROMMER (Budapest), A. UNTERBERGER (Bludenz).

Aufgabe 175. Man beweise: Liegen die Punkte A, B, C und D auf einem Kreis und ist O ein beliebiger Punkt der Kreisebene, dann ist

$$\overline{OA}^2 \cdot \text{Fl.}\,(BCD) - \overline{OB}^2 \cdot \text{Fl.}\,(ACD) + \overline{OC}^2 \cdot \text{Fl.}\,(ABD) - \overline{OD}^2\,\text{Fl.}\,(ABC) = 0.$$

R. LAUFFER, Graz.

Solution: Proposition préliminaire: Soit un quadrilatère convexe ayant pour sommets les points $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ et $D(x_4, y_4)$ rapportés à un système d'axes rectangulaires d'origine O'. A', B', C' et D' étant les projections orthogonales des points A, B, C, D sur l'axe des x, on a

$$x_1\,\text{Surf.}\,(BCD) - x_2\,\text{Surf.}\,(ACD) + x_3\,\text{Surf.}\,(ABD) - x_4\,\text{Surf.}\,(ABC) = 0.$$

Cela résulte immédiatement du fait que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

est nul. Supposons que, dans le problème à résoudre, O' soit le centre de la circonférence de rayon r passant par A, B, C et D, l'axe des x coïncidant avec $\overrightarrow{OO'}$. On a

$$\overline{OA}^2 = \overline{OO'}^2 + r^2 + 2\, x_1 \overline{OO'}$$

et trois expressions correspondantes pour $\overline{OB}^2$, $\overline{OC}^2$ et $\overline{OD}^2$. On en déduit, en désignant par S l'expression

$$\text{Surf.}\,(BCD) - \text{Surf.}\,(ACD) + \text{Surf.}\,(ABD) - \text{Surf.}\,(ABC),$$

qui est nulle,

$$\overline{OA}^2\,\text{Surf.}\,(BCD) - \overline{OB}^2\,\text{Surf.}\,(ACD) + \overline{OC}^2\,\text{Surf.}\,(ABD) - \overline{OD}^2\,\text{Surf.}\,(ABC)$$
$$= \overline{OO'}^2 S + r^2 S + 2\,\overline{OO'}\,[x_1\,\text{Surf.}\,(BCD) - x_2\,\text{Surf.}\,(ACD)$$
$$+ x_3\,\text{Surf.}\,(ABD) - x_4\,\text{Surf.}\,(ABC)] = 0.$$

Remarque. Le théorème reste vrai si O se déplace perpendiculairement au plan de la figure, donc si O est un point quelconque de l'espace. C. VUILLE, La Chaux-de-Fonds.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), E. ROTHMUND (Zürich), J. SCHOPP (Budapest), J. STROMMER (Budapest), A. UNTERBERGER (Bludenz).

Herr S. V. PAVLOVIĆ (Belgrad) schreibt uns: Ce problème est déjà connu sous le nom du *théorème de Luchterhand* [Crelles J. *23* (1842), voir aussi *Leçons de Géométrie analytique* par E. PRUVOST, tome 1, p. 122 (1886)]. N. SALTYKOW l'avait généralisé dans son *Cours de Géométrie analytique*, tome 2, p. 45 (Belgrade 1949), de la manière suivante: Soient M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 cinq points sur une sphère et un point O quelconque dans l'espace. Il existe alors la relation

$$\overline{OM}_1^2\,\text{vol.}\,(M_2M_3M_4M_5) + \overline{OM}_3^2\,\text{vol.}\,(M_1M_2M_4M_5) + \overline{OM}_5^2\,\text{vol.}\,(M_1M_2M_3M_4)$$
$$- \overline{OM}_2^2\,\text{vol.}\,(M_1M_3M_4M_5) - \overline{OM}_4^2\,\text{vol.}\,(M_1M_2M_3M_5) = 0\,.$$

Cette relation provient de la condition nécessaire et suffisante pour que cinq points se trouvent sur une même sphère:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x}_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \mathfrak{x}_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \mathfrak{x}_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ \mathfrak{x}_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ \mathfrak{x}_5^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$\mathfrak{x}_i$ étant les rayons vecteurs des points M_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) par rapport au point O, pris pour l'origine des coordonnées.

Aufgabe 176. Man beweise: $\binom{n^k-1}{n}$ ist zu n teilerfremd, wenn k so gross ist, dass die k-te Potenz des kleinsten Primfaktors von n grösser ist als n (n und k natürliche Zahlen). A. STOLL, Zürich.

Lösung:

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i} \quad (p_1 < p_2 < \cdots < p_r,\ e_i \geqq 1)$$

sei die Primfaktorendarstellung von n. In

$$\binom{n^k - 1}{n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{n^k - j}{j}, \tag{*}$$

wo wir $k > 1$ voraussetzen können, sind je zwei übereinanderstehende Zahlen $n^k - j$ und j entweder beide durch den Primteiler p_i von n teilbar oder beide durch p_i unteilbar. Uns interessiert nur die erste Möglichkeit. Geht p_i in j genau in der Potenz $p_i^{h_i}$ auf, so gilt nach der Voraussetzung der Aufgabe

$$p_i^{h_i} \leqq j \leqq n < p_1^k \leqq p_i^k \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Somit ist $h_i < k \leqq k\, e_i$. Hieraus folgt, dass $n^k - j$ genau durch $p_i^{h_i}$ teilbar ist, so dass sich auf der rechten Seite von (*) alle Primfaktoren p_i wegkürzen. Damit ist die verlangte Teilerfremdheit bewiesen. A. BAGER, Hjørring, A. REUSCHEL, Wien.

Weitere Lösungen sandten F. GOLDNER (London) und R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 177. L'orthocentre H d'un tétraèdre orthocentrique $ABCD$ se confond avec le centre radical des premières sphères des douze points des tétraèdres $HBCD$ $HCDA$, $HDAB$, $HABC$, et ces sphères sont orthogonales à une sphère de rayon $\varrho\sqrt{1/2}$, ϱ étant celui de la sphère conjuguée au tétraèdre $ABCD$.

V. THÉBAULT, Tennie, Sarthe (France).

Lösung: Der Simplex $A(\mathfrak{a})$, $B(\mathfrak{b})$, $C(\mathfrak{c})$, $D(\mathfrak{d})$ ist Polarsimplex der Kugel $\mathfrak{x}^2 = \varrho^2$, $\varrho \neq 0$, wenn

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{d} = \mathfrak{c}\,\mathfrak{d} = \varrho^2.$$

Der Koordinatenursprung O ist Höhenschnittpunkt H dieses Simplex. Die Zwölfpunktekugel $(\mathfrak{x} - \mathfrak{m}_4)^2 = r_4^2$ des Simplex $HABC$ geht durch die Halbierungspunkte der Kanten dieses Simplex. Die Ortsvektoren sind

$$\frac{\mathfrak{a}}{2}, \quad \frac{\mathfrak{b}}{2}, \quad \frac{\mathfrak{c}}{2}, \quad \frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}{2}, \quad \frac{\mathfrak{c}+\mathfrak{a}}{2}, \quad \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}{2}.$$

Es ist daher

$$\mathfrak{a}^2 - 4\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}_4 + 4\,\mathfrak{m}_4^2 = 4\,r_4^2,$$

$$\mathfrak{b}^2 - 4\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{m}_4 + 4\,\mathfrak{m}_4^2 = 4\,r_4^2,$$

$$\mathfrak{a}^2 + 2\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} + \mathfrak{b}^2 - 4\,(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\,\mathfrak{m}_4 + 4\,\mathfrak{m}_4^2 = 4\,r_4^2.$$

Man erhält daraus

$$\mathfrak{m}_4^2 - r_4^2 = \frac{\varrho^2}{2},$$

das heisst, die Zwölfpunktekugel des Simplex $HABC$ schneidet die Kugel $\mathfrak{x}^2 = \varrho^2/2$ normal. R. LAUFFER, Graz.

Neue Aufgaben

204. Ein prismatischer Bleistift, dessen Querschnitt ein reguläres Sechseck mit der Seite s ist, wird maschinell angespitzt. l sei die gesamte Länge des gespitzten Bleistiftes und $2\,\alpha$ der Öffnungswinkel der kegelförmigen Spitze. Man ermittle das Volumen des gespitzten Bleistiftes als Funktion von l, s und α.

A. UNTERBERGER, Bludenz.

205. Man zeige: a) Alle Kegelstümpfe, die in der Höhe und in der Länge der erzeugenden «Meridiankurve» (Mantellinie + Radien der begrenzenden Kreise) übereinstimmen, haben dieselbe Gesamtoberfläche.

b) Es gibt genau einen nichttrivialen Zylinder und einen symmetrischen Doppelkegel, welche in der Gesamtoberfläche und im Flächeninhalt eines Achsenschnittes übereinstimmen. H. BIERI, Bern.

206. Zwei koaxiale Drehzylinder mit den Radien r und $2r$ werden auf beiden Seiten durch je ein Paraboloid zweiter Ordnung begrenzt, dessen Achse parallel zur Zylinderachse ist. Es sei V_2 das Volumen des Zylinders mit dem Radius $2r$, und M_1 und M_2 seien die Mantelflächen der Zylinder mit den Radien r bzw. $2r$. Man zeige, dass unabhängig von der Wahl der beiden Paraboloide gilt:

$$3V_2 = r(4M_1 + M_2).$$

R. LAUFFER, Graz.

207. a) Keine Quadratzahl weist in dezimaler Schreibung lauter gleiche Ziffern auf, es wäre denn eine einzige. (Demgegenüber besteht zum Beispiel 121 im Dreiersystem aus lauter Einern.)

b) Es gibt nach Aufgabe 163 Quadratzahlen, die in dezimaler Schreibung mit einer beliebig vorgegebenen Ziffernfolge beginnen, also auch mit lauter gleichen Ziffern. Aber Endungen mit lauter gleichen Ziffern, wie etwa bei 144, gibt es nur sehr wenige. Welche? A. STOLL, Zürich.

208. Berechne für ein ganzes $n \geqq 1$ und ein ganzes $p \geqq 0$ die Summe

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{n+k+p}.$$

E. TROST, Zürich.

Literaturüberschau

E. TROST: *Primzahlen*

95 Seiten, Verlag Birkhäuser, Basel 1953

Die Lehre von der Verteilung der Primzahlen wurde nach dem Erscheinen der bekannten Arbeit von BERNHARD RIEMANN zunächst mit Hilfsmitteln der Funktionentheorie bearbeitet. Seit einigen Jahrzehnten begannen Forscher, «elementare Methoden», welche nur den Logarithmus aus der Funktionentheorie entlehnen, zu entwickeln, und sie erhielten damit überraschende Resultate. Der Verfasser gibt eine klare und reichhaltige Übersicht über dieses noch relativ junge Gebiet, und er versteht es, auch dem Freund der Mathematik, der über wenige Spezialkenntnisse verfügt, die Pforte zu öffnen und ihn zu fesseln. Denn dass das Arbeiten in den Fragen der Primzahlen grosse Freude bereitet, ist längst bekannt.

Zunächst wird der Primzahlsatz in der Gestalt $\lim \pi(x) \log x/x = 1$ vorgeführt, wo $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet. Gleich wird auch gezeigt, wie EUKLIDS Verfahren zum Beweis der Existenz unendlichvieler Primzahlen sogar auf gewisse arithmetische Progressionen ausgedehnt werden kann. Es folgen grundlegende Sätze aus der Zahlentheorie, namentlich ein musterhaft kurzer Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes. Tief in die Lehre von den binären quadratischen Formen führt die Frage, welche unter ihnen «viele» Primzahlen darstellen, wobei das Autorenverzeichnis durch FROBENIUS zu ergänzen wäre. Auch hier wird für einige Fälle ein schöner Satz mit einfachen Mitteln bewiesen. Besonders gut scheint mir der Abschnitt VI, «Allgemeine Aussagen über $\pi(x)$ und p_n», gelungen zu sein. Nicht nur werden eine Reihe