Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 9 (1954)
Heft: 2

Artikel: Die Unendlichkeit der Zahlenreihe
Autor: Finsler, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17356

LITERATUR

Fünf wichtige Arbeiten von P. FINSLER zur Grundlagenfrage:

Gibt es Widersprüche in der Mathematik?, Jber. Dtsch. Math.-Ver. *34*, 143–155 (1926).

Formale Beweise und die Entscheidbarkeit, Math. Z. *25*, 676–682 (1926).

Über die Grundlegung der Mengenlehre, Math. Z. *25*, 683–713 (1926).

Gibt es unentscheidbare Sätze?, Comment. Math. Helv. *16*, 310–320 (1943/44).

Über die Berechtigung infinitesimalgeometrischer Betrachtungen, Convegno di Geometria Differenziale, 1953 (Edizioni Cremonese, Roma 1954).

Die Unendlichkeit der Zahlenreihe[1]

Es freut mich, hier in Ihrem Kreise sprechen zu können, in Basel mit seiner altehrwürdigen mathematischen Tradition, und über einen Gegenstand, der wohl auch innerhalb der Mathematik als altehrwürdig bezeichnet werden kann, nämlich über die natürlichen Zahlen.

Auch die Frage, ob es etwas Unendliches gibt, ist schon sehr alt; manche sagen ja, andere sagen nein, das gilt auch heute noch.

Versuche, die Unendlichkeit der Zahlenreihe zu beweisen, also zu zeigen, dass es zu jeder Zahl immer eine noch grössere Zahl gibt, sind im letzten Jahrhundert gemacht worden; ich nenne hier

BOLZANO	1851:	*Paradoxien des Unendlichen* (§ 13).
FREGE	1884:	*Die Grundlagen der Arithmetik* (§ 78 ff.).
DEDEKIND	1887:	*Was sind und was sollen die Zahlen?* (§ 5).

Besonders die spätere Entwicklung der Mengenlehre hat dann aber gezeigt, dass diese Beweise nicht ausreichend sind.

DEDEKIND zum Beispiel gibt in seiner Schrift einen strengen Aufbau des Operierens mit den natürlichen Zahlen unter der Voraussetzung, dass es unendlich viele Dinge gibt. Für diese Voraussetzung gibt er aber eine Begründung, die man nicht als stichhaltig betrachten kann. DEDEKIND schliesst etwa so: Er betrachtet die Welt der denkbaren Dinge. Dazu gehört das eigene Ich und zu jedem Ding der Gedanke an dieses Ding. So erhält man also den Gedanken an das Ich, dann den Gedanken an den Gedanken an das Ich usf. und damit scheinbar eine unendliche Reihe von Gedanken. Aber doch nur scheinbar. Wenn man nämlich diese Reihe wirklich zu bilden versucht, dann sieht man, dass man diese Gedanken sehr bald schon nicht mehr voneinander unterscheiden kann, besonders, wenn man die natürlichen Zahlen noch nicht hat, mit denen man sie zählen könnte; und man sieht auch, dass man bald schon diese Gedanken nicht mehr weiter bilden kann. Die Reihe dieser Gedanken ist nicht unendlich.

Diese Überlegung zeigt nun aber auch, dass es nicht selbstverständlich ist, dass die Reihe der natürlichen Zahlen unendlich ist. Auch hier könnte es eine Stelle geben, wo man einfach nicht mehr weiterkommt. Wenn es tatsächlich nichts Unendliches gibt, dann ist auch die Zahlenreihe nicht unendlich.

[1]) Vortrag vor der Mathematischen Gesellschaft Basel, gehalten am 29. Juni 1953. – Es ist für unsere Zeitschrift eine Ehre, diesen bedeutenden Vortrag veröffentlichen zu dürfen. *Die Redaktion.*

Wenn wir diese Frage nun entscheiden wollen, ob die Zahlenreihe endlich oder ob sie unendlich ist, dann müssen wir zuerst sagen, was die natürlichen Zahlen sind oder was wir hier darunter verstehen wollen, denn sonst hat die Frage keinen Sinn.

Was also sind die natürlichen Zahlen in der Mathematik?

Es sind hier auf jeden Fall nicht die Zahlwörter eins, zwei, drei, vier usw. Es sind auch nicht die Zahlzeichen 1, 2, 3, 4 usw. Es sind auch nicht etwa hintereinandergesetzte Striche ////..., obschon alle diese Dinge ganz gut zum Zählen gebraucht werden können. Wenn wir zählen, dann verwenden wir die Zahlwörter eins, zwei, drei, vier usw.; aber damit kommen wir nicht sehr weit, ganz bestimmt nicht bis ins Unendliche.

Was sind nun also die Zahlen, wie sie in der Mathematik vorkommen? Diese sollen auf jeden Fall von der Sprache unabhängig sein, die wir gerade sprechen, und dann sollen sie vor allem auch unvergänglich sein, während doch diese Striche zum Beispiel sehr rasch vergänglich sind. Die Zahlen, die Euler untersucht hat, sind genau dieselben, die wir auch heute noch untersuchen; sie sind also wirklich unvergänglich.

Also diese Zahlwörter und Zahlzeichen sind nichts anderes als Namen oder Bezeichnungen für die Zahlen selbst, genau so, wie das Wort «Haus» nur ein Name ist für ein Haus, in dem man wirklich wohnen kann.

Wenn aber die Zahlen unvergänglich sind, so folgt schon, dass sie nicht realer, materieller Natur sind, denn bei materiellen Dingen können wir immer annehmen, dass sie vergänglich sind. Die Zahlen sind also ideelle Dinge, und das ist auch das erste und allereinfachste, was wir in der reinen Mathematik wirklich brauchen: Wir brauchen ideelle Dinge, mit denen ~~wir operieren~~ und über die wir etwas aussagen können.

Dazu brauchen wir aber noch mindestens eine Beziehung zwischen diesen Dingen, denn mit Dingen ohne jede Beziehung können wir nicht viel anfangen.

Eine solche Beziehung einfachster Art ist nun gerade bei den natürlichen Zahlen gegeben, nämlich die Beziehung, dass zum Beispiel die Zahl 4 auf 3 folgt. Wir sagen dafür auch, 4 ist der Nachfolger von 3, oder 3 ist der Vorgänger von 4; es ist das einfach eine unsymmetrische Beziehung zwischen 4 und 3, die wir auch durch einen Pfeil darstellen können: $4 \rightarrow 3$. Ich lasse den Pfeil absichtlich von 4 nach 3 gehen und nicht umgekehrt; denn in der umgekehrten Richtung wissen wir ja noch nicht, wie weit wir kommen; in dieser Richtung kommen wir zunächst bis zu 1: $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Dies ist also eine ursprünglich gegebene Beziehung zwischen diesen Zahlen, eine *Grundbeziehung*, die nicht schon andere Beziehungen als gegeben voraussetzt. Wir können diese Beziehung auch mit einem Buchstaben bezeichnen, etwa mit β, und dann sagen, es gilt $4\,\beta\,3$, $3\,\beta\,2$, $2\,\beta\,1$.

Es ist nun zweckmässig, auch noch $1\,\beta\,0$ zu setzen, also eine Null einzuführen, welche Vorgänger von Eins, aber selbst keine natürliche Zahl sein soll, und diese Null soll auch keinen Vorgänger haben. Jede natürliche Zahl hat dann genau einen Vorgänger, die Null hat keinen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt die Null und die natürlichen Zahlen vollständig definieren:

Definition

Die Null und die natürlichen Zahlen sind ideelle Dinge, die durch eine Grundbeziehung β miteinander verknüpft und allein durch diese Grundbeziehung festgelegt sind. Dabei soll noch folgendes gelten:

1) $0\,\beta\,x$ *gilt nicht.* Das heisst, Null hat keinen Vorgänger.

2) $Z(n)$, *wenn* $n\,\beta\,0$ *oder* $n\,\beta\,m$ *mit* $Z(m)$, *aber nicht* $n\,\beta\,a$ *und* $n\,\beta\,b$ *mit* $a \neq b$.

Dabei bedeutet $Z(n)$: n ist eine natürliche Zahl. 2) besagt also, dass n eine natürliche Zahl ist, wenn es genau einen Vorgänger hat, der entweder die Null oder selbst eine natürliche Zahl ist. Dies soll auch nur in diesem Fall gelten, das heisst, genauer wird noch gefordert:

3) $Z(n)$ *gilt nur, wenn notwendig.*

Dies besagt also, dass n nur dann eine natürliche Zahl ist, wenn aus 1) und 2) folgt, dass es eine natürliche Zahl sein muss.

Wenn zum Beispiel für ein Ding x gilt $x\,\beta\,x$, so dass also x sein eigener Vorgänger ist, dann ist x keine natürliche Zahl; denn wenn man annimmt, dass x keine natürliche Zahl ist, dann muss es auch nach 2) keine sein, also nach 3) ist es keine. Aus der Annahme, dass $Z(x)$ gilt, würde nach 2) auch $Z(x)$ folgen; aber diese Annahme ist nicht notwendig, und deshalb gilt $Z(x)$ nicht.

Dagegen ist 1 wegen $1\,\beta\,0$ notwendig eine natürliche Zahl; ebenso 2 mit $2\,\beta\,1$ usf. Das System der natürlichen Zahlen ist also nicht leer, es enthält die Zahlen 1, 2, 3, 4; es ist eindeutig bestimmt, denn irgendein gegebenes n muss entweder nach 1) und 2) notwendig eine natürliche Zahl sein, oder dies ist nicht der Fall, dann ist es keine.

Schliesslich sind die natürlichen Zahlen hierdurch auch widerspruchsfrei definiert, denn es wird nichts Unmögliches verlangt: Nur *wenn* ein Ding n gewisse Eigenschaften hat, dann ist es eine natürliche Zahl, sonst nicht.

Insbesondere wird also nicht verlangt, dass es zu jeder Zahl m eine darauffolgende Zahl n mit $n\,\beta\,m$ geben müsse. Ob es das gibt, das muss ja gerade noch untersucht werden.

Man kann aber jetzt schon Sätze über die natürlichen Zahlen herleiten, und zwar insbesondere den Schluss von n auf $n+1$, das heisst das Prinzip der vollständigen Induktion; nur muss dieses Prinzip so formuliert werden, dass die Existenz von $n+1$ nicht schon vorausgesetzt wird. Man kann es so formulieren:

Vollständige Induktion

$\mathfrak{A}(n)$ *sei eine beliebige Aussage über natürliche Zahlen.*

Wenn $\mathfrak{A}(1)$ *gilt und aus der Voraussetzung, dass* $\mathfrak{A}(m)$ *gilt und* n *eine auf* m *folgende natürliche Zahl ist, folgt, dass auch* $\mathfrak{A}(n)$ *gilt, dann gilt* $\mathfrak{A}(n)$ *für alle natürlichen Zahlen* n.

Es wird also nicht gefordert, dass es zu jedem m ein solches n geben müsse.

Der Beweis geht so: Man betrachtet die Gesamtheit der Zahlen n, für die $\mathfrak{A}(n)$ richtig ist. Zu dieser Gesamtheit gehört die Zahl 1, und wenn m dazu gehört und n eine natürliche Zahl ist, die auf m folgt, so gehört auch n dazu; also gehören alle diejenigen n dazu, die nach 2) notwendig natürliche Zahlen sind. Dies sind aber nach 3) alle natürlichen Zahlen überhaupt. Also gilt $\mathfrak{A}(n)$ für alle natürlichen Zahlen n.

Nun kommen wir wieder zu der Frage, ob die Zahlenreihe unendlich ist, ob es also zu jeder dieser Zahlen m eine Zahl n gibt, so dass $n\,\beta\,m$ gilt.

Es scheint nun wohl so, als ob dies in der Welt der ideellen Dinge eigentlich selbstverständlich wäre, denn man sieht zunächst keinen Grund, der einen hindern würde, zu jeder Zahl m eine folgende Zahl n anzunehmen.

In Wirklichkeit gibt es aber einen solchen Grund, und dass dies der Fall ist, das sieht man bei der Betrachtung der Ordnungszahlen.

Ich will hier die Ordnungszahlen nur anschaulich erklären; sie sollen ja nur zum Vergleich dienen.

Wenn wir die natürlichen Zahlen anschaulich erklären wollen, dann können wir etwa so sagen: Wir beginnen mit der Zahl 1 und setzen dann hinter jede Zahl, die wir auf diese Weise erhalten, eine neue Zahl. So erhalten wir die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ..., und dies geht anscheinend immer weiter bis ins Unendliche.

Bei den Ordnungszahlen ist es nun so: Man beginnt hier zweckmässig mit 0, dann kommt 1, und dann setzt man hinter jede Zahlenreihe, die man auf diese Weise erhält, eine neue Zahl.

So erhält man zunächst die endlichen Ordnungszahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 ..., die man gewöhnlich ebenso bezeichnet wie die natürlichen Zahlen.

Hinter diese Reihe der endlichen Ordnungszahlen setzt man dann wieder eine neue Zahl ω, dann $\omega + 1$, $\omega + 2$ usw., hinter alle diese die Zahl $\omega + \omega$, dann $\omega + \omega + 1$ usw., und auch diese Konstruktion kann man anscheinend immer weiter fortsetzen.

In Wirklichkeit geht dies aber nicht, denn hinter die Reihe aller Ordnungszahlen kann man keine neue Ordnungszahl mehr setzen, denn dies wäre doch ein Widerspruch: wenn man schon alle Ordnungszahlen hat, dann gibt es keine neue mehr.

Man kann sogar zeigen, dass es unter diesen Ordnungszahlen eine grösste gibt[1]), also eine bestimmte letzte Ordnungszahl L, und hinter diese Zahl L kann man dann keine weitere Ordnungszahl mehr setzen, weil es eben keine mehr gibt.

Es ist also gar nicht selbstverständlich, dass man hinter jede Zahl eine weitere setzen kann; bei den Ordnungszahlen geht es nicht, es fragt sich, ob es bei den natürlichen Zahlen geht, oder ob es nicht auch da eine grösste gibt.

Um dies zu entscheiden, muss man sich zuerst klarmachen, was der Grund ist, dass man bei den Ordnungszahlen schliesslich nicht mehr weiterkommt. Der Grund liegt nicht einfach in dem Wort «alle»; das ist ein klarer und logisch einwandfreier Begriff. Der eigentliche Grund liegt vielmehr in einem unerfüllbaren Zirkel: Die Konstruktionsvorschrift für die Ordnungszahlen ist zirkelhafter Natur, sie bezieht sich ganz deutlich auf sich selbst, und dieser Zirkel ist eben schliesslich nicht mehr erfüllbar. Es heisst ja in der Vorschrift, man solle hinter jede Zahlenreihe, die man durch eben diese erst zu definierende Vorschrift erhält, eine neue Zahl setzen.

Und wie ist es bei den natürlichen Zahlen? Nun, da ist die Konstruktionsvorschrift genau ebenso zirkelhaft: es heisst doch auch da, man solle hinter jede Zahl, die man durch eben diese erst zu definierende Vorschrift erhält, eine neue Zahl setzen; auch das könnte unmöglich sein. Auch bei der früheren Definition der natürlichen Zahlen kommt das $Z(m)$ in der Definition von $Z(n)$ schon vor. Dieser Zirkel lässt sich nicht einfach wegschaffen.

Wenn man nun diesen Zirkel nicht wegschaffen kann, dann muss man eben zeigen, dass er bei den natürlichen Zahlen unschädlich ist. Aber auch das ist nicht so einfach; man muss sich erst klarmachen, wann ein solcher Zirkel etwas schaden kann, und dazu muss man ein allgemeineres System von Dingen untersuchen als das der natürlichen Zahlen, nämlich ein solches, in dem der Schaden wirklich auftritt. Man könnte

[1]) Vgl. *Les Entretiens de Zurich 1938*, Zürich 1941, S. 177.

die Ordnungszahlen nehmen; besser ist aber ein noch allgemeineres System, das der reinen Mengen, deren Elemente nur wieder reine Mengen sind.

Ich will jetzt genauer erklären, was wir unter einer reinen Menge oder kurz unter einer *Menge* verstehen wollen. Wie gesagt, ist es eine Verallgemeinerung der natürlichen Zahlen. Der Unterschied ist im wesentlichen nur der, dass eine natürliche Zahl immer nur *einen* Vorgänger hat, während eine Menge beliebig viele Vorgänger haben kann. Für eine Menge M kann also auch für $a \neq b \neq c$ gelten $M \beta a$, $M \beta b$, $M \beta c$ usw., wobei diese Dinge a, b, c usw. auch wieder Mengen sein sollen. Die «Vorgänger» nennt man dann die *Elemente* von M und schreibt $M = \{a, b, c, \ldots\}$. Dies erklärt auch den Namen «Menge»; in Wirklichkeit sind aber die Mengen auch nur ideelle Dinge, welche durch die β-Beziehung mit ihren Elementen verknüpft sind.

Die genaue Definition der Mengen lautet nun so:

Definition

Die Mengen sind ideelle Dinge, die durch eine Grundbeziehung β miteinander verknüpft und allein durch diese Grundbeziehung festgelegt sind. Dabei soll noch folgendes gelten:

a) *Jede Menge bestimmt ihre Elemente, das heisst die Mengen, zu denen sie die Beziehung β besitzt.*

Wenn also eine Menge gegeben ist, so sind auch ihre Elemente gegeben. Es gilt aber nicht das Umgekehrte; wenn bestimmte Mengen gegeben sind, dann braucht es nicht eine Menge zu geben, welche gerade diese Mengen als Elemente besitzt; das darf man nicht verlangen.

Eine weitere Forderung bezieht sich auf die *Identität* von Mengen:

b) *Die Mengen M und N sind identisch immer, wenn möglich.*

Also immer dann, wenn die Annahme, dass die Mengen M und N identisch sind, keinen Widerspruch enthält, soll $M = N$ sein.

Wenn also zum Beispiel $I = \{I\}$ und $K = \{K\}$ gesetzt wird, so folgt $I = K$. Man könnte sagen, das ist selbstverständlich, denn die Mengen I und K unterscheiden sich tatsächlich nicht, dann darf man auch nicht festsetzen, dass sie verschieden sind, das wäre ein Widerspruch. Es gibt aber Fälle, wo diese Entscheidung nicht so einfach ist; deshalb wird b) gefordert.

Es ist noch eine weitere Bedingung nötig, nämlich

c) *M ist Menge immer, wenn möglich.*

Es könnte sonst sein, dass es gar keine Mengen gibt. Also immer, wenn die Annahme, M sei eine Menge, keinen Widerspruch enthält, dann soll M eine Menge sein.

Es folgt nun, dass es Mengen gibt. Zum Beispiel die Null ist die Nullmenge, die kein Element besitzt; die natürliche Zahl 1 ist die Menge, die 0 als Element enthält, 2 enthält 1 als Element usw.; also die natürlichen Zahlen sind bestimmte Mengen.

Das System aller Mengen ist also nicht leer; es ist eindeutig und widerspruchsfrei festgelegt, denn es wird wieder nirgends etwas Unmögliches verlangt; nur *wenn* ein Ding gewisse Eigenschaften hat, dann ist es eine Menge.

Es gibt aber Fälle, wo es zu gegebenen Elementen keine zugehörige Menge gibt. So zum Beispiel, wenn man alle Mengen betrachtet, die sich nicht selbst enthalten, also alle Mengen N, für die $N \beta N$ nicht gilt, so gibt es keine Menge, die alle und nur diese Mengen N enthält, denn sie müsste sich selbst enthalten, wenn sie sich nicht enthält, und dürfte sich nicht enthalten, wenn sie sich enthält. Der Grund, warum diese Menge nicht existiert, ist also wieder ein unerfüllbarer Zirkel in der Definition der Menge.

Es kann aber sein, dass eine zirkelhaft definierte Menge doch existiert; zum Beispiel die Menge aller Mengen enthält sich selbst und alle anderen Mengen, hier ergibt sich kein Widerspruch, diese Menge existiert, sie ist aber zirkelhafter Natur.

Es gibt aber auch Mengen, die zirkelfrei definiert sind, so zum Beispiel die Nullmenge 0, die 1, die 2. Hier tritt bei der Definition keinerlei Zirkel auf; dies sind explizite Definitionen.

Es kommt nun darauf an, diese beiden Fälle gut voneinander zu unterscheiden. Welches sind die zirkelfreien und welches die zirkelhaften Mengen?

Hier ergibt sich aber wieder eine Schwierigkeit: Diese Unterscheidung kann nicht explizit, also nicht in zirkelfreier Weise gegeben werden. Wäre dies nämlich möglich, dann könnte auch die «Menge aller zirkelfreien Mengen» explizit, also zirkelfrei erklärt werden, sie wäre dann selbst eine zirkelfreie Menge, aber als solche müsste sie sich selbst enthalten, und eine sich selbst enthaltende Menge können wir doch nicht als zirkelfrei bezeichnen.

Diese Unterscheidung zwischen zirkelfreien und zirkelhaften Mengen kann also nur durch eine implizite Definition gegeben werden; hier kommt man mit einfachem Konstruieren nicht weiter. Um nicht an die anschauliche Vorstellung gebunden zu sein, schreiben wir «z-frei» an Stelle von «zirkelfrei» und definieren:

I. *Eine Menge ist z-frei, wenn ihre Elemente z-frei sind und sie selbst nicht vom Begriff «z-frei» abhängt.*

II. *Eine Menge ist z-frei nur, wenn notwendig.*

Eine Menge ist vom Begriff «z-frei» unabhängig, wenn sie sich auf Grund ihrer Definition nicht ändert, gleichgültig, welche Mengen als z-frei bezeichnet werden. Mit andern Worten: Man macht zunächst die Annahme, irgendwelche gegebene Mengen seien z-frei und die andern nicht. Solange noch nicht feststeht, welche Mengen z-frei sind, ist diese Annahme zulässig. Wenn dann eine Menge M auf Grund ihrer Definition unabhängig von dieser Annahme eindeutig festliegt, dann ist sie vom Begriff «z-frei» unabhängig.

Die «Menge aller z-freien Mengen» ist vom Begriff «z-frei» abhängig, denn sie ändert sich nach dieser Definition, sobald man neue Mengen als z-frei bezeichnet. Wird keine Menge als z-frei bezeichnet, dann ist es die Nullmenge; werden alle als z-frei bezeichnet, dann ist es die Menge aller Mengen. Die Menge kann aber auch nicht auf andere Weise ohne diesen Begriff definiert werden, denn sonst wäre sie z-frei und müsste sich selbst enthalten, was, wie sich zeigen wird, nicht sein kann. Aber die Nullmenge ist vom Begriff «z-frei» unabhängig, weil man sie als «Menge ohne Elemente» definieren kann, ohne diesen Begriff zu verwenden; dies bleibt immer dieselbe Menge.

Es mag auffallen, dass es Mengen gibt, die von einem bestimmten Begriff abhängen, die man also nicht definieren kann, ohne diesen Begriff zu Hilfe zu nehmen. Dass es das aber gibt, zeigt sich schon an einem andern Beispiel: Die «Menge aller Mengen» ist vom Begriff «alle» abhängig. Wenn man nämlich diese Menge definieren könnte, ohne den Begriff «alle» zu verwenden, dann könnte es keinen Widerspruch ergeben, wenn man noch weitere Mengen bilden wollte, und das darf doch nicht sein.

Ich will jetzt zeigen, dass eine z-freie Menge sich nicht selbst enthalten kann. Dies folgt aus der Forderung II. Wenn nämlich M sich selbst enthält, also $M \beta M$ gilt, dann kann man die Menge M zunächst als z-haft, das heisst als nicht z-frei bezeichnen. Dann enthält sie nicht nur z-freie Elemente, sie muss also nach I nicht z-frei sein, und nach II ist sie es auch nicht. Also: *Jede sich selbst enthaltende Menge ist z-haft.*

Aber die natürlichen Zahlen sind z-frei. Dies ergibt sich mit dem Induktionsprinzip: 0 und 1 sind z-freie Mengen. Wenn $n = \{m\}$ ist und m ist z-frei, dann ist auch n z-frei, denn n enthält nur ein z-freies Element und ist vom Begriff «z-frei» unabhängig. Also sind alle natürlichen Zahlen z-frei.

Dass jede natürliche Zahl von allen ihr vorangehenden verschieden ist, folgt schon aus den Forderungen 2) und 3).

Nun ist aber immer noch nicht bewiesen, dass es unendlich viele Zahlen gibt, dass es also zu jeder Zahl m eine Zahl $n = \{m\}$ gibt. Da die natürlichen Zahlen z-freie Mengen sind, genügt es, allgemeiner zu zeigen, dass es zu jeder z-freien Menge M eine Menge N gibt, die sie als einziges Element enthält: $N = \{M\}$.

Dazu will ich zuerst einen scheinbar komplizierteren, in Wirklichkeit aber einfacheren Fall betrachten, um zu zeigen, wie man nun eine solche Existenz in nichttrivialen Fällen beweisen kann. Ich will zeigen, dass die Menge aller z-freien Mengen existiert.

Sie werde mit U bezeichnet. Die Annahme, U sei selbst eine z-freie Menge, führt zu einem Widerspruch, denn dann müsste sie sich selbst enthalten, und das geht nicht. Nun mache ich die Annahme, U sei eine z-hafte Menge. Diese Annahme enthält keinen Widerspruch, denn erstens ist dann U tatsächlich eine neue, von allen gegebenen verschiedene Menge, denn die gegebenen sind ja alle z-frei, und zweitens ist U auch nach Definition z-haft, nämlich vom Begriff «z-frei» abhängig, denn sonst könnte es nicht zu einem Widerspruch führen, wenn man U nachträglich als z-frei bezeichnet. Wenn aber die Annahme, dass U eine z-hafte Menge ist, keinen Widerspruch enthält, dann ist sie erfüllt, und U existiert also.

Genau so folgt nun aber allgemeiner:

Wenn die Annahme, eine Gesamtheit V von z-freien Mengen bilde eine z-freie Menge, zu einem Widerspruch führt, dann bildet V eine z-hafte Menge.

Zum Beweis braucht man oben nur U durch die zu V gehörige Menge zu ersetzen.

Dieser Satz wird nun angewendet auf die Gesamtheit, die aus der einen z-freien Menge M besteht:

Wenn die Annahme, diese Gesamtheit bilde eine z-freie Menge, zu einem Widerspruch führen würde, dann würde sie eine z-hafte Menge bilden. Das tut sie nun aber nicht, denn die Menge $N = \{M\}$ ist nicht z-haft, sie enthält ja nur z-freie Mengen und ist selbst nicht vom Begriff «z-frei» abhängig. Also ist die gemachte Annahme falsch, und die Annahme, dass N eine z-freie Menge ist, kann keinen Widerspruch enthalten. Daraus folgt aber, dass N existiert, und damit ist bewiesen, dass es zu jeder natürlichen Zahl eine folgende gibt, dass also die Zahlenreihe unendlich ist.

Um noch ein Bild zu gebrauchen, ist es also so: Das Unendliche ist einem zunächst verschlossen. Wenn man es haben will, dann muss man es aufschliessen. Dazu braucht man einen Schlüssel, und diesen Schlüssel muss man umdrehen. Dieses Umdrehen bedeutet aber einen Zirkel. Wenn man einen solchen erfüllbaren Zirkel nicht zulässt, dann bekommt man das Unendliche eben nicht. Wenn man dies aber zulässt, dann bekommt man es.

P. FINSLER, Zürich.