Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 9 (1954)

Heft: 1

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

points, are the tangent planes from d to the required sphere. The three-dimensional construction is thus completed.

As will be readily confirmed, the equation of the conchoidal octic surface is as follows:

$$\left.\begin{aligned}\left[(X^2+Y^2+Z^2+m^2W^2)\left(Z+\frac{W}{m}\right)^2-r^2Z^2W^2\right]^2\\ =4\,m^2W^2(X^2+Y^2)\left(Z+\frac{W}{m}\right)^4.\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

For the plane $Y=0$, this leads back (substituting Z, W for Y, Z respectively) to equation (13) for the symmetrical pair of conchoids as in figure 4. As in figure 6, § 9, a family of surfaces of this type will envelop each negative sphere. Inserting $Z=0$ in (14), we obtain $W=0$ counting quadruply and the nodal circle $X^2+Y^2-m^2W^2=0$ counting doubly; this circle is of course an isolated feature if the plane conchoid sections have isolated points for nodes.

George Adams, Clent, Stourbridge (England).

Kleine Mitteilungen

Drei neue Näherungskonstruktionen für die Quadratur des Kreises

In dieser Zeitschrift[1]) wurden kürzlich mehrere Verfahren mitgeteilt, um zu einem gegebenen Kreis mit Zirkel und Lineal ein nahezu flächengleiches Quadrat zu konstruieren oder, was dasselbe ist, Näherungswerte für

$$\sqrt{\pi}=1{,}772\,453\,85\ldots$$

elementargeometrisch zu realisieren. Wir vermehren diese Möglichkeiten hier um drei einfache und recht genaue Konstruktionen, deren Berechnung mit Hilfe der Satzgruppe des Pythagoras keinerlei Schwierigkeiten bietet.

Wir bezeichnen durchwegs mit O und r Mittelpunkt und Radius des gegebenen Kreises, mit A und B Eckpunkte des Näherungsquadrates.

a) Der Wert

$$\sqrt{17-8\sqrt{3}}=\sqrt{3{,}143\,59\ldots}=1{,}773\,01\ldots$$

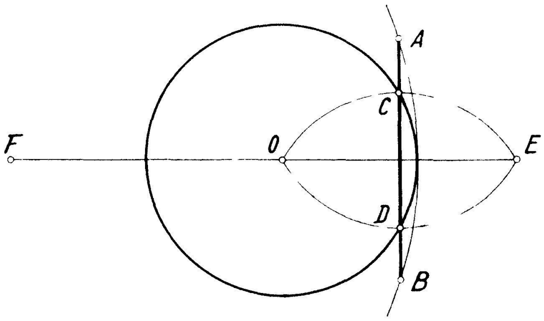
ist zwar nur um wenig genauer als die oben erwähnten Näherungen. Hingegen erlaubt er eine bemerkenswert einfache Konstruktion (Figur 1). Mit dem Radius r schlagen wir aus einem beliebigen Peripheriepunkt C des gegebenen Kreises den Bogen ODE, aus dem Schnittpunkt D den Bogen OCE. Wird die Strecke EO über O hinaus um $OF=2r$ verlängert, so schneidet der Kreis mit Zentrum F und Radius $3r$ aus der Geraden CD eine Sehne der Länge $AB=r\sqrt{17-8\sqrt{3}}$, also die gesuchte Quadratseite. Man beachte nämlich, dass die Hälfte dieser Sehne Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $FA=3r$ und der zweiten Kathete $2r+(r\sqrt{3})/2$ ist.

[1]) E. Voellmy, *Die Quadratur des Kreises in Näherungskonstruktionen*, El. Math. *5*, 12–15 (1950). A. Zinniker, *Zwei neue Näherungskonstruktionen der Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal*, El. Math. *6*, 112–113 (1951). Neben den in diesen Mitteilungen zu findenden weitern Literaturvermerken sei u. a. auf Th. Vahlen, *Konstruktionen und Approximationen* (Teubner, Leipzig 1911), sowie auf ausserordentlich scharfe Näherungen von S. Ramanujan, *Modular Equations and Approximations to π*, Quart. J. *45*, 350–372 (1914) hingewiesen.

b) Der Wert

$$\frac{2}{25}\sqrt{1201}-1=1{,}772\,435\ldots$$

bietet erhebliche Genauigkeit und eine reizvolle Konstruktionsmöglichkeit (Figur 2), indem wir von einem dem gegebenen Kreis einbeschriebenen Dreieck CDB mit dem

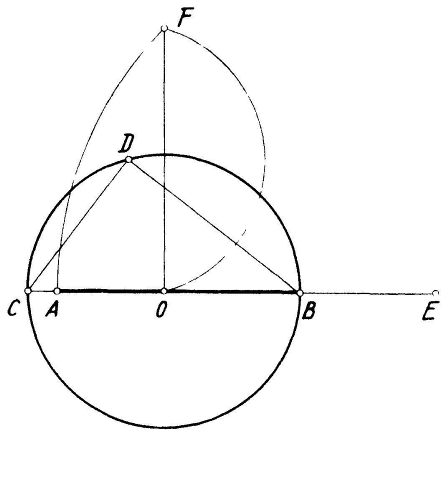


Figur 1

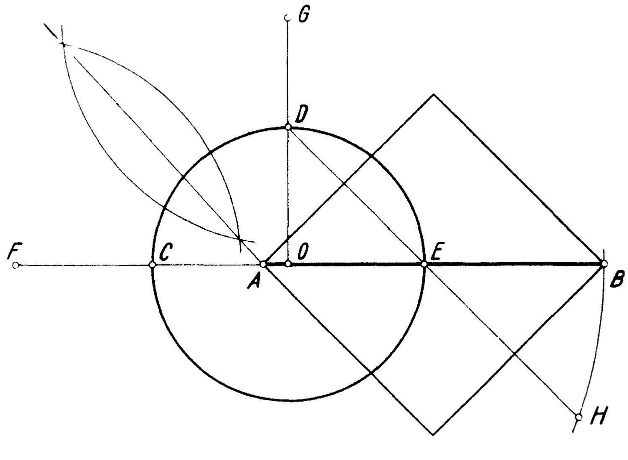
pythagoreischen Seitenverhältnis 3:4:5 ausgehen können. Die Hypotenuse CB dieses Dreiecks, zugleich Durchmesser, werde um $BE=r$ verlängert. Schneidet nun der Kreis um D durch O die Mittelsenkrechte von CB ein zweites Mal in F, der Kreis um E durch F den Durchmesser CB in A, so bildet

$$AB=\left(\frac{2}{25}\sqrt{1201}-1\right)r$$

die Seite des gesuchten Quadrates.



Figur 2



Figur 3

Zur Bestätigung braucht man nur zu bemerken, dass OF doppelt so lang ist wie die Höhe $24\,r/25$ des pythagoreischen Dreiecks, so dass sich

$$EA=EF=r\sqrt{2^2+\left(\frac{48}{25}\right)^2}$$

ergibt.

c) Die vorige Näherung sowie die bei E. Voellmy (l. c.) der Genauigkeit wegen wiedergegebene von Kunze-Enriques wird durch die Approximation

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\sqrt{11}-0{,}81)=1{,}772\,451\,3\ldots$$

noch übertroffen. Wir konstruieren die Diagonale $AB = (\sqrt{11} - 0{,}9^2)\, r$ des gesuchten Quadrates (Figur 3). Dazu mögen C, D und E drei der Schnittpunkte des gegebenen Kreises mit einem konzentrischen rechtwinkligen Achsenkreuz bezeichnen, derart, dass EC ein Durchmesser ist. Wir verlängern diesen um $CF = r$, ebenso den Radius OD um $DG = 4\, r/5$ und erhalten als Schnittpunkt von CE mit der Mittelsenkrechten von FG den Diagonalendpunkt A. Den andern Endpunkt B finden wir, indem DE auf die Länge $DH = 3\, r$ verlängert und $CH = CB$ auf die Durchmessergerade CE abgetragen wird.

Zur Berechnung findet man einerseits das rechtwinklige Dreieck CDH mit der Hypotenuse $CH = r\sqrt{11}$, anderseits über AF als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete auf der gezeichneten Mittelsenkrechten liegt. C ist Fusspunkt der Höhe von der Länge $OG/2 = 9\, r/10$. Somit muss der Hypotenusenabschnitt CA nach dem Höhensatz $81\, r/100$ betragen.

Wir erwähnen noch, dass die in den beiden letzten Konstruktionen notwendigen (in den Abbildungen weggelassenen) Streckenteilungen mit Vorteil unter Ausnutzung der ohnehin notwendigen Linien und Teilpunkte gezeichnet werden, und dass sich bei günstiger Anordnung der Konstruktionsschritte weitere geometrographische Vereinfachungen erzielen lassen.

Die verwendeten Näherungswerte[1]) stammen vom ersten, Vereinfachungen in den Konstruktionen vom zweiten der Verfasser.

H. Riedwil (Biglen), H. Debrunner (Bern).

Aufgaben

Aufgabe 145. Es sei $n_1 < n_2 < \dots$ eine unendliche Folge ganzer Zahlen, es sei $\overline{\lim} \log n_k / \log k = \infty$. Dann ist $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n_k}$ transzendent. P. Erdös, London.

Solution: If $\overline{\lim}\, n_{k+1}/n_k = \infty$ then α is a Liouville number. Hence for the remainder of the proof we may assume that there is a c such that $n_{k+1} < c\, n_k$ for all k. Under this assumption we establish the following:

Lemma: Let

$$S_k = \left\{ \sum_{i=1}^{l} n_{k_i} \mid l \leqq k \right\}$$

then for every $\varepsilon > 0$ there is an element s_{k+1} of S_{k+1} such that

$$|s_{k+1} - s_k| > s_{k+1}^{1-\varepsilon}$$

for every s_k in S_k and

$$s_{k+1} - s'_{k+1} > s_{k+1}^{1-\varepsilon}$$

for every s'_{k+1} in S_{k+1}, $s'_{k+1} < s_{k+1}$.

Proof: For every $\varepsilon_1 > 0$ there must exist an x such that the number of elements of S_{k+1} below x is less than x^{ε_1}. Hence there must exist a pair s'_k, s_k of successive elements of S_k such that

$$s'_k < s_k < x \quad \text{and} \quad s_k - s'_k > x^{1-\varepsilon_1}.$$

If we choose x so large that $x^{\varepsilon_1} > \max(c, 2)$ then there must also exist an n_l in S such that

$$x^{1-3\varepsilon_1} < n_l < x^{1-2\varepsilon_1}.$$

[1]) Weitere gefundene Approximationen sind

$$\frac{1}{5}\sqrt{11 + 4\sqrt{285}}, \quad \frac{\sqrt{1018}}{18}, \quad \frac{2}{7}\left(11 - \sqrt{23}\right).$$