Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 9 (1954)
Heft: 1

Artikel: Einfall und Überlegung in der Mathematik
Autor: Waerden, B.L. van der
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-17353

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

El. Math. Band IX Nr. 1 Seiten 1-24 Basel, 15. Januar 1954

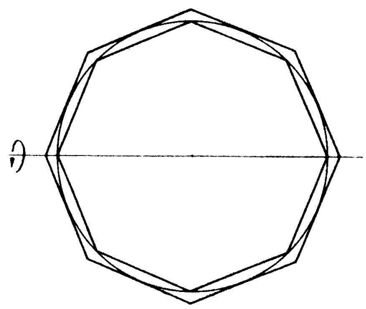
Einfall und Überlegung in der Mathematik[1])

Inhalt und Oberfläche der Kugel nach Archimedes

In der vorangehenden Abhandlung I wurde erklärt, wie ARCHIMEDES Inhalt und Oberfläche der Kugel gefunden hat. Seine Hebelmethode machte es ihm plausibel, dass die Kugel dem Inhalte nach gleich zwei Dritteln des umbeschriebenen Zylinders ist und ihre Oberfläche gleich der vierfachen Fläche eines Grosskreises.

Nachdem ARCHIMEDES diese Ergebnisse gefunden hatte, ergab sich ihm das Problem, wie man sie beweist. Die Beweise sind in vollendeter Weise in der schönen Abhandlung *Kugel und Zylinder* dargestellt[2]). Wir wollen uns an Hand der eigenen Darstellung des ARCHIMEDES überlegen, wieviel in diesen Beweisen durch systematische *Überlegung* gefunden sein kann und welche Rolle dem *Einfall* zukommt.

Wie erwähnt, schliesst ARCHIMEDES den Kreis zwischen zwei regulären um- und einbeschriebenen Polygonen von gerader Seitenzahl ein und lässt beide Polygone und den Kreis um eine gemeinsame Diagonale rotieren. So entstehen zwei ähnliche Rotationskörper, welche die Kugel zwischen sich einschliessen. Damit die Rotationskörper nur von Kegelflächen begrenzt werden, wählt ARCHIMEDES eine durch vier teilbare Seitenzahl.



Figur 1

Warum er Rotationskörper gewählt hat, ist ebenfalls klar. Er hätte auch Polyeder wählen können, aber es gibt nur fünf konvexe reguläre Polyeder, und es ist nicht leicht, eine gesetzmässig fortschreitende Folge von unregelmässigen Polyedern zu konstruieren, die die Kugel von innen und aussen beliebig nahe approximieren. Die Inhaltsbestimmung einer solchen Polyederfolge würde jedenfalls sehr kompliziert ausfallen. Auf Grund dieser naheliegenden Überlegung wird ARCHIMEDES die einfachsten brauchbaren, nämlich durch reguläre Polygone erzeugten Rotationskörper gewählt haben.

Dass die Kugel dem Inhalte nach kleiner ist als der umbeschriebene Körper, aber grösser als der einbeschriebene, ist klar, denn «das Ganze ist grösser als der Teil». Aber woraus soll man schliessen, dass die Oberfläche der Kugel auch kleiner ist als die umbeschriebene und grösser als die einbeschriebene Oberfläche? Unter den Axiomen,

[1]) 2. Mitteilung.

[2]) Übersetzung von A. CZWALINA in OSTWALDS *Klassiker der exakten Wissenschaften*, Nr. 202.

die bei EUKLID stehen, kommt keines vor, das gestattet, zwei solche Flächeninhalte zu vergleichen. Also sind neue Axiome nötig.

ARCHIMEDES definiert zunächst, wann er ein Kurvenstück oder ein Flächenstück «nach einer Seite gekrümmt» nennt. Er formuliert dann fünf Postulate:

«Ich setze voraus:

1. Von allen Linienstücken, die gleiche Endpunkte haben, ist die gerade Linie die kürzeste.

2. Die übrigen Linien aber, die in einer und derselben Ebene liegen und dieselben Endpunkte haben, sind einander ungleich, wenn sie nach der gleichen Seite konkav sind und die eine ganz von der anderen und der geraden Verbindungslinie der Endpunkte umfasst wird oder teilweise umfasst wird, teilweise mit einer der beiden Linien identisch ist. Und zwar ist diejenige, welche umfasst wird, die kleinere.

3. In ähnlicher Weise ist auch unter Flächenstücken, die die gleiche ebene Kurve als Grenzlinie haben, das ebene Flächenstück das kleinste.

4. Die übrigen Flächen aber, die dieselbe ebene Grenzkurve haben, sind ungleich, wenn sie nach derselben Seite konkav sind und die eine Fläche von der anderen und der Ebene, in der die Grenzkurve liegt, ganz eingeschlossen wird oder teilweise eingeschlossen wird, teilweise mit einer dieser Flächen identisch ist. Und zwar ist die eingeschlossene Fläche die kleinere.

5. Die grössere von zwei gegebenen Grössen, sei es Linie, Fläche oder Körper, überragt die kleinere um eine Differenz, die, genügend oft vervielfacht, jede der beiden gegebenen Grössen übertrifft.»

Die Postulate sind anschaulich einleuchtend. Das fünfte Postulat ist nicht neu, sondern es wurde schon von EUDOXOS bei seinen Inhaltsbestimmungen benutzt. Man nennt es das Archimedische Axiom oder das Postulat des EUDOXOS.

Aus dem vierten Postulat folgt sehr leicht, dass von den beiden Rotationsflächen, die die Kugelfläche zwischen sich einschliessen, die eine kleiner und die andere grösser als die Kugelfläche ist.

Durch Ebenen senkrecht zur Achse können die Rotationskörper leicht in Scheiben zerlegt werden, wobei jede Scheibe ein Kegelstumpf ist.

Zur Bestimmung der Kugeloberfläche hat man also

(1) die gekrümmte Oberfläche eines Kegelstumpfes zu bestimmen;

(2) die Oberflächen der Kegelstumpfe zu summieren;

(3) zu beweisen, dass vier Grosskreise der Kugel zusammen grösser sind als die Oberfläche des inneren Rotationskörpers, aber kleiner als die des äusseren;

(4) zu beweisen, dass die Differenz zwischen der äusseren und der inneren Oberfläche beliebig klein gemacht werden kann, das heisst kleiner als irgendein vorgegebenes Flächenstück.

(5) Hat man diese vier Punkte einmal erledigt, so folgt nach der bekannten Methode der «Exhaustionsbeweise» des EUDOXOS, dass die Oberfläche der Kugel weder kleiner noch grösser sein kann als vier Grosskreise, also ist sie gleich vier Grosskreisen.

Zur Bestimmung des Rauminhaltes der Kugel hat man ein ähnliches Programm durchzuführen.

Man sieht, welche Erleichterung durch die Aufstellung eines solchen Programms eingetreten ist. Statt einer sehr schweren Aufgabe hat man fünf viel leichtere

Probleme zu lösen. Vorbedingung für diese Problemzerlegung ist, dass man erstens das Modell der Exhaustionsbeweise des EUDOXOS klar vor Augen hat und zweitens, dass man das Ergebnis, das herauskommen soll, nämlich die vier Grosskreise, von vornherein schon kennt. Alles übrige ist bewusste Überlegung.

ARCHIMEDES geht nun daran, nacheinander die fünf Punkte auszuführen.

1. Die Oberfläche eines Kegelstumpfes ist die Differenz zweier Kegelmäntel mit gemeinsamer Spitze. Also hat man zuerst die Oberfläche eines Kegelmantels zu bestimmen.

Das geschieht wieder durch Approximation von aussen und von innen, nach einem ganz ähnlichen Programm. Dem Grundkreis des Kegels werden zwei reguläre Polygone einbeschrieben und umbeschrieben. Verbindet man ihre Seiten und Ecken mit der Kegelspitze, so erhält man zwei reguläre Pyramiden, zwischen denen der Kegel liegt. ARCHIMEDES bestimmt nun zunächst die Oberflächen der beiden Pyramiden ohne ihre Grundflächen (Satz 7 und 8). Das ist ganz leicht: Jede der beiden Oberflächen ist einem Dreieck gleich, dessen Grundlinie gleich dem Umfang der Grundfläche der Pyramide ist, mit einer Höhe gleich dem von der Spitze auf eine Seite der Grundfläche gefällten Lot.

Sodann beweist ARCHIMEDES, dass der Kegelmantel grösser ist als die Oberfläche der inneren Pyramide ohne die Grundfläche, aber kleiner als die der äusseren (Satz 9 und 10). Ganz selbstverständlich ist das nicht. Postulat 4 kann nicht unmittelbar angewandt werden, da die verglichenen Oberflächen nicht denselben Rand haben. Durch fortgesetzte Halbierung der Kreisbogen und geschickte Abschätzungen gelingt es aber doch.

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, die Oberfläche eines Kegelmantels zu bestimmen. Durch direkten Grenzübergang von der Pyramide zum Kegel würde man folgenden Satz erhalten: Der Kegelmantel ist gleich einem Dreieck, dessen Basis gleich dem Umfang des Grundkreises und dessen Höhe gleich der Seitenlinie des Kegels ist. Dies entspricht unserer modernen Formel

$$F = \pi r s .$$

ARCHIMEDES aber ersetzt $r s$ durch t^2, wobei t die mittlere Proportionale zwischen r und s ist. Er formuliert daher Satz 14 so:

Der Mantel eines geraden Kegels ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen der Seitenlinie des Kegels und dem Radius des Grundkreises ist.

Diese Formulierung ist deswegen zweckmässiger, weil das gesuchte Endergebnis, die vierfache Fläche eines Grosskreises der Kugel, ebenfalls eine Kreisfläche ist. Es ist natürlich angenehm, wenn die approximierenden Flächen ebenfalls als Kreisflächen ausgedrückt werden.

Man könnte dagegen einwenden, dass die Oberflächen der Rotationskörper, die die Kugel zwischen sich einschieben, keine Kegelmäntel, sondern Summen von Kegelmantelscheiben sind, dass ihre Oberflächen also nicht Kreisflächen, sondern als Summen von Differenzen von Kreisflächen erscheinen. Es ist aber sehr leicht, eine Summe oder Differenz von Kreisflächen wieder als Kreisfläche darzustellen. Kreise sind ja nach Euklid XII, Satz 2, proportional zu den Quadraten auf ihren Radien, und eine

Summe oder Differenz von Quadraten kann leicht in ein flächengleiches Quadrat verwandelt werden.

Die Formulierung des Satzes 14 mittels einer Kreisfläche ist ein glücklicher Einfall, der eine elegante Bestimmung der Kugelfläche ermöglicht. Wesentlich ist der Einfall aber nicht: mit den Rechtecken rs wäre es auch gegangen. Man hätte etwa so sagen können: Die Mantelfläche verhält sich zum Rechteck $r\,s$ wie ein Kreis zum Quadrat auf seinem Radius.

Der Beweis des Satzes 14 ist wunderschön in seiner einfachen Klarheit. Alles wickelt sich so ab, wie es nach dem Vorausgegangenen zu erwarten war, in vollendeter Harmonie. Der Kegelmantel kann weder grösser noch kleiner sein als der Kreis, also muss er ihm gleich sein. Ein klassischer Exhaustionsbeweis nach der Methode des Eudoxos.

Im Vorbeigehen behandelt Archimedes die Mantelfläche des Zylinders nach derselben Methode (Satz 11–13).

Im Satz 16 wird die Mantelfläche eines Kegelstumpfes bestimmt, natürlich als Differenz zweier Kegelmäntel mit gemeinsamer Spitze. Das Ergebnis wird wiederum sehr elegant formuliert:

Das Stück des Kegelmantels, das zwischen den parallelen Ebenen liegt, ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen dem abgeschnittenen Stück der Seitenlinien und der Summe der Radien der beiden Schnittkreise ist.

Damit ist Punkt 1 des Programms erledigt.

Bei Punkt 2 handelt es sich darum, die Flächen der Kegelstumpfe, die zusammen den einbeschriebenen Rotationskörper bilden, zu addieren.

Jede einzelne Mantelfläche ist gleich einem Kreis, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen der Seitenlinie und der Summe der Radien der Randkreise ist. Das kann man auch so ausdrücken: das Quadrat über dem Radius ist gleich dem Rechteck aus der Seitenlinie und der Summe der Radien der Randkreise.

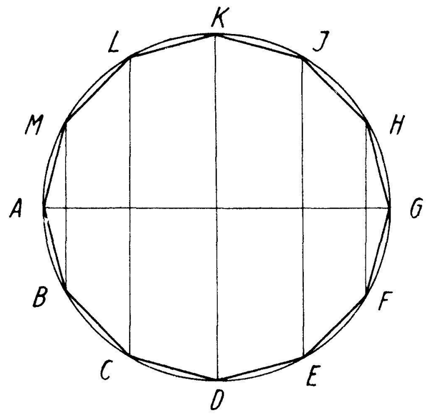
Nun hat man alle diese Kreise zu summieren. Da Kreise proportional den Quadraten über ihren Radien sind, genügt es, diese Quadrate zu summieren. Da jedes Quadrat gleich einem Rechteck ist, genügt es, die Rechtecke zu summieren. Das ist aber ganz leicht, da die eine Rechteckseite, nämlich die Seite des rotierenden regulären Polygons, bei allen diesen Rechtecken gleich ist. Setzt man also die Rechtecke, die alle die gleiche Basis haben, aneinander, so erhält man als gesamte Höhe die Summe aller Radien der Randkreise, jede zweimal gezählt, oder die Summe der Durchmesser aller Randkreise. So erhält man, durch reine Überlegung, als Ergebnis den Satz 24:

Die Oberfläche der der Kugel einbeschriebenen Figur ist gleich einem Kreis, dessen Radius, zum Quadrat erhoben, gleich dem Rechteck ist, das gebildet wird aus der Polygonseite und der Summe derjenigen Diagonalen des Polygons, die einer zwei Seiten überspannenden Diagonale (wie BM, Figur 2) parallel sind.

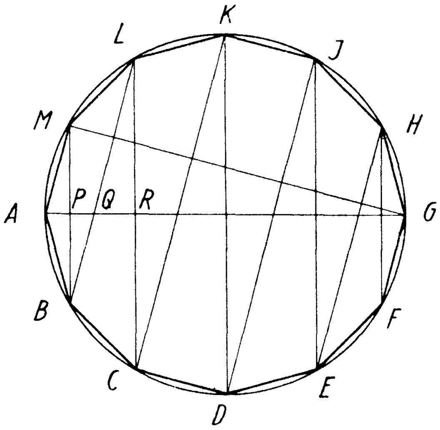
Diese Form der Aussage ist aber für weitere Schlüsse unzweckmässig. Man hat ein Rechteck, dessen eine Seite sehr klein ist und bei Vermehrung der Seitenzahl des Polygons gegen Null strebt, während die andere Seite eine sehr unhandliche Summe von Diagonalen ist, die bei Vermehrung der Seitenzahl über alle Grenzen wächst. Von diesem langgestreckten Rechteck muss man nun beweisen, dass es kleiner ist als das Quadrat über dem Durchmesser des Kreises. Dazu ist es nötig, das Rechteck in der Weise umzuformen, dass die kurze Seite vergrössert, die lange Seite im gleichen Verhältnis verkleinert wird, so dass die Fläche die gleiche bleibt. Wie macht man das?

Hier ist ein Einfall nötig. Man kann aber die Bedingungen, die der Einfall zu erfüllen hat, noch etwas genauer umschreiben. Die lange Seite des Rechtecks ist eine Summe von parallelen Diagonalen. Werden alle diese Diagonalen im gleichen Verhältnis verkleinert, so wird auch ihre Summe im gleichen Verhältnis verkleinert. Dabei ist es erwünscht, dass die verkleinerten Strecken so liegen, dass man ihre Summe in der Figur unmittelbar bilden kann.

Um das zu erreichen, zieht Archimedes die zur Seite AM parallelen Diagonalen BL, CK, DJ und EH. Es entstehen lauter ähnliche rechtwinklige Dreiecke wie APM,



Figur 2



Figur 3

QPB, QRL usw. (Figur 3). Werden also die zu MB parallelen Diagonalen je in zwei Hälften zerlegt und diese Hälften alle im Verhältnis der langen zur kurzen Kathete verkleinert, so erhält man Strecken AP, PQ, QR usw., deren Summe die ganze Diagonale AG ist. Auch das rechtwinklige Dreieck AMG ist den übrigen ähnlich; man erhält also die Proportion:

$$(MB + LC + KD + JE + HF) : AG = MG : AM,$$

die Archimedes als Satz 21 gibt.

Aus der Proportion ergibt sich sofort die gewünschte Flächengleichung: das Rechteck aus den Aussengliedern ist gleich dem Rechteck $AG \cdot MG$. Dieses ist aber offensichtlich kleiner als das Quadrat auf AG. Also ist die Oberfläche der der Kugel einbeschriebenen Figur kleiner als die Fläche des Kreises mit Radius AG, das heisst kleiner als viermal die Fläche des Grosskreises der Kugel (Satz 25).

Genau so beweist man, dass die Oberfläche der umbeschriebenen Figur grösser ist als viermal die Fläche des Grosskreises (Satz 30). Die umbeschriebene Figur ist nämlich der einbeschriebenen ähnlich; ihre Oberfläche ist daher gleich einem Kreise, dessen Radius im Quadrat gleich dem Rechteck $TS \cdot TU$ ist (Figur 4). Dieses ist grösser als das Quadrat über TU, aber TU ist gleich dem Durchmesser VW des Kreises.

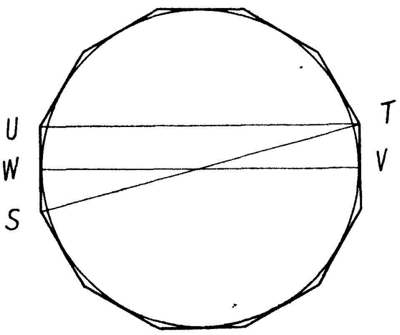
Damit ist Punkt 3 des Programms erledigt. Das bisher Erreichte lässt sich in zwei Ungleichungen zusammenfassen:

(6) Einbeschriebene Oberfläche $<$ Kugelfläche $<$ Umbeschriebene Oberfläche,

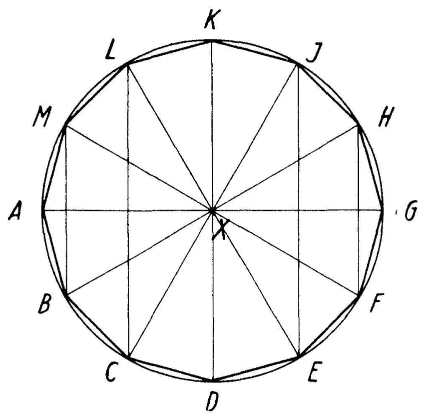
(7) Einbeschriebene Oberfläche $<$ 4 Grosskreise $<$ Umbeschriebene Oberfläche.

Jetzt gilt es, das entsprechende Programm für die Rauminhalte durchzuführen. Man könnte den einbeschriebenen Rotationskörper in Kegelstumpfe zerlegen. Der Inhalt eines Kegelstumpfes ist aber ein sehr komplizierter Ausdruck, und diese Ausdrücke zu summieren, ist nicht leicht.

Archimedes zerlegt daher den Körper anders. Er zerlegt (Satz 26) das einbeschriebene Polygon $ABC \ldots M$ zunächst in Dreiecke, wie XLM, die im Mittelpunkt X ihre gemeinsame Spitze haben. Durch Rotation des Dreiecks XAM um die Achse AG entsteht ein Doppelkegel, der zusammengesetzt ist aus zwei Kegeln auf dem Grundkreis MB mit Spitzen in X und A. Durch Rotation der übrigen Dreiecke entstehen ebenfalls Rotationsfiguren, die sich als Differenzen von Doppelkegeln darstellen



Figur 4



Figur 5

lassen. Alle diese Rotationsfiguren bilden zusammen den einbeschriebenen Rotationskörper, um den es zu tun ist.

So kompliziert diese Rotationsfiguren aussehen, so einfach ist der Ausdruck für ihren Rauminhalt. Es stellt sich nämlich heraus, dass die vom Dreieck XLM beschriebene Rotationsfigur gleich einem Kegel ist, dessen Grundfläche gleich dem Mantel des Kegelstumpfes $MBCL$ und dessen Höhe gleich dem von X auf LM gefällten Lot ist. Analog für die übrigen Dreiecke.

Wie kam Archimedes wohl auf diese Zerlegung? Wie kam er auf die Vermutung, dass die Rauminhalte gerade dieser Rotationsfiguren sich so einfach ausdrücken lassen?

Ich glaube, wir können diese Fragen auf Grund der eigenen Aussagen des Archimedes beantworten.

Archimedes schreibt im *Ephodos*: «Ebenso wie die Kreisfläche gleich einem Dreieck ist, dessen Basis gleich dem Kreisumfang und dessen Höhe gleich dem Radius ist, ebenso, dachte ich mir, wird wohl die Kugel inhaltsgleich einem Kegel sein, dessen Basisfläche gleich der Kugeloberfläche und dessen Höhe gleich dem Kugelradius ist.»

Archimedes sagt uns selbst, wie er darauf gekommen ist, nämlich durch die Analogie mit dem Kreise. Wie überzeugt man sich beim Kreise davon, dass der Kreis gleich einem Dreieck ist, dessen Höhe gleich dem Radius und dessen Basis gleich dem Kreisumfang ist? Ganz einfach: zunächst unstreng dadurch, dass man den Kreis in unendlich schmale Dreiecke zerlegt, die ihre gemeinsame Spitze im Mittelpunkt M haben. Sodann streng, indem man den Kreis von innen und von aussen durch Polygone approximiert, die in Dreiecke mit der Spitze in M zerlegt werden können. Ein Grenzübergang oder Exhaustionsbeweis ergibt dann die Behauptung.

Ähnliche Betrachtungen kann man nun auch für die Kugel anstellen. Denkt man sich die Kugel in unendlich schmale Pyramiden mit der Spitze im Kugelmittelpunkt M zerlegt, so ist die Summe dieser Pyramiden gleich einer einzigen Pyramide, mit gleicher Höhe, deren Basis gleich der gesamten Kugelfläche ist. Dieselbe Betrachtungsart ergibt ganz streng, dass ein der Kugel umbeschriebenes Polyeder gleich einer Pyramide ist, deren Höhe gleich dem Kugelradius und deren Basis gleich der Oberfläche des Polyeders ist. Durch Grenzübergang folgt dasselbe für die Kugel.

Das sind also die Gedankengänge, die dem Archimedes nachweislich durch den Kopf gingen, bevor er sich an die genaue Ausführung des Beweises machte. Und nun kam ihm, als er zur Inhaltsbestimmung der ein- und umbeschriebenen Rotationskörper kam, der folgende Einfall: *Dasselbe, was für die umbeschriebenen Polyeder und für die Kugel selbst gilt, gilt auch für die umbeschriebenen Rotationskörper. Auch sie sind gleich Pyramiden oder Kegeln, deren Höhe gleich dem Kugelradius und deren Basis jeweils gleich der Oberfläche des betreffenden Rotationskörpers ist.*

Was hier zuletzt formuliert wurde, ist genau der Inhalt des Satzes 31. Die entsprechende Behauptung für den einbeschriebenen Körper steht in Satz 26. Wir haben uns also nicht von den echten Gedankengängen des Archimedes entfernt.

Im gleichen Moment, wo einem der eben formulierte Einfall kommt, sieht man auch die Richtigkeit der Behauptung ein. Man kann die Kegelstumpfe, aus denen der Rotationskörper besteht, durch Pyramidenstumpfe annähern. Für das so entstehende umbeschriebene Polyeder ist die Behauptung richtig, also folgt er durch Grenzübergang für den Rotationskörper.

Im Beweis für die Polyeder wurden die einzelnen Seitenflächen mit dem Kugelmittelpunkt durch Pyramiden verbunden. Die Behauptung gilt dann nicht nur für das ganze Polyeder, sondern auch für die einzelnen Pyramiden. Verbindet man nun ebenso die einzelnen Kegelstumpfmäntel, aus denen die Oberfläche des Rotationskörpers besteht, mit dem Mittelpunkt X, so erhält man genau die von Archimedes benutzten Rotationsfiguren. So lässt sich der Einfall des Archimedes leicht erklären.

Was hier in vielen Worten erklärt wurde, spielt sich im Kopf eines Mathematikers wie Archimedes natürlich in einem Augenblick ab, wie ein Lichtblitz. Es ist ja alles so anschaulich und einleuchtend!

Die genaue Ausführung der Beweise war für Archimedes nicht schwer. In Satz 18 wird der Rauminhalt eines Doppelkegels bestimmt, in Satz 19 der Rest, der übrigbleibt, wenn von einem Kegel ein Doppelkegel weggenommen wird, in Satz 20 die Differenz zweier Doppelkegel.

In diesem Teil widerspiegelt die Darstellung des Archimedes den zugrunde liegenden Gedankengang nicht deutlich. Man sieht zunächst gar nicht, wozu die Sätze 18 bis 20 nötig sind; das zeigt sich erst viel später bei der Anwendung auf die Kugel.

Satz 18 heisst so: Der Inhalt eines aus zwei geraden Kreiskegeln mit gemeinsamer Basisfläche zusammengesetzten Doppelkegels ist gleich dem eines geraden Kegels, dessen Grundfläche gleich dem Mantel des einen Kegels, dessen Höhe aber gleich dem von der Spitze des anderen Kegels auf eine Seitenlinie des ersten gefällten Lotes ist. Der Beweis ist nur eine nachträgliche Verifikation: er gibt keineswegs den Gedankengang wieder, der zum Satz geführt hat. Glücklicherweise waren wir aber in der Lage, durch Analyse des Anlageplanes der ganzen Abhandlung den Gedankengang in allen wesentlichen Teilen zu rekonstruieren.

Durch Addition der einzelnen im Mittelpunkt zusammenkommenden Teile erhält ARCHIMEDES die Rauminhalte des inneren und des äusseren Rotationskörpers (Satz 26 und 30). Nach Satz 26 ist der innere Körper gleich einem Kegel, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche des inneren Körpers, also kleiner als vier Grosskreise ist, und dessen Höhe gleich dem vom Kugelmittelpunkt auf die Polygonseite gefällten Lot, also kleiner als der Kugelradius ist. Also ist der innere Rotationskörper kleiner als ein Kegel, dessen Grundfläche gleich vier Grosskreisen, dessen Höhe aber gleich dem Kugelradius ist (Satz 27). Ebenso ist der äussere Rotationskörper grösser als derselbe Kegel. Also erhält man für die Rauminhalte die Ungleichung:

$$\text{Innerer Körper} < \text{Kegel} < \text{Äusserer Körper}. \tag{8}$$

Ausserdem hat man natürlich

$$\text{Innerer Körper} < \text{Kugel} < \text{Äusserer Körper}. \tag{9}$$

Die zum Exhaustionsbeweis nötigen Ungleichungen sind damit sowohl für die Inhalte als für die Oberflächen bewiesen.

Ein klassischer Exhaustionsbeweis, wie ihn ARCHIMEDES zum Beispiel für das Parabelsegment durchgeführt hat, verläuft so. Die zu bestimmende Parabelfläche P wird zunächst zwischen zwei bekannten Flächen A und B eingeschlossen:

$$A < P < B. \tag{10}$$

Will man nun etwa beweisen, dass das Parabelsegment gleich $2D/3$ ist, wobei D das umbeschriebene Dreieck ist, so beweist man zunächst, dass $2D/3$ zwischen denselben Grenzen liegt:

$$A < \frac{2}{3} D < B. \tag{11}$$

Sodann zeigt man, dass die Differenz $B - A$ kleiner gemacht werden kann als jede beliebige Fläche F:

$$B - A < F. \tag{12}$$

Aus (10), (11) und (12) folgt leicht, dass P weder kleiner noch grösser sein kann als $2D/3$. Wäre nämlich P grösser als $2D/3$, so würde man, da F ja beliebig gewählt werden kann, für F die Differenz nehmen können und hätte dann bei geeigneter Wahl von A und B

$$B - A < F = P - \frac{2}{3} D < B - A,$$

was unmöglich ist. Wäre P kleiner als $2D/3$, so würde man für F wieder die Differenz nehmen und hätte

$$B - A < F = \frac{2}{3} D - P < B - A.$$

was ebenfalls unmöglich ist. Also ist $F = 2D/3$.

ARCHIMEDES hat nun das klassische Beweisverfahren für den vorliegenden Zweck etwas modifiziert, indem er nicht von den Differenzen $B-A$, sondern von den Verhältnissen $B:A$ spricht. Statt zu beweisen, dass die Differenz $B-A$ kleiner gemacht werden kann als jede gegebene gleichartige Grösse F, beweist er, dass das Verhältnis $B:A$ kleiner gemacht werden kann als ein gegebenes Streckenverhältnis $b:a$ mit $b>a$. Mit dem Verhältnis kann man etwas leichter rechnen als mit der Differenz, denn die Oberflächen der beiden ähnlichen Rotationskörper verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken und die Inhalte wie die Kuben.

Mit dieser modifizierten Exhaustion beweist ARCHIMEDES also, dass die Oberfläche der Kugel gleich vier Grosskreisen ist und der Inhalt viermal so gross wie der eines Kegels, dessen Basis ein Grosskreis und dessen Höhe der Kugelradius ist. Nun ist nach EUDOXOS dieser Kegel gleich einem Drittel des Zylinders mit gleicher Basis und gleicher Höhe; also ist die Kugel gleich 4/3 dieses Zylinders, das heisst gleich 2/3 des ihr umbeschriebenen Zylinders.

Überblicken wir nun den Beweis, so sehen wir, dass er sich in allen grossen Linien als Produkt einer bewundernswert scharfsinnigen, bewussten Überlegung verstehen lässt. Einige Einfälle (wie die Verwandlung des Kegelmantels in eine gleich grosse Kreisfläche und die Benutzung von Verhältnissen statt Differenzen am Schluss) dienen nur zur eleganten Darstellung des Beweises. Wesentlich waren nur zwei Einfälle: erstens das Ziehen der zu einer Seite parallelen Diagonalen in Figur 3, zweitens die Zerlegung des Rotationskörpers in Stücke, die im Mittelpunkt X zusammenkommen und durch Rotation von Dreiecken entstehen. Wir haben aber gesehen, wie man durch bewusste Überlegung die Einfälle geradezu provozieren kann, indem man sich richtig klarmacht, welche Schwierigkeit an der betreffenden Stelle zu überwinden ist und welche Bedingungen die gesuchte Umformung oder Zerlegung zu erfüllen hat.

B. L. VAN DER WAERDEN, Zürich.

Conchoid and Negative Circle

(Continued)

7.

The relation of the negative circle to the pair of conchoids is not one to one, for it depends on the choice of the unit circle v^2. The *form* (as distinct from the size and location) of the Conchoid of NICOMEDES as a Euclidean curve depends, like that of the conic, on a single parameter of zero dimension. It is the ratio, say μ, of the radial parameter to the distance of the node from the base-line. To form a given 'negative circle', any chosen point N along c_0 will serve as node (N' or N'' in figure 3) of the 'auxiliary conchoid' and will in turn determine the circle v^2, i.e. the chosen unit by which the two spaces are related. Moving the diametral point D into the central position M (figure 5) whence proceed the tangents at the extremities L, L of the latus rectum, the end-points (D_1'', etc.) of the rotating satellite line become the upper and lower vertices A, A of the conchoid. It is then easy to see that the condition, relating the auxiliary conchoid to the negative circle which it will help to form, is that