

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1953)
Heft: 5

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die obige Ableitung enthält keinen Kunstgriff und benötigt nur wenige der einfachsten Hilfssätze. Dass man mit Hilfe tautologischer Umformungen aus den Gleichungen (1) und (2) auch Gleichungen höheren Grades, als es die Gleichung (19) am angeführten Orte ist, erhalten kann, ist selbstverständlich. Jedenfalls sind die Gleichungen (1) und (2) einfacher als das System der Gleichungen (1) bis (10) am angeführten Ort.

R. LAUFFER, Graz.

Anmerkung der Redaktion: Reiches Material über regelmässige Vielecke findet man in der schönen Arbeit von G. DOSTOR: *Théorie générale des polygones étoilés*, J. Math. pures appl. 6, 343–386 (1880).

Aufgaben

Aufgabe 160. Es sind $\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{2k}$ und $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{2k+1}$ zu bestimmen.
P. BUCHNER, Basel.

Lösung: Bedeutet $S_n = a_{2n}$ die erste, $T_n = a_{2n-1}$ die zweite der Summen in der Aufgabe, so findet man mit dem Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks sofort die Beziehungen $T_n + S_n = T_{n+1}$, $S_n + T_{n+1} = S_{n+1}$, also gilt allgemein $a_m = a_{m-1} + a_{m-2}$. Wegen $S_0 = a_0 = 1$, $T_1 = a_1 = 1$ sind die a_m identisch mit den Fibonacci-Zahlen 1, 1, 2, 3, 5,

Die bekannte explizite Darstellung ergibt sich aus der in der Umgebung von Null gültigen Reihenentwicklung

$$(1 - z - z^2)^{-1} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

Hier muss offenbar $b_{i+2} - b_{i+1} - b_i = 0$ und $b_0 = b_1 = 1$ gelten. Also ist $a_i = b_i$. Die Partialbruchzerlegung von $(1 - z - z^2)^{-1}$ gibt

$$\frac{1}{\alpha_2(1 - z/\alpha_2)\sqrt{5}} - \frac{1}{\alpha_1(1 - z/\alpha_1)\sqrt{5}}, \quad \text{wo} \quad \alpha_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

Durch Reihenentwicklung der Partialbrüche folgt

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_2^{k+1}} - \frac{1}{\alpha_1^{k+1}} \right) z^k,$$

also ist

$$a_n = \frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{(\alpha_1 \alpha_2)^{n+1} \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}.$$

K. RIEDER, Riehen.

Eine Lösung der Aufgabe findet man auch in E. NETTO, *Lehrbuch der Kombinatorik* (Teubner, Leipzig 1927, S. 247), wo weitere ähnliche Summationen behandelt sind. (Nachträgliche Mitteilung des Aufgabenstellers.)

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), P. BOLLI (Genf), F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz), R. W. MERKEL (Karlsruhe).

Aufgabe 161. Eine Kegelfläche zweiter Ordnung mit der Spitze S werde von einer Ebene e_1 in einem Kegelschnitt K_1 geschnitten. F sei ein Brennpunkt von K_1 . Man beweise: Liegt die Ebene e_2 spiegelbildlich zu e_1 in bezug auf die in F errichtete Normalenfläche zu FS , so schneidet e_2 den Kegel in einem Kegelschnitt K_2 mit demselben Brennpunkt F .
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Lösung: Die Involution, die von den durch F gehenden in bezug auf k_1 konjugierten Strahlen gebildet wird, ist rechtwinklig. Projiziert man diese Strahleninvolution mit dem Ebenenbüschel FS auf e_2 , so erhält man die Strahleninvolution von F in bezug auf k_2 in e_2 . Diese Strahleninvolution ist aber infolge der Symmetrie von e_1 und e_2 bezüglich der zu FS senkrechten Ebene durch F mit der in e_1 liegenden Strahleninvolution gleichwinklig, das heißt rechtwinklig. F ist also ein Brennpunkt von k_2 . J. SCHOPP, Budapest.

Herr A. UNTERBERGER (Bludenz) weist darauf hin, dass im Fall des Rotationskegels der Beweis auch elementar mittels der Dandelinischen Kugeln geführt werden kann.

Weitere Lösungen sandten F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz), A. STOLL (Zürich).

Aufgabe 162. Bei einem Kugelausschnitt von gegebenem Volumen V sei r der Radius der Kugel, d der Durchmesser des Kantenkreises, h die Höhe der Kugelkappe ($0 < h \leq 2r$, so dass auch nichtkonvexe Teile der Kugel und die ganze Kugel zugelassen sind). Man stelle die Oberfläche F dieses Körpers als Funktion der unabhängigen Variablen r dar und bestimme die Extremwerte der Oberfläche. R. LAUFFER, Graz.

Lösung: 1. Es ist $3V = 2\pi r^2 h$ und $2F = 4\pi r h + \pi r d$, ferner

$$d^2 = 4h(2r - h) = \frac{6V}{\pi r^2} \left(2r - \frac{3V}{2\pi r^2}\right) = \frac{3V(4\pi r^3 - 3V)}{\pi^2 r^4}.$$

Daraus folgt

$$(2F r - 6V)^2 = \pi^2 r^4 d^2 = 3V(4\pi r^3 - 3V),$$

somit

$$F = \frac{6V + \sqrt{3V(4\pi r^3 - 3V)}}{2r}.$$

2. Für die Diskussion des Verlaufes von F erweist sich der Formparameter

$$x = \frac{d}{2h} = \operatorname{ctg} \frac{w}{4}$$

als besonders günstig. w ist der Öffnungswinkel des Sektors, x durchläuft also alle positiven Werte. Für $x = 0$ wird der Sektor zur Kugel. Damit wird $2r = (x^2 + 1)h$, somit $6V = \pi(x^2 + 1)^2 h^3$ und $2F = 2\pi r h(x + 2) = \pi(x^2 + 1)(x + 2)h^2$. Daraus folgt

$$F = \frac{C(x+2)}{\sqrt[3]{x^2+1}} \quad \text{mit} \quad C^3 = \frac{9\pi V^2}{2}.$$

Massgebend für den Verlauf von F bei positiven x ist also die Funktion

$$y = \frac{(x+2)^3}{x^2+1}.$$

Ihre Ableitung $y' = (x+2)^2(x^2 - 4x + 3)/(x^2 + 1)^2$ hat als einzige positive Nullstellen $x = 1$ und $x = 3$. Für diese wird $y'' = (x+2)^2(2x-4)/(x^2+1)^2$. Bei $x = 1$ liegt also ein relatives Maximum, bei $x = 3$ ein relatives Minimum vor, und zwar ist $y(1) = 27/2$ und $y(3) = 25/2$. Beide werden für positives x ein zweites Mal angenommen. Es ist nämlich

$$2(x+2)^3 - 27(x^2 + 1) \equiv (x-1)^2(2x-11)$$

und

$$2(x+2)^3 - 25(x^2 + 1) \equiv (x-3)^2(2x-1),$$

somit $y(1) = y(11/2)$ und $y(3) = y(1/2)$. Rechts von $x = 11/2$ wächst y unbegrenzt, und

links von $x = 1/2$ sinkt es unter das relative Minimum und erreicht mit $y(0) = 8$ die untere Grenze im positiven x -Bereich. Folgende Tabelle gibt eine Übersicht:

x	h/r	$\operatorname{tg}(w/2)$	$y(x)$	$r(x)/r(0)$	$F(x)/F(0)$
0	2	0	8	1	1
$1/2$	$8/5$	$-4/3$	$25/2$	$5/4$	$\approx 1,16$
1	1	∞	$27/2$	2	$\approx 1,19$
3	$1/5$	$3/4$	$25/2$	10	$\approx 1,16$
$11/2$	$8/125$	$44/117$	$27/2$	$125/4$	$\approx 1,19$
∞	0	0	∞	∞	∞

Für die nichtkonvexen Kugelsektoren gegebenen Volumens bildet also die Halbkugel die obere und die Vollkugel die untere Oberflächengrenze, während die konvexen Kugelsektoren für $\operatorname{tg}(w/2) = 3/4$ ein Oberflächenminimum besitzen, welches um rund 16 % grösser ist als die gleichvolumige Kugelfläche. A. STOLL, Zürich.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hørring, Dänemark), F. GOLDNER (London), J. KÄUFL (Landshut, Bayern), L. KIEFFER (Luxemburg), E. PLÜSS (Riken, Murgenthal), A. SCHWARZ (Seuzach), A. UNTERBERGER (Bludenz).

Aufgabe 163. Démontrer que m étant un nombre naturel quelconque et s le nombre des chiffres du nombre m (en représentation décimale), il existe un nombre naturel n tel que les s premiers chiffres du nombre n^p coïncident respectivement avec les chiffres du nombre m . W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

Lösung: Sind m und p natürliche Zahlen, dann kann man $\sqrt[p]{m}$ mit Hilfe eines endlichen Dezimalbruches w beliebig genau so approximieren, dass $w^p - m > 0$ beliebig klein wird. (Die letzte Ziffer in der Dezimalbruchentwicklung ist aufzurunden!) Es gibt daher unendlich viele Dezimalbrüche w , so dass $w^p = m + d$ und $0 < d < 1$ ist. Hat w nach dem Komma t Ziffern, so hat die natürliche Zahl $n = w \cdot 10^t$ wegen $n^p = m \cdot 10^{pt} + d \cdot 10^{pt}$ die Eigenschaft, dass die ersten s Ziffern von n^p mit den s Ziffern von m zusammenfallen. Es gibt unendlich viele Zahlen n mit dieser Eigenschaft. R. LAUFFER, Graz.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), M. FREI (Zürich), A. UNTERBERGER (Bludenz).

Aufgabe 164. Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \operatorname{arctg} a x \operatorname{arctg} b x \frac{dx}{x^2}. \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

H. PREMEEKAMP, Delft.

Lösung: Das Integral ist gleichmässig konvergent und eine stetige Funktion $F(a, b)$ von a und b . Man findet für $a > 0$

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} b x}{x(1 + a^2 x^2)} dx,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} &= \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + a^2 x^2)(1 + b^2 x^2)} = \frac{1}{a^2 - b^2} \left\{ a^2 \int_0^\infty \frac{dx}{1 + a^2 x^2} - b^2 \int_0^\infty \frac{dx}{1 + b^2 x^2} \right\} \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2} \left(\frac{\pi}{2} a - \frac{\pi}{2} b \right) = \frac{\pi}{2(a + b)}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Integration

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{\pi}{2} \ln(a+b) + \varphi(a).$$

Setzt man $b = 0$, so verschwindet $\partial F/\partial a$, und man erhält

$$\varphi(a) = -\frac{\pi}{2} \ln a.$$

Integriert man jetzt nach a , so erhält man

$$F(a, b) = \frac{\pi}{2} \{(a+b) \ln(a+b) - a \ln a\} + \psi(b).$$

Für $a = 0$ ergibt sich wegen $F(0, b) = 0$ und $\lim_{a \rightarrow 0} a \ln a = 0$, dass

$$\psi(b) = -\frac{\pi}{2} \ln b.$$

Hieraus folgt

$$F(a, b) = \frac{\pi}{2} \{(a+b) \ln(a+b) - a \ln a - b \ln b\}.$$

L. BERNSTEIN, Tel-Aviv.

Weitere Lösungen sandten P. BOLLI (Genève), F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz).

Neue Aufgaben

190. Es sind Drehflächen zu suchen, die bei Normalprojektion auf eine Ebene einen scheinbaren Umriss unveränderlicher Form zeigen, das heißt eine Umrisslinie, die bei Veränderung der Achsenneigung nur eine Maßstabsänderung erfährt (einfachstes Beispiel: Drehparaboloid).
W. WUNDERLICH, Wien.

191. Von den eine gegebene Parabel doppelt berührenden Kreisen konstruiere man erstens diejenigen, die durch einen gegebenen Punkt gehen, und zweitens diejenigen, die eine gegebene Gerade berühren.
J. SCHOPP, Budapest.

192. Gegeben sei die additive Abelsche Gruppe der Ordnung 4 vom Typus (2, 2) mit der Additionstafel

	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

In dieser Gruppe wird eine (im allgemeinen weder kommutative noch assoziative) Multiplikation eingeführt, wobei

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \cdot b = 0 \cdot c = a \cdot 0 = b \cdot 0 = c \cdot 0 = 0$$

gelten soll. Für die drei Elemente a, b, c kann eine Multiplikationstafel beliebig festgelegt werden, wobei als «Produkte» alle vier Elemente 0, a , b , c auftreten können, so dass es 4^9 verschiedene Multiplikationstafeln gibt.

Man zeige, dass die Multiplikation dann und nur dann beidseitig distributiv bezüglich der Addition ist, wenn für jede Zeile und jede Spalte der Multiplikations-tafel die «Quersumme» den Wert 0 ergibt. A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

193. Deux points A et B se déplacent avec des vitesses constantes sur deux droites a et b situées dans un même plan. On donne deux positions A_1 et A_2 de A et deux positions correspondantes B_1 et B_2 de B . Construire la position pour laquelle la distance AB est la plus petite possible. CH. VUILLE, La Chaux-de-Fonds.

Berichtigung. Nach Mitteilung des Aufgabenstellers muss der Schluss von Aufgabe Nr. 177 folgendermassen lauten: ... et ces sphères sont orthogonales à une sphère de rayon $\varrho\sqrt{1/2}$, ϱ étant celui de la sphère conjuguée au tétraèdre $ABCD$.

Literaturüberschau

JOSEF LENSE: *Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik*

3. Auflage, 216 Seiten, 48 Figuren, Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 1953

Die dritte Auflage des erstmals 1933 erschienenen Lehrbuches unterscheidet sich nicht wesentlich von der zweiten Auflage aus dem Jahre 1947. Schon nach sechs Jahren ist eine neue Auflage notwendig geworden; dies zeigt, dass das Buch einem Bedürfnis weiter Kreise entspricht.

Aus dem Inhalt erwähnen wir: Asymptotische Reihen, Gammafunktion, Orthogonal-funktionen, Besselsche Funktionen, Kugelfunktionen, Lamésche Funktionen. Hingegen enthält das Buch keine Tafeln.

Diese wertvolle Zusammenstellung der für den Physiker wichtigsten klassischen Funktionen wird auch weiterhin viel Nutzen stiften. P. Buchner.

GERHARD KOWALEWSKI:

Einführung in die analytische Geometrie

4. Auflage, 364 Seiten, 112 Figuren, Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 1953

Diese vierte Auflage hat der Verfasser vor seinem Tode noch selbst betreuen können. Ein Lehrbuch von GERHARD KOWALEWSKI ist stets ein wertvolles Geschenk, erfährt doch ein Teil der Mathematik eine von einer eigenwilligen, starken Persönlichkeit ge-formte, vom Gewohnten abweichende, interessante Gestaltung, die auch den Kenner zu fesseln vermag. Starke Überschneidungen mit seinem ersten Band *Lehrbuch der höheren Mathematik*, das der Vektorrechnung und der analytischen Geometrie gewidmet ist, liessen sich nicht vermeiden, immerhin wird jetzt das Wort Vektor durch Strecke ersetzt.

Nach den vorbereitenden Abschnitten wird die Geometrie auf der Geraden entwickelt. Eingehende Würdigung erfahren die Projektiven- und die Linienkoordinaten. Das 5. Kapitel ist den Kegelschnitten und höheren algebraischen und transzendenten Kurven eingeräumt. Alsdann werden die Einteilung der Kegelschnitte und die Büschel von Kurven zweiter Ordnung besprochen. Punkte, Ebenen und Geraden des Raumes bilden den Gegenstand des nächsten Kapitels, insbesondere werden dabei die Begriffe Kollineation, Korrelation, linearer Komplex, Regelschar erläutert. Die Flächen zweiter Ordnung erfahren nur eine knappe Klassifikation, ohne dass auf einzelne Typen eingegangen würde.

Zu wünschen wäre, dass im Inhaltsverzeichnis auch die Paragraphenüberschriften aufgeführt würden. P. Buchner.