

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 8 (1953)  
**Heft:** 5

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Innere des Winkels  $ABC$  und schneidet daher (auf Grund der Anordnungsaxiome) die Strecke  $AB$ , und zwar senkrecht. Somit kann dann der Beweis auf die übliche Art zu Ende geführt werden.

Bemerkung: Ob ohne Verwendung der Axiome des Polygoninhaltes, allein aus den Axiomen (1) bis (6), die Möglichkeit der Konstruktion des Lotfällens generell erweisbar ist, bleibt hier unentschieden.

PAUL BERNAYS, Zürich.

### *Nachtrag<sup>1)</sup>*

Vom axiomatischen Standpunkt aus kann es als unerwünscht erscheinen, dass in den Axiomen (7) des Polygoninhaltes implizite, durch den Polygonbegriff, der (sonst nicht auftretende) Begriff der endlichen Zahl zur Anwendung kommt. Diesem weniger elementaren Charakter der Axiome (7) kann abgeholfen werden, indem man die Axiome (7a) und (7c) folgendermassen abändert:

- (a) Die Flächen der Dreiecke bilden ein Grössensystem,
- (c) bei der Zerlegung eines Dreiecks in zwei Teildreiecke durch eine Transversale ist der Inhalt des ganzen Dreiecks gleich der Summe der Inhalte der Teildreiecke.

Auf Grund dieser «Axiome des Dreiecksinhaltes» kann zunächst der folgende Satz bewiesen werden: Wird ein Viereck durch beide Diagonalen in Teildreiecke zerlegt, so ist für jede der beiden Zerlegungen die Summe der Dreiecksinhalte die gleiche. Dieser Fall liegt insbesondere bei jedem Parallelogramm vor. Wir können demgemäß als Flächeninhalt eines Parallelogramms eindeutig die Summe der Teildreiecksinhalte bei der Zerlegung durch eine Diagonale erklären. Hiernach haben gleichsinnig kongruente Parallelogramme, insbesondere kongruente Rechtecke, gleiche Flächeninhalte. Ferner ergibt sich der Satz, dass Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe gleichen Flächeninhalt haben, und somit lässt sich auch der Euclidische Beweis des pythagoreischen Lehrsatzes durchführen. Endlich erhalten wir auch den Satz vom Gnomon, und damit sind alle flächentheoretischen Hilfsmittel für unsere Beweisführung gewonnen.

Es sei noch bemerkt, dass mittels der Axiome des Dreiecksinhaltes die allgemeine Lehre vom Polygoninhalt begründet werden kann. Man hat dazu insbesondere den Satz zu beweisen, dass bei jeder beliebigen Zerlegung eines Dreiecks in Teildreiecke der Inhalt des ganzen Dreiecks gleich der Summe der Inhalte der Teildreiecke ist. Daraus lässt sich dann weiter folgern, dass für alle Zerlegungen eines Polygons in Teildreiecke die Summe der Inhalte der Teildreiecke die gleiche Grösse ergibt. Diese eindeutig bestimmte Grösse kann als der Polygoninhalt definiert werden, und es ist dann der Satz beweisbar, dass Polygone dann und nur dann den gleichen Inhalt haben, wenn sie (im üblichen Sinne dieses Terminus) ergänzungsgleich sind.

## Kleine Mitteilungen

### Einige Parabeleigenschaften

Die übliche Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes  $M$  in einem beliebigen Punkt  $P$  einer nicht zerfallenden Kurve zweiter Ordnung verläuft nach folgendem Satz: Projiziert man den Schnittpunkt der Kurvennormalen  $n$  in  $P$  mit der

<sup>1)</sup> Bei der Korrektur hinzugefügt.

Hauptachse des Kegelschnittes in Richtung der Kurventangente  $t$  in  $P$  auf den durch  $P$  gehenden Durchmesser  $d$ , dann stellt dieser Punkt  $Q$  gleichzeitig die zur Hauptachse orthogonale Projektion des zu  $P$  gehörenden Krümmungsmittelpunktes  $M$  dar (Figur 1).

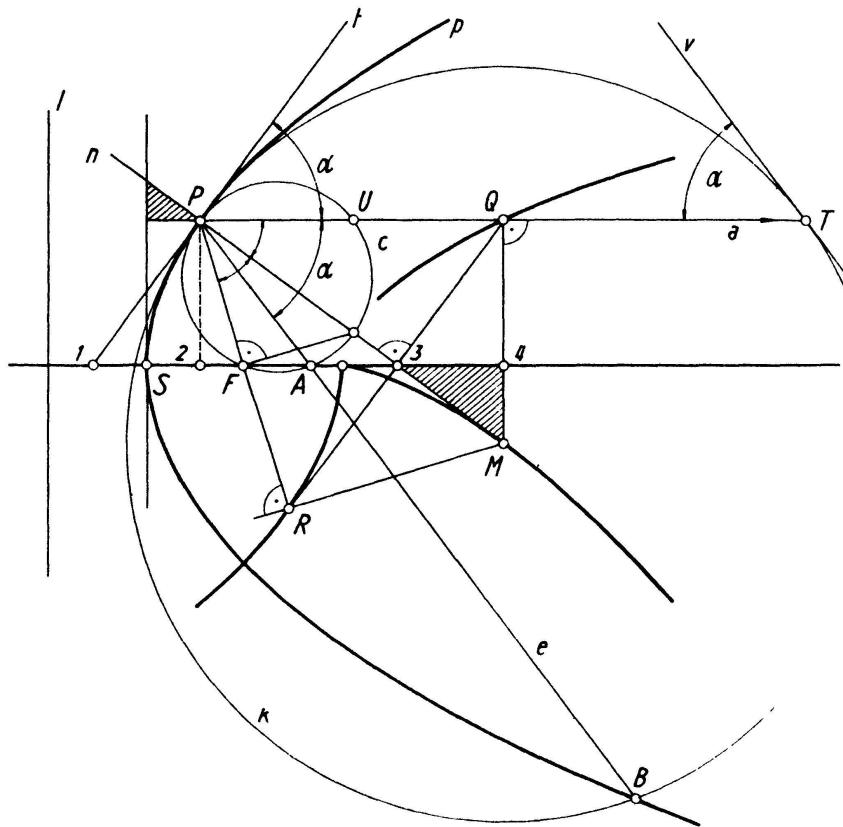


Fig. 1

(1) Bei einer Parabel verhalten sich nun stets die Abstände der Punkte  $P$  und  $Q$  von der Leitlinie  $l$  wie 1 zu 3. Ist  $x$  die Abszisse des Parabelpunktes  $P$ ,  $F$  der Brennpunkt und  $p$  der Parameter, dann gilt

$$P \dashv l = x + \frac{p}{2} \quad \text{und} \quad \overline{PQ} = \overline{1,2} + \overline{2,3} = 2 \cdot x + p,$$

also  $P \dashv l : Q \dashv l = \left(x + \frac{p}{2}\right) : 3 \left(x + \frac{p}{2}\right) = 1 : 3.$

*Ergebnis 1:* Der geometrische Ort der orthogonalen Projektionen der Krümmungsmittelpunkte einer Parabel auf die Durchmesser  $d$ , die jeweils durch jene Parabelpunkte gehen, die zu den betreffenden Krümmungsmittelpunkten gehören, ist eine Parabel, die zur gegebenen affin liegt. Die Leitlinie der gegebenen Parabel ist Affinitätsachse, und das Dehnungsverhältnis in Richtung der ursprünglichen Parabelachse beträgt 1 zu 3.

(2) Aus Figur 1 lässt sich noch eine andere einfache Ermittlung des Krümmungsmittelpunktes  $M$  in einem Parabelpunkt  $P$  rasch ablesen. Die beiden schraffierten Dreiecke der Figur 1 sind einander ähnlich. Der Ähnlichkeitsfaktor ist 1 zu 2, denn da

$$\Delta(P, 1, 2) \cong \Delta(Q, 3, 4), \quad \text{ist} \quad \overline{3,4} = \overline{1,2} = 2x.$$

*Ergebnis 2:* Die auf einer Parabelnormalen gemessene Strecke vom Krümmungsmittelpunkt bis zur Achse ist doppelt so gross wie der auf derselben Normalen gelegene Abschnitt zwischen der Parabel und ihrer Scheiteltangente<sup>1)</sup>.

(3) Der zum Punkt  $Q$  der Parabelnormalen  $n$  in  $P$  symmetrische Punkt  $R$  liegt auf dem Brennstrahl  $PF$  (Figur 1). Er ist die orthogonale Projektion des Krümmungsmittelpunktes  $M$  auf  $PF$ . Da

$$\overline{PR} = \overline{PQ} = p + 2x \quad \text{und} \quad \overline{PF} = P \dashv l = \frac{p}{2} + x,$$

ist  $\overline{PR} = 2 \cdot \overline{PF}$ .

*Ergebnis 3:* Die am Brennpunkt  $F$  gespiegelten Parabelpunkte  $P$  sind die orthogonalen Projektionen der jeweiligen Krümmungsmittelpunkte auf die durch  $F$  gehenden Brennstrahlen.

Der geometrische Ort der Punkte  $R$  ist die am Brennpunkt  $F$  gespiegelte, gegebene Parabel. Die Tangente in  $R$  geht durch  $Q$ .

*Ergebnis 4:* Das Lot im Brennpunkt  $F$  einer Parabel auf dem durch einen Parabelpunkt  $P$  gehenden Brennstrahl halbiert den auf der Parabelnormalen in  $P$  gelegenen Krümmungshalbmesser.

*Ergebnis 5:* Für den Radius  $r$  eines durch den Brennpunkt einer Parabel gehenden Kreises  $c$ , der die Parabel in einem ihrer Punkte  $P$  berührt, gilt  $r = \varrho/4$  ( $\varrho$  ist der Radius des Krümmungskreises in  $P$ ).

(4) Die gegebene Parabel und der Krümmungskreis  $k$  in einem ihrer Punkte  $P$  sind in perspektiv-kollinearer Lage.  $P$  ist das Kollineationszentrum. Die Achse  $e$  muss durch  $P$  hindurchgehen. Der Schnittpunkt  $T$  von  $d$  mit  $k$  ist dann das Bild des uneigentlichen Parabelpunktes, und die Tangente  $v$  in diesem Punkt an den Krümmungskreis wird zur Verschwindungsgeraden der Kollineation. Die Kollineationsachse  $e$  ist parallel zu  $v$  durch  $P$ . Ihr zweiter Schnittpunkt  $B$  mit  $k$  gehört ebenfalls der Parabel an. Wegen der Gleichheit der Sehnen-Tangenten-Winkel  $\alpha$  in  $P$  und  $T$  ist auch  $\measuredangle(e, d) = \alpha$ .

*Ergebnis 6:* Spiegelt man die Tangente  $t$  in einem Parabelpunkt  $P$  an dem durch  $P$  gehenden Durchmesser, dann schneidet sie den Krümmungskreis in  $P$  im (vierten) Schnittpunkt mit der Parabel.

(5) Der am Schluss von (3) gewonnene Kreis  $c$  schneidet die Parabelachse ein zweites Mal im Punkte  $A$ . Die Sehne  $\overline{PU}$  wird von allen Kreispunkten, die nicht im Winkelraum  $(t, d) = \alpha$  liegen, unter dem Winkel  $\alpha$  gesehen. Wegen  $\overline{PU} = \overline{PF}$  gilt also auch  $\measuredangle PAF = \alpha$ , das heisst die Strecke  $\overline{PA}$  liegt auf  $e$ .

*Ergebnis 7:* Der die Parabel in einem Punkt  $P$  berührende und durch den Brennpunkt  $F$  gehende Kreis  $c$  schneidet die Parabelachse in jenem Punkt  $A$ , der nach Projektion aus  $P$  auf den Krümmungskreis  $k$  in  $P$  den (vierten) Parabelschnittpunkt mit  $k$  liefert.

Dieses Ergebnis gilt auch für den Parabelscheitel  $S$ . In diesem Grenzfall ist  $A \equiv S$ . In den Parabelpunkten mit der Ordinate  $\pm p$  fällt  $e$  mit der Kurvennormalen  $n$  zusammen. Die Parabel schneidet also die Krümmungskreise in diesen Punkten in den Schnittpunkten mit der Kurvennormalen.

R. JAKOBI, Braunschweig.

### Eine neue Behandlung der metrischen Aufgaben in der Zentralprojektion

In dieser Mitteilung behandle ich zwei Probleme der Zentralprojektion, nämlich die Bestimmung der wahren Länge einer Strecke und die Umlegung einer Ebene in die Bildebene. Die letztere ist gleichwertig mit dem Problem, in der kotierten Projektion oder in der orthogonalen Darstellung auf zwei Bildebenen die wahre Gestalt der Schnitt-

<sup>1)</sup> Vgl. MÜLLER-KRUPPA, Lehrbuch der darstellenden Geometrie (Springer, Wien 1948).

kurve eines Kegels mit einer Ebene zu bestimmen. Die Lösung dieser Aufgaben ist bekannt; ich werde aber für die Richtigkeit dieser bekannten Konstruktionen einen neuen, sehr anschaulichen Beweis geben.

*Länge einer Strecke.* Es sei eine Gerade  $g$  durch ihren Spurpunkt<sup>1)</sup>  $S$  und Fluchtpunkt  $Q'$  und ein Punkt  $A$  auf  $g$  durch seine Projektion  $A'$  gegeben. Man kann, wie bekannt<sup>2)</sup>, den Abstand  $AS$  auf folgende Weise bestimmen: 1. Man konstruiert zunächst den wahren Abstand  $l$  des Punktes  $Q'$  von dem Projektionszentrum  $C$  mittels der Umlegung der

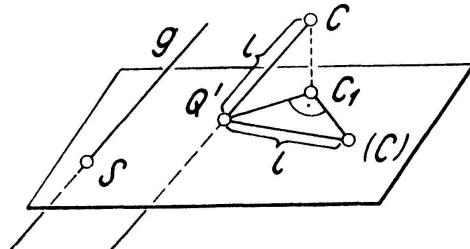


Fig. 1

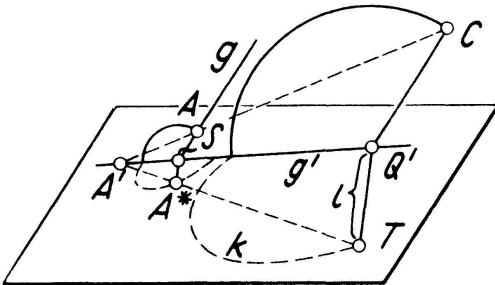


Fig. 2

Geraden  $CQ'$  um ihre orthogonale Projektion  $C_1Q'$  in die Bildebene (Figur 1). 2. Dann zeichnet man einen Kreis  $k$ , den sogenannten *Teilungskreis*, um  $Q'$  mit dem Halbmesser  $l$  (Figur 2). 3. Endlich projiziert man den Punkt  $A'$  von einem beliebigen Punkt  $T$  des Teilungskreises  $k$  auf die durch  $S$  gehende und zu  $Q'T$  parallele Gerade. So ergibt sich ein neuer Punkt  $A^*$ ; der gesuchte Abstand ist gleich der Länge der Strecke  $A^*S$ .

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist leicht zu beweisen. Zeichnen wir in der Ebene  $A'Q'C$  einen Kreis um  $Q'$  durch  $C$  und einen anderen um  $S$  durch  $A$  (Figur 2), so ist der Radius des ersten Kreises gleich dem Radius des oben genannten Teilungskreises;

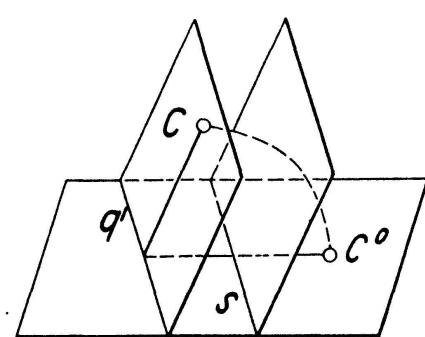


Fig. 3

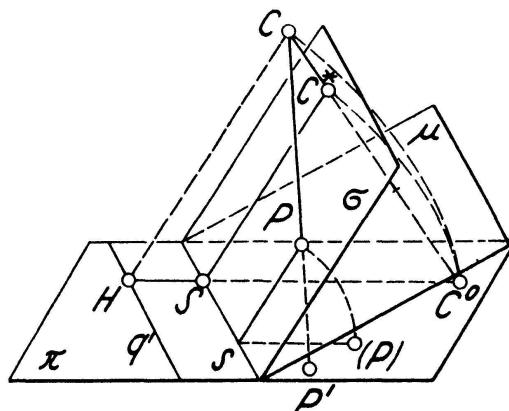


Fig. 4

dagegen der Radius des zweiten Kreises gleich dem gesuchten Abstand. Die Geraden  $Q'C$  und  $SA$  sind parallel, so dass der Punkt  $A'$  einer der Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise ist. (Wenn  $A$  und  $C$  auf derselben Seite der Bildebene liegen, so ist  $A'$  äusserer Ähnlichkeitspunkt; sind dagegen  $A$  und  $C$  auf entgegengesetzten Seiten der Bildebene, so ist  $A'$  innerer Ähnlichkeitspunkt.) Wir denken uns nun die Ebene  $A'Q'C$  in die Bildebene umgelegt. Es ist klar, dass der Punkt  $A'$  auch Ähnlichkeitspunkt der umgelegten

<sup>1)</sup> Für die Benennungen siehe zum Beispiel R. HAUSSNER und W. HAAK, *Darstellende Geometrie*, Bd. 4 (de Gruyter, Berlin und Leipzig 1933).

<sup>2)</sup> Op. c., S. 27.

Kreise ist. Wenn man also auf die oben beschriebene Weise den Punkt  $A^*$  konstruiert, so erhält man einen Punkt auf dem Umfange des um  $S$  (mit dem Radius  $SA$ ) gezeichneten Kreises. Das heisst,  $SA^* = SA$ , was zu beweisen war.

### *Umlegung einer Ebene in die Bildebene*

Es ist ein wichtiger Satz in der Theorie der Zentralprojektion<sup>1)</sup>, dass *die Bilder und die Umlegungen aller Punkte einer Ebene miteinander in einer zentralen Kollineation stehen; die Achse dieser Kollineation ist die Spurgerade der Ebene, das Zentrum der Kollineation ist die Umlegung des Projektionszentrums um die Fluchtgerade* (Figur 3).

Bevor wir mit dem Beweis dieses Satzes beginnen, führen wir einige Bezeichnungen ein. Es sei  $C$  das Projektionszentrum,  $\pi$  die Bildebene,  $\sigma$  die gegebene Ebene, die wir umlegen wollen, und  $P$  ein beliebiger Punkt dieser Ebene (Figur 4). Betrachten wir noch die Mittelebene  $\mu$  der Ebenen  $\pi$  und  $\sigma$ , so ist leicht zu sehen, dass für die Ebene  $\sigma$  die Umlegung um  $s$  mit der Spiegelung an  $\mu$  äquivalent ist. Projizieren wir also  $P$  senkrecht zu  $\mu$  auf die Bildebene  $\pi$ ; so entsteht seine Umlegung ( $P$ ). Wir projizieren ferner auch den Punkt  $C$  in derselben Richtung auf die Bildebene, und bezeichnen die sich so ergebende Projektion mit  $C^\circ$ . Es sei  $C^*$  der Schnittpunkt des Projektionsstrahles  $CC^\circ$  mit der Ebene  $\sigma$ ; dann ist  $(C^*) \equiv C^\circ$ .

Die Geraden  $P(P)$  und  $CC^\circ$  sind parallel, so dass sie eine neue Ebene  $\varepsilon$  bestimmen. Die Ebene  $\varepsilon$  enthält die Gerade  $CP$ , so dass ihre Spurgerade  $C^\circ(P)$  den Punkt  $P'$  enthält. Mit anderen Worten, die Punkte  $C^\circ$ ,  $P'$  und  $(P)$  liegen – für beliebige  $P$  – auf einer Geraden, womit das Bestehen der obengenannten zentralen Kollineation bewiesen und die Lage ihres Zentrums bestimmt ist. Die Achse dieser Kollineation ist offenbar die Spurgerade  $s$ .

Auf Grund der oben gegebenen Definition kann man  $C^\circ$  konstruieren; es wäre aber nötig, erst die Lage des Punktes  $C^*$  zu bestimmen. Dagegen, wenn wir noch die Fluchtebene  $\sigma'$  der Ebene  $\sigma$  betrachten, können wir  $C^\circ$  auch als das Spiegelbild von  $C$  an der Mittelebene von  $\sigma'$  und  $\pi$  auffassen. Wegen der Parallelität von  $\sigma$  und  $\sigma'$  ist nämlich die Mittelebene von  $\sigma'$  und  $\pi$  zur Mittelebene  $\mu$  von  $\sigma$  und  $\pi$  parallel, und  $C^\circ$  war die senkrechte Projektion von  $C$  an  $\mu$ .

Ferner ist die Spiegelung an der Mittelebene von  $\sigma'$  und  $\pi$  mit der Umlegung von  $\sigma'$  um ihre Spurgerade  $q'$  äquivalent. Dies bedeutet aber, dass  $C^\circ$  die Umlegung von  $C$  um  $q'$  ist.

Diese Behandlung ist deshalb interessant, weil man das Bestehen der zentralen Kollineation und die Lage ihres Zentrums leicht und auf eine sehr natürliche Weise beweisen kann.

G. Szász, Szeged (Ungarn).

### **Nahezu gleichseitige rationale und nahezu gleichschenklige pythagoreische Dreiecke**

I. Ein Dreieck mit den Seiten  $b - 1$ ,  $b$ ,  $b + 1$  hat die Fläche

$$f = \frac{b}{2} \sqrt{3 \left( \frac{b^2}{4} - 1 \right)};$$

sie ist rational, wenn  $b$  gleich dem doppelten Zähler  $m_{2n}$  eines jener Näherungsbrüche

$$\frac{m_{2n}}{k_{2n}} = \frac{1}{0}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{7}{4}, \quad \frac{26}{15}, \quad \frac{97}{56}, \quad \frac{362}{209}, \quad \dots$$

von  $\sqrt{3}$  gesetzt wird, die grösser als  $\sqrt{3}$  sind, da  $m_{2n}^2 - 1 = 3 k_{2n}^2$  ist. Ferner gelten die Formeln

$$m_{2n+1}^2 - 3 k_{2n+1}^2 = -2, \quad m_n \pm k_n \sqrt{3} = 2^{-[n/2]} (1 \pm \sqrt{3})^n,$$

<sup>1)</sup> Op. c., S. 29.

mit deren Hilfe sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} m_n &= 4m_{n-2} - m_{n-4}, \quad k_n = 4k_{n-2} - k_{n-4}, \quad k_n = 14k_{n-4} - k_{n-8}, \quad k_{4n} = 2k_{2n}m_{2n}, \\ k_{4n+2} &= k_{2n+1}m_{2n+1}, \quad m_{4n} = 2m_{2n}^2 - 1 = 6k_{2n}^2 + 1, \quad m_{4n+2} = m_{2n+1}^2 + 1 = 3k_{2n+1}^2 - 1 \end{aligned}$$

ableiten lassen. Aus ihnen folgt: Die mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$b_n = 4b_{n-1} - b_{n-2} \quad (b_0 = 2, b_1 = 4), \quad a_n = b_n - (-1)^n, \quad c_n = b_n + (-1)^n$$

errechneten Zahlen 1, 2, 3; 5, 4, 3; 13, 14, 15; 53, 52, 51; 193, 194, 195; 725, 724, 723... sind Seiten rationaler Dreiecke, die sich mit wachsendem  $n$  gleichseitigen Dreiecken nähern. Ihr Flächeninhalt ist

$$f_n = \frac{3}{2}k_{4n} = 14f_{n-1} - f_{n-2} \quad (f_0 = 0, f_1 = 6),$$

ihr Inkreisradius

$$\varrho_n = k_{2n} = 4\varrho_{n-1} - \varrho_{n-2} \quad (\varrho_0 = 0, \varrho_1 = 1), \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha_n}{2} = \frac{m_n}{k_n}$$

durchläuft sämtliche Näherungsbrüche von  $\sqrt{3}$ , die schneller gegen  $\sqrt{3}$  konvergierende  $\operatorname{ctg}(\beta_n/2) = m_{2n}/k_{2n}$  jene, die grösser als  $\sqrt{3}$  sind, und  $\operatorname{ctg}(\gamma_n/2) = 3k_n/m_n$  Nebennäherungsbrüche.

## II. Für die Näherungsbrüche

$$\frac{m_{2n+1}}{k_{2n+1}} = \frac{1}{1}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{239}{169}, \quad \frac{1393}{985}, \quad \dots$$

von  $\sqrt{2}$ , die kleiner als  $\sqrt{2}$  sind, ist

$$2k_{2n+1}^2 = m_{2n+1}^2 + 1, \quad k_n = 2m_{n-2} + 3k_{n-2}, \quad m_n = 3m_{n-2} + 4k_{n-2}.$$

Setzen wir nun  $c_n = k_{2n+1}$ ,  $a_n + b_n = m_{2n+1}$ ,  $a_n - b_n = (-1)^n$ , so ist

$$a_n^2 + b_n^2 = c_n^2, \quad a_n + b_n = 3(a_{n-1} + b_{n-1}) + 4c_{n-1}, \quad a_n - b_n = b_{n-1} - a_{n-1}$$

und

$$a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2c_{n-1} \quad (a_0 = 0),$$

$$b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} + 2c_{n-1} \quad (b_0 = 1),$$

$$c_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} + 3c_{n-1} \quad (c_0 = 1).$$

Wir erhalten die Zahlen 0, 1, 1; 4, 3, 5; 20, 21, 29; 120, 119, 169; 696, 697, 985; ...; sie sind Seiten pythagoreischer Dreiecke, die sich mit wachsendem  $n$  gleichschenkligen Dreiecken nähern.  $\operatorname{tg}(\alpha/2) = \sqrt{(c-b)/(c+b)}$  durchläuft die Näherungsbrüche

$$\frac{m}{k} = \frac{0}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{12}{29}, \quad \dots$$

für  $\sqrt{2} - 1$ . Setzt man deren Nenner  $k$  und Zähler  $m$  in

$$a = 2km, \quad b = k^2 - m^2, \quad c = k^2 + m^2$$

ein, erhält man Rekursionsformeln

$$a_n = 6a_{n-1} - a_{n-2} + 4(-1)^n, \quad b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2} - 4(-1)^n, \quad c_n = 6c_{n-1} - c_{n-2},$$

aus denen sich obige Formeln ebenfalls ableiten lassen.

III. Verallgemeinerung von (II): In pythagoreischen Dreiecken, für die (1)  $b = (q/2) a \pm 1$  ist, nähert sich bei wachsenden Seiten der Winkel  $\alpha$  dem Wert

$$\arctg \frac{2}{q} = 2 \arctg \left( \sqrt{\frac{q^2}{4} + 1} - \frac{q}{2} \right),$$

(2) in solchen, für die  $c = (q/2) a + 1$  ist, nähert sich  $\alpha$  dem Wert

$$\arcsin \frac{2}{q} = 2 \arctg \left( -\sqrt{\frac{q^2}{4} - 1} + \frac{q}{2} \right).$$

Aus den Näherungsbrüchen für die runden Klammern ergeben sich folgende Formeln, in denen für (1) das obere, für (2) das untere Vorzeichen zu nehmen ist:

$$\begin{aligned} a_n &= \pm a_{n-1} + q b_{n-1} + q c_{n-1} \quad (a_0 = 0), \\ b_n &= \pm q a_{n-1} + \left( \frac{q^2}{2} - 1 \right) b_{n-1} + \frac{q^2}{2} c_{n-1} \quad (b_0 = 1), \\ c_n &= \pm q a_{n-1} + \frac{q^2}{2} b_{n-1} + \left( \frac{q^2}{2} + 1 \right) c_{n-1} \quad (c_0 = 1). \end{aligned}$$

E. WAAGE, Graz.

### A propos du pentagone<sup>1)</sup>

Sind  $A', B', C', D'$  und  $E'$  die Gegenpunkte der Ecken des regelmässigen Fünfecks  $ABCDE$ , dann gehen die Geraden  $EE'$ ,  $DC'$  und  $AB'$  wegen der Symmetrie mit der Achse  $EE'$  durch einen Punkt  $P$ . Ist  $M$  der Mittelpunkt des Umkreises (auf diesem liegen auch die Punkte  $A', \dots, E'$ ), dann ist  $r = MA' = PD$  und  $EB' = C'P$ ; daher ist

$$d_{10} - s_{10} = r, \quad (1)$$

wobei  $s_{10}$  die Seite und  $d_{10}$  eine der Diagonalen eines regelmässigen Zehnecks in einem Kreis mit dem Radius  $r$  ist.

Das rechtwinklige Dreieck  $AA'D$  gibt

$$s_{10}^2 = 2rA'D'',$$

wobei ersichtlich  $A'D'' = r - (d_{10}/2)$  ist. Man hat daher

$$s_{10}^2 = r(2r - d_{10}) = r(r - s_{10}). \quad (2)$$

Wegen  $AD' \parallel ME'$  ist Fläche  $AD'M$  = Fläche  $AD'E'$ . Da  $\triangle AMD' = \triangle D'AE'$ , ergibt sich  $AM \cdot MD' = D'A \cdot AE'$ , das heisst

$$s_{10} d_{10} = r^2. \quad (3)$$

Die Gleichungen (1), (2) und (3) sind abhängig; sie geben

$$s_{10} = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}, \quad d_{10} = \frac{r(\sqrt{5}+1)}{2}.$$

Mit Hilfe der rechtwinkligen Dreiecke  $AA'B'$  und  $AA'D$  erhält man die Seite

$$s_5 = \frac{r\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2} \quad \text{und die Diagonale} \quad d_5 = \frac{r\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$$

des regelmässigen Fünfecks im Kreis mit dem Radius  $r$ .

---

<sup>1)</sup> Siehe G. BILGER, El. Math. 8, Heft 3, 66 (1953).

Die obige Ableitung enthält keinen Kunstgriff und benötigt nur wenige der einfachsten Hilfssätze. Dass man mit Hilfe tautologischer Umformungen aus den Gleichungen (1) und (2) auch Gleichungen höheren Grades, als es die Gleichung (19) am angeführten Orte ist, erhalten kann, ist selbstverständlich. Jedenfalls sind die Gleichungen (1) und (2) einfacher als das System der Gleichungen (1) bis (10) am angeführten Ort.

R. LAUFFER, Graz.

Anmerkung der Redaktion: Reiches Material über regelmässige Vielecke findet man in der schönen Arbeit von G. DOSTOR: *Théorie générale des polygones étoilés*, J. Math. pures appl. 6, 343–386 (1880).

---

## Aufgaben

**Aufgabe 160.** Es sind  $\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{2k}$  und  $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{2k+1}$  zu bestimmen.  
P. BUCHNER, Basel.

*Lösung:* Bedeutet  $S_n = a_{2n}$  die erste,  $T_n = a_{2n-1}$  die zweite der Summen in der Aufgabe, so findet man mit dem Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks sofort die Beziehungen  $T_n + S_n = T_{n+1}$ ,  $S_n + T_{n+1} = S_{n+1}$ , also gilt allgemein  $a_m = a_{m-1} + a_{m-2}$ . Wegen  $S_0 = a_0 = 1$ ,  $T_1 = a_1 = 1$  sind die  $a_m$  identisch mit den Fibonacci-Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, ... .

Die bekannte explizite Darstellung ergibt sich aus der in der Umgebung von Null gültigen Reihenentwicklung

$$(1 - z - z^2)^{-1} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

Hier muss offenbar  $b_{i+2} - b_{i+1} - b_i = 0$  und  $b_0 = b_1 = 1$  gelten. Also ist  $a_i = b_i$ . Die Partialbruchzerlegung von  $(1 - z - z^2)^{-1}$  gibt

$$\frac{1}{\alpha_2(1 - z/\alpha_2)\sqrt{5}} - \frac{1}{\alpha_1(1 - z/\alpha_1)\sqrt{5}}, \quad \text{wo} \quad \alpha_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

Durch Reihenentwicklung der Partialbrüche folgt

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\alpha_2^{k+1}} - \frac{1}{\alpha_1^{k+1}} \right) z^k,$$

also ist

$$a_n = \frac{\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}}{(\alpha_1 \alpha_2)^{n+1} \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}.$$

K. RIEDER, Riehen.

Eine Lösung der Aufgabe findet man auch in E. NETTO, *Lehrbuch der Kombinatorik* (Teubner, Leipzig 1927, S. 247), wo weitere ähnliche Summationen behandelt sind. (Nachträgliche Mitteilung des Aufgabenstellers.)

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), L. BERNSTEIN (Tel-Aviv), P. BOLLI (Genf), F. GOLDNER (London), R. LAUFFER (Graz), R. W. MERKEL (Karlsruhe).

**Aufgabe 161.** Eine Kegelfläche zweiter Ordnung mit der Spitze  $S$  werde von einer Ebene  $e_1$  in einem Kegelschnitt  $K_1$  geschnitten.  $F$  sei ein Brennpunkt von  $K_1$ . Man beweise: Liegt die Ebene  $e_2$  spiegelbildlich zu  $e_1$  in bezug auf die in  $F$  errichtete Normalalebene zu  $FS$ , so schneidet  $e_2$  den Kegel in einem Kegelschnitt  $K_2$  mit demselben Brennpunkt  $F$ .

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.