Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1953)
Heft: 4

Artikel: Maximalstetige Kurven
Autor: Unger, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16920

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

pour éliminer l'angle β au bout de l'arête si n est impair, au milieu de l'arête si n est pair, tous les nouveaux dièdres étant des multiples de $\pi/4$.

Nous avons ainsi transformé un polyèdre à dièdres rationnels en un polyèdre équivalent dont tous les dièdres sont des multiples de $\pi/4$. Si l'on pouvait établir qu'un tel polyèdre est équivalent à un cube, on aurait montré que les conditions de DEHN sont nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres. Pour l'instant, nos résultats permettent seulement d'affirmer que: *Si deux polyèdres vérifient les conditions de Dehn, leur différence est équivalente à un polyèdre dont tous les dièdres sont des multiples de* $\pi/4$. J.-P. SYDLER, Zurich.

Maximalstetige Kurven

Eine neue Charakterisierung der Kneser-Juelschen Bögen

Die reellen nichtanalytischen Kurven wurden zunächst von A. KNESER [1][1]) im Anschluss an eine Begriffsbildung VON STAUDTS [2] untersucht. CHR. JUEL [3] stützt sich auf den Begriff des konvexen Bogens, von dem J. HJELMSLEV [4] gezeigt hat, dass er zur Beschreibung der Gestaltverhältnisse reeller Kurven geeignet ist. Kürzlich hat L. LOCHER-ERNST [5] eine Darstellung auf neuer Grundlage gegeben. Der Kurvenbegriff in diesem Gebiet der Geometrie entspricht der anschaulichen Vorstellung einer frei aufs Papier gezeichneten Linie, also der «Grundvorstellung, dass eine ebene Kurve durch stetige Bewegung eines Punktes in einer Geraden und gleichzeitige Drehung der Geraden um den Punkt erzeugt wird, wobei sich die Richtung der Bewegung und der Sinn der Drehung nur in einzelnen, singulären Lagen der erzeugenden Elemente ändern» [1].

Es ist nun möglich – und soll hier ausgeführt werden –, den Begriff des nirgends singulären Bogens (KNESER), des Elementarbogens (JUEL) oder des einfachen Elementarbogens (LOCHER) allein durch eine *selbstdual gefasste Verschärfung der Stetigkeit* zu gewinnen, und zwar erweist sich das Kriterium als notwendig und hinreichend. Während der Begriff der Kurve mit überall eindeutiger und stetiger Tangente (völlig stetige Kurve [3], § 3) noch zu weit ist[2]) und durch ein weiteres Kriterium (Konvexität oder die sogenannten von-Staudtschen Sätze) eingeschränkt werden muss, zeigt es sich, dass die «Tangente im scharfen Sinn» nach BUSEMANN und FELLER [6], [7] unter Hinzunahme ihres Gegenstückes das gewünschte Kriterium ergibt, das wir maximale Stetigkeit nennen.

1. *Innere Stetigkeit und Ordnung (auf der Kurve)*

Es sei eine linear geordnete stetige Menge K von Linienelementen Pp der projektiven Ebene gegeben. Es gelten in K die Zwischenrelationen und das Schnittaxiom. Es gibt Intervallschachtelungen.

---

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 85.

[2]) Anmerkung bei der Korrektur: Die bei solchen Kurven möglichen Stellen werden in einer gleichzeitig im «Archiv der Mathematik» erscheinenden Arbeit untersucht: *Ein Kriterium für die Kneser-Juelschen Kurven.*

2. *Äussere Stetigkeit*

Die Stetigkeit von K überträgt sich durch Schein und Schnitt auf die projizierenden Büschel A (Aufpunkte) und die schneidenden Geraden a (Testgeraden) der projektiven Ebene. Sei insbesondere $Q_i\, q_i$ eine nach $P p$ konvergierende Folge von Linienelementen aus K, so konvergiert die aus dem (festen) Aufpunkt A gebildete Folge von Projektionsstrahlen (AQ_i) nach (AP) und die auf der (festen) Testgeraden a gebildete Folge von Schnittpunkten $(a\, q_i)$ nach $(a\, p)$.

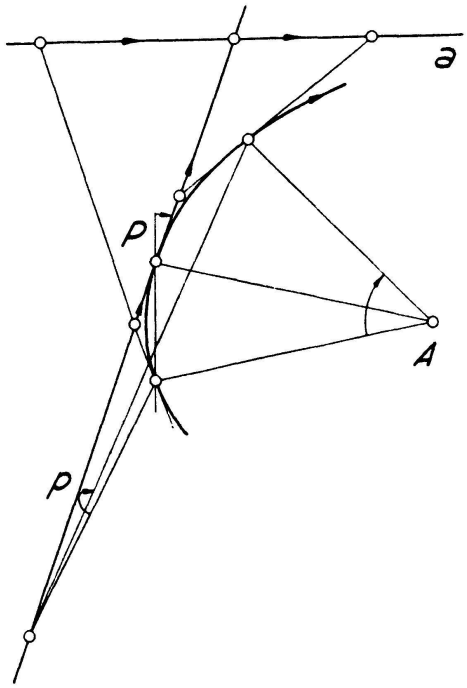


Fig. 1

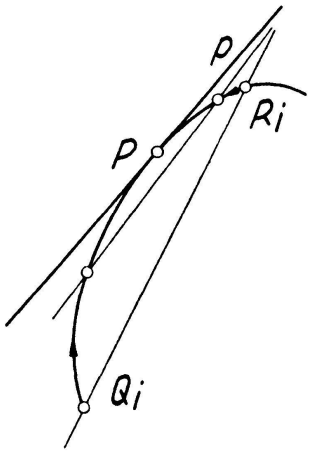


Fig. 2

3. *Dualstetige Kurven (Juel: völligstetige Kurven)*

Die Linienelemente von K seien ausserdem *verbunden*, das heisst, eine Sekante durch P hat p und ein Tangentenschnittpunkt auf p hat P zur Grenzlage, wenn der Nachbarpunkt oder die Nachbartangente nach P oder p rücken:

$$\text{aus} \quad Q_i\, q_i \to P p \quad \text{folgt} \quad (PQ_i) \to p \quad \text{und} \quad (p\, q_i) \to P.$$

4. *Von-Staudtsche Sätze, Regularität (äussere Ordnung)*

Wenn sich durch Schein und Schnitt ausser der Stetigkeit auch die innere Ordnung auf die projizierenden Büschel und schneidenden Punktreihen überträgt, soll die Kurve *regulär* heissen. Dies wird durch die sogenannten von-Staudtschen Sätze (Spezialfall eines auch die Singularitäten enthaltenden Satzes der Geometrie der Lage, [1] und [2], Nr. 197) formuliert:

Das Element Pp einer dualstetigen Kurve K ist regulär, wenn der Projektionsstrahl aus A dann und nur dann die Vor- und Nachpunkte von P nicht trennt, wenn A auf p liegt, ohne mit P identisch zu sein, und wenn – dual dazu – der Schnittpunkt der Tangente mit a dann und nur dann die Vor- und Nachtangenten von p nicht trennt, wenn a durch P geht, ohne mit p identisch zu sein (Figur 1).

5. *Maximale Stetigkeit*

Eine dualstetige Kurve nach 3. heisse *maximalstetig*, wenn die Grenzlage irgendeiner Sekante mit zusammenrückenden Schnittpunkten die Tangente und wenn – dual dazu – die Grenzlage irgendeines Tangentenschnittpunktes mit zusammenrückenden Tangenten der Berührungspunkt ist (Figur 2):

$$\text{aus} \quad Q_i, R_i \to P \quad \text{folgt} \quad (Q_i R_i) \to p, \quad \text{und aus} \quad q_i, r_i \to p \quad \text{folgt} \quad (q_i r_i) \to P.$$

6. *Formulierung der Behauptung und Beweisgang*

Eine maximalstetige Kurve ist regulär und umgekehrt. Zunächst wird der erste Teil der Behauptung gezeigt, dann wird ein gewisses dyadisches Kontinuum K' von

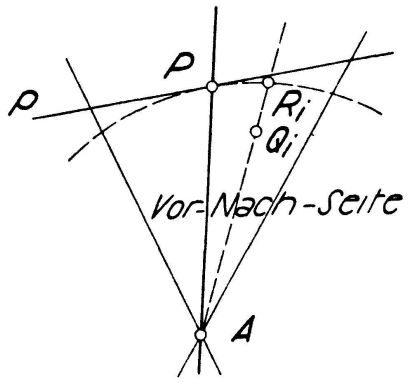
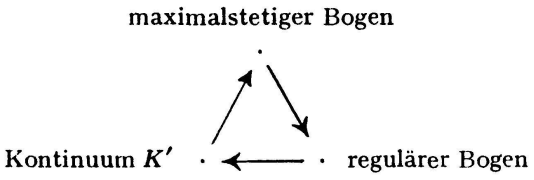


Fig. 3

Linienelementen eingeführt und von diesem gezeigt, dass reguläre Bögen sich als Kontinua K' darstellen lassen – was zugleich die allgemeine Parametrisierung und die Konstruktion der fraglichen Bögen ergibt – und dass es maximalstetig ist.



7. *Kurven und Bögen*

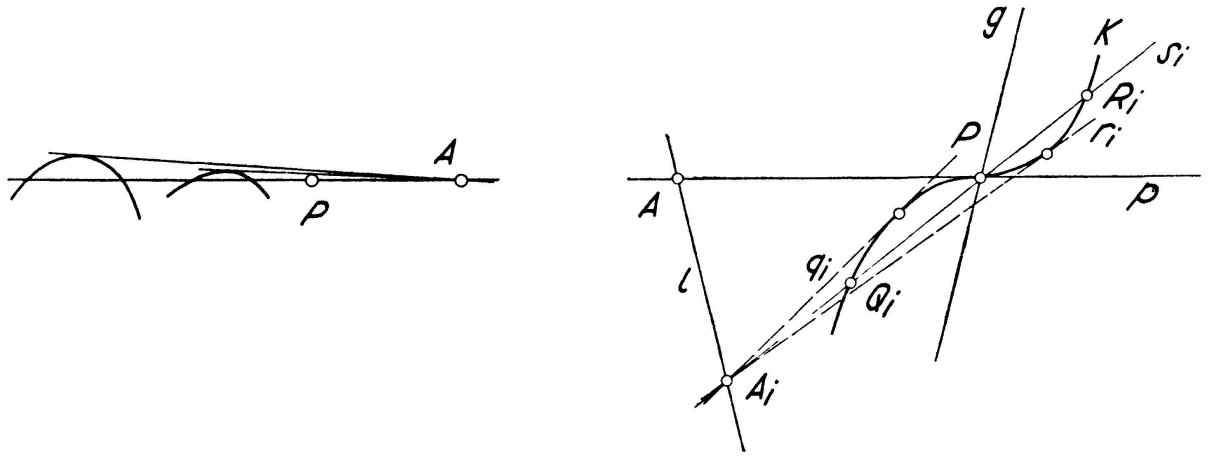
Es empfiehlt sich, zunächst solche Teile von regulären oder maximalstetigen Kurven zu betrachten, bei denen keine mehrfachen Punkte oder Tangenten und auch keine Tangenten durch andere Kurvenpunkte als ihren Berührungspunkt auftreten. Dass in hinlänglich kleiner Umgebung eines Elementes stets ein solcher elementarer Bogen abgegrenzt werden kann, ergibt sich unten.

8. *Die maximalstetige Kurve ist regulär*

a) Der Projektionsstrahl (Figur 3) AP trennt die Vor- und Nachpunkte von P. Im gegenteiligen Fall gäbe es, etwa auf der Nachseite, in jeder Umgebung von P

einen Vorpunkt, aus welchem die Folge Q_i ausgewählt sei. Nun überschreitet aber in genügend kleiner Umgebung die stetige Kurve K auf der Nachseite die Strahlen (AQ_i), so dass man aus den Schnittpunkten R_i eine Folge von Punktepaaren Q_i, R_i bilden kann, welche nach P strebt, ohne dass die Verbindungsgeraden (Q_iR_i) nach p konvergieren [sondern nach (AP)], im Widerspruch zur maximalen Stetigkeit.

b) Die maximalstetige Kurve überschreitet nicht in jeder Umgebung von P die Tangente p. Andernfalls liesse sich aus einem Punkt A auf p in hinlänglicher Entfernung eine nach p strebende Folge von Tangenten q_i an K bilden, deren Schnittpunkt A jedoch nicht nach P strebt, wiederum im Gegensatz zur maximalen Stetigkeit. Es gibt nämlich unter der Beweisannahme aufeinanderfolgende Schnittpunkte, da



a Fig. 4 *b*

eine dichte Menge von Schnittpunkten zur Folge hätte, dass die Kurve mit der Tangente identisch wäre. Unter den die Kurvenpunkte aus A projizierenden Strahlen gibt es wegen der aus der Stetigkeit erfliessenden Beschränktheit der Bögen letzte Strahlen, welche nach der Voraussetzung der maximalen Stetigkeit Tangenten sind. Diese schneiden sich in A, und A ist fest $\neq P$ (Figur 4*a*).

c) Die maximalstetige Kurve durchsetzt auch nicht die Tangente p *in* P. Andernfalls gäbe es in einer Umgebung von Pp Vor- und Nachpunkte Q und R auf verschiedenen Seiten von p; diese sind nach a) auch durch eine von p verschiedene Gerade g des Büschels P getrennt (Figur 4*b*) und werden also aus P durch dasselbe Büschelsegment bezüglich p, g projiziert. In geeigneter Umgebung liegen deshalb auf einem Strahl $s_i \to p$ dieses Büschels Q_i und R_i. Ist nun l eine nicht durch P gehende Gerade mit $A = (l\,p)$ und $A_i = (s_i\,l)$, so gibt es, analog wie bei b), von A_i aus zwei Tangenten q_i, r_i an die Bögen Q_iP, PR_i. Mit $Q_i, R_i \to P$ konvergiert A_i nach $A \neq P$, gegen die maximale Stetigkeit.

Dies macht zusammen mit der analog zu zeigenden dualen Tatsache gerade den Inhalt der von-Staudtschen Sätze aus. – Aus b) und c) folgt noch die obenerwähnte Einfachheit der maximalstetigen Kurve in genügender Nähe des betrachteten Elementes. Damit ist auch in der Umgebung eines Elementes einer maximalstetigen Kurve die Voraussetzung für den Glättungssatz von LOCHER ([5], Seite 26) erfüllt, und man kann um jedes Element einen «einfachen Bogen» ([5], Seite 28) abgrenzen.

9. *Parametrisierung und Konstruktion des einfachen regulären Bogens*

Es sei ein einfacher regulärer Bogen K mit Anfangs- und Endelementen Aa und Bb gegeben. $Z_1 z_1$ sei ein auf K zwischen Aa und Bb befindliches Element. Es sei weiterhin $S_1 = (ab)$ und $s_1 = (AB)$ (Figur 5). Dann liegen nach Voraussetzung die Strahlen $(AZ_1) = s_{01}$ und $(BZ_1) = s_{11}$ «zwischen» a und s_1 bzw. b und s_1 im Sinn der

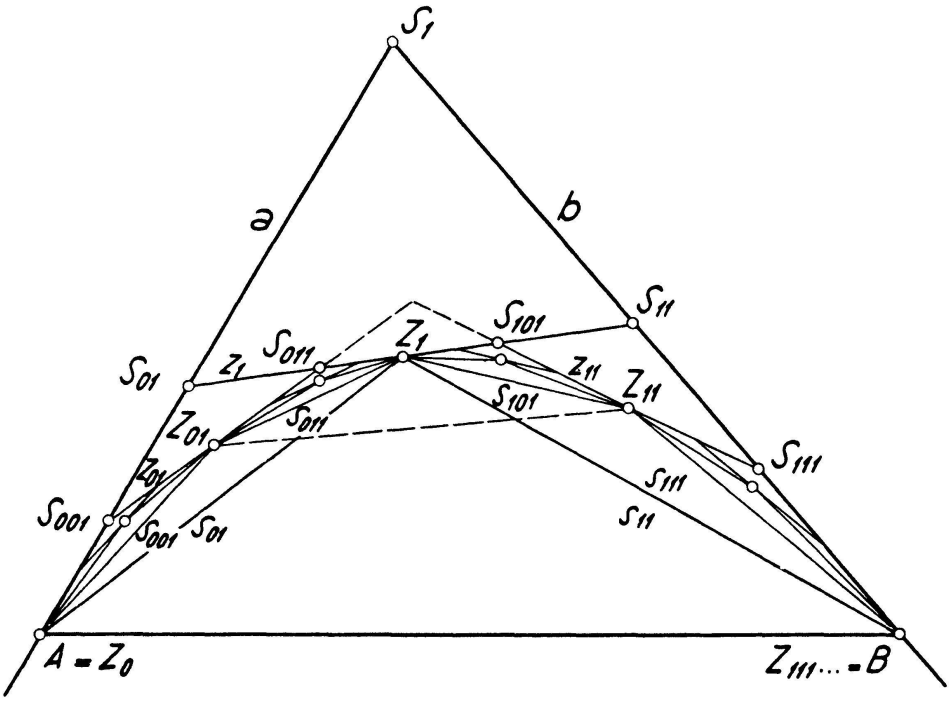


Fig. 5

durch den Bogen induzierten Bewegung und ebenso die Schnittpunkte $(a z_1) = S_{01}$, $(b z_1) = S_{11}$ zwischen A und S_1 bzw. B und S_1. Dadurch ist einer der vier dreieckigen Punktbereiche, in die die projektive Ebene zerfällt, als innerer ausgezeichnet: G_1 bestehend aus den Schnittpunkten innerer Strahlen der Büschel $(a s_1)$ und $(b s_1)$; und ebenso kann man – dual dazu – die Gesamtheit der Strahlen, welche die inneren Segmente $(A S_1)$ und $(S_1 B)$ schneiden, als inneren Strahlenbereich g_1 auszeichnen. – Es ist hier zweckmässig, die Punkte von G_1 und die Strahlen von g_1 als Elemente eines Bereiches $G_1 g_1$ von Linienelementen (Doppelbereich) zusammenzufassen. Es ist klar, was im folgenden die Wendung besagt: eine Folge von Doppelbereichen konvergiert gegen ein Linienelement Pp (es sollen die Punktgebiete und Strahlengebiete sich je für sich zusammenziehen, wobei jeder Punkt eines Gebietes mit mindestens einem Strahl des entsprechenden Strahlenbereichs und umgekehrt inzidieren soll). Dabei können die Doppelbereiche geschachtelt sein (wenn wiederum Punkt- und Strahlenbereiche je für sich in gegenseitiger Inzidenz und geschachtelt sind). – Die «schwachen Figuren» von HJELMSLEV [8] können als Beispiele dienen. – Die Dreiecke $A S_{01} Z_1$ und $Z_1 S_{11} B$ bilden zwei in $G_1 g_1$ liegende Doppelbereiche $G_{01} g_{01}$, $G_{11} g_{11}$ mit dem einzigen gemeinsamen Element $Z_1 z_1$. Wählt man nun in $G_{01} g_{01}$ zwischen Aa und $Z_1 z_1$ das Element $Z_{01} z_{01}$ und in $G_{11} g_{11}$ das Element $Z_{11} z_{11}$, so entstehen vier weitere Doppelbereiche, deren Bezeichnung in ersichtlicher Weise nach Art der

Ziffernfolge dyadischer Brüche gewählt ist (zum Beispiel $Z_1 = Z_{10} = Z_{100} = \cdots$, $A = Z_0 = Z_{00} = Z_{000} = \cdots$, und entsprechend für die G, g, S, s):

$$\begin{aligned}
G_{001}\, g_{001}: &\quad A \;\; S_{001}\, Z_{01}\,,\; a \;\; s_{001}\, z_{01}\,,\\
G_{011}\, g_{011}: &\quad Z_{01}\, S_{011}\, Z_{11}\,,\; z_{01}\, s_{011}\, z_1\,,\\
G_{101}\, g_{101}: &\quad Z_1 \;\; S_{101}\, Z_{11}\,,\; z_1 \;\; s_{101}\, z_{11}\,,\\
G_{111}\, g_{111}: &\quad Z_{11}\, S_{111}\, B\,,\; z_{11}\, s_{111}\, b\,.
\end{aligned}$$

Man sieht, wie sich dieses Verfahren fortsetzen lässt: man wählt in jedem Doppelbereich Gg ein neues Zwischenelement Zz (das heisst in allen Doppelbereichen derselben Stufe simultan) und bezeichnet es durch dieselbe Indexfolge, deren Länge die Iterationsstufe angibt. Den Indexfolgen entsprechen abbrechende dyadische Brüche $0,ikl\ldots$ So kann durch unbegrenztes Fortsetzen der Wahlakte eine auf der Kurve überall dichte Menge von Elementen gewählt werden. Dann lassen sich durch alle endlichen *und* unendlichen Indexfolgen, das heisst durch alle reellen Zahlen von $\langle 0, 1\rangle$ in dyadischer Schreibweise alle Elemente der Kurve umkehrbar eindeutig und ordnungstreu darstellen. Denn eine nichtabbrechende Indexfolge bedeutet eine konvergierende Schachtelung von Doppelgebieten. Damit ist der Bogen stetig und eineindeutig auf das Intervall zwischen 0 und 1 abgebildet und also parametrisiert. Es ist ebenso klar, dass dasselbe Verfahren durch *freie* Wahlakte, zunächst von $Z_1 z_1$ in $G_1 g_1$, dann von $Z_{01} z_{01}$ und $Z_{11} z_{11}$ in den neuentstandenen $G_{01} g_{01}$ und $G_{11} g_{11}$ und so weiter wiederum zu einem dyadischen Kontinuum K' führt und dass dies einen einfachen regulären Bogen liefert (wenn die einzige Einschränkung beachtet wird, dass die Elemente, zum Beispiel beurteilt durch die Projektionsstrahlen aus A und B, und die Schnittpunkte auf a und b *dicht* zu liegen kommen). – Es ist nicht nötig, dies im einzelnen zu verfolgen, da wir zeigen, dass das Kontinuum K' maximalstetig und *a fortiori* regulär ist.

10. *Das dyadische Kontinuum K' ist maximalstetig*

Es ist zu zeigen, dass mit irgend zwei Folgen von Punkten $Q_i R_i$ von K', welche nach P streben, die Folge ihrer Verbindungsgeraden nach p strebt (durch die Verwendung der selbstdualen Doppelbereiche ist der Nachweis des dualen Sachverhaltes mit eingeschlossen).

a) P gehöre nicht der Menge der Z an. Dann folgt aus der Konvergenz der Folge der $Q_i R_i$, dass die Paare schliesslich in jeder Umgebung, also insbesondere in jedem der G bleiben. Andererseits kann man bei festgehaltenem Index i die Einteilung der G so weit verfeinern, bis zum ersten Male die (ja im allgemeinen verschiedenen) Punkte Q_i und R_i in verschiedenen G liegen. Dann gehört ihre Verbindungsgerade aber dem zugeordneten Strahlenbereich g des letzten G an, in welchem noch Q_i und R_i gemeinsam liegen. So gibt es zu jedem i ein kleinstes Strahlengebiet aus den g, welches $(Q_i R_i)$ enthält, und auch diese Strahlengebiete sind geschachtelt und konvergieren gegen p.

b) Im Fall, dass P ein Z ist, können Q_i und R_i stets in verschiedenen G liegen. Man kann aber in diesem Fall die beiderseits P liegenden G derselben Stufe vereinigen

und dadurch gleichfalls eine Schachtelung von Doppelgebieten erhalten, welche sich nach Pp zusammenzieht.

Damit ist die maximale Stetigkeit von K' und nach 9. des regulären, einfachen Bogens gezeigt. Da sich aber um jedes Element Pp einer regulären Kurve ein einfacher Bogen abgrenzen lässt, folgt daraus die maximale Stetigkeit der regulären Kurve.

Das neue Kriterium erweist sich somit als notwendige und hinreichende, lokale Charakterisierung der Kneser-Juelschen Kurven.

11. *Nichtreguläre dualstetige Kurven*

Die Konstruktion des dyadischen Kontinuums K' ergab die Existenz maximalstetiger Bögen. Ähnlich können triadische Kontinua K'' zur Konstruktion recht allgemeiner nichtregulärer dualstetiger Kurven benützt werden. Der Leitgedanke ist, an einem regulären Bogen eine Einbuchtung hervorzubringen, wodurch drei mit Wendepunkten aneinanderstossende reguläre Bögen entstehen, an welchen das Verfahren wiederholt wird. So entsteht eine Folge dualstetiger Bögen, welche gegen eine dualstetige Kurve konvergiert, wenn die Variation des Tangentenschnittpunktes auf der Anfangs- und Endtangente geeignet beschränkt wird. Beim resultierenden Bogen finden sich in jeder Umgebung eines Punktes Wendepunkte. Diese Konstruktion[1]) lässt sich leicht direkt durch ein triadisches Kontinuum bewerkstelligen. Man zeigt dann unschwer, dass die entstehende Kurve dualstetig, aber nirgends maximalstetig ist; auch ist keines der bei den Wahlakten auftretenden Elemente Zz regulär.

12. *Zusammenfassung*

Durch selbstdual gefasste Verschärfung der Stetigkeit von Berührpunkt- und Tangentenexistenz ergibt sich ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die regulären Kurven (das heisst die den von-Staudtschen Sätzen genügen). Dabei handelt es sich um ein lokales Kriterium. – Die Anregung zu dieser Untersuchung ging von Aufgabe Nr. 106 dieser Zeitschrift (L. LOCHER) aus. Herrn G. BALASTER verdanke ich wertvolle Kritik und Hilfe.

G. UNGER, Zürich.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. KNESER, *Allgemeine Sätze über die scheinbare Singularität beliebiger Raumkurven*, Math. Ann. *34*, 204 (1889).
[2] CHR. VON STAUDT, *Die Geometrie der Lage* (Nürnberg 1847), S. 110, § 15, Nr. 197.
[3] CHR. JUEL, *Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven*, K. Vid. Selsk. Skr. 7. R., *11* (Kopenhagen 1913); § 1: *Der Elementarbogen*, § 3: *Die Elementarkurve*.
[4] J. HJELMSLEV, *Om Grundlager for Laeren om simple Kurver*, Nyt Tidskr. Math. *18* (1907); vgl. auch: *Die Geometrie der Wirklichkeit*, Acta Math. *40*, 35–60 (1917).
[5] L. LOCHER-ERNST, *Einführung in die freie Geometrie ebener Kurven* (Birkhäuser, Basel 1952).
[6] H. BUSEMANN und W. FELLER, *Krümmungseigenschaften konvexer Flächen*, Acta Math. *66* (1934).
[7] CHR. PAUC, *Les méthodes directes en Géometrie différentielle* (Hermann & Cie, Paris 1941).
[8] J. HJELMSLEV, *Die Geometrie schwacher Figuren*, Math. phys. Medd. *20*, 21 (1942–44).

[1]) Vergleiche dazu die in Anmerkung 2 (Seite 79) genannte Arbeit.