

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 8 (1953)  
**Heft:** 2

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

werden durch den obigen Beweis nicht unmittelbar erfasst, weil durch die genannte Vertauschung der Umlaufsinn des Dreiecks und damit auch die Winkel geändert werden. Sie können indes sehr leicht aus den übrigen durch Rechnung gefunden werden. Multipliziert man nämlich (6) mit  $\sin c$  und (7) mit  $\cos c$  und subtrahiert, so erhält man mit

$$\sin b \cos \alpha = \cos \alpha \sin c - \sin \alpha \cos c \cos \beta$$

eine der drei Formeln, woraus sich die beiden andern durch zyklische Vertauschung ergeben.

In derselben Weise lassen sich auch die zu (6) und (7) polaren Formeln herleiten. Dividiert man zum Beispiel (7) durch (8) und multipliziert dann mit  $\sin \alpha$ , so erhält man den Kotangentensatz

$$\sin \alpha \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} b \sin c - \cos c \cos \alpha \quad (9)$$

nebst den fünf analogen Relationen. Durch Auflösung von (9) nach  $\operatorname{ctg} b$  und Multiplikation des Resultats mit der zu (8) gehörigen Gleichung

$$\sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta$$

ergibt sich ferner mit

$$\sin \gamma \cos b = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha \cos c \quad (10)$$

eine der sechs zu (7) polaren Beziehungen. Ersetzt man endlich in der zu (10) gehörigen Relation

$$\cos \gamma \sin \alpha = \sin \beta \cos c - \sin \gamma \cos \alpha \cos b$$

$\sin \gamma \cos b$  durch (10), so erhält man nach Division durch  $\sin \alpha$  unmittelbar

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c, \quad (11)$$

also den zu (6) polaren Winkel-Kosinus-Satz. Damit sind aber sämtliche Hauptsätze bewiesen.

E. R. HERZOG, Riehen bei Basel.

## Kleine Mitteilungen

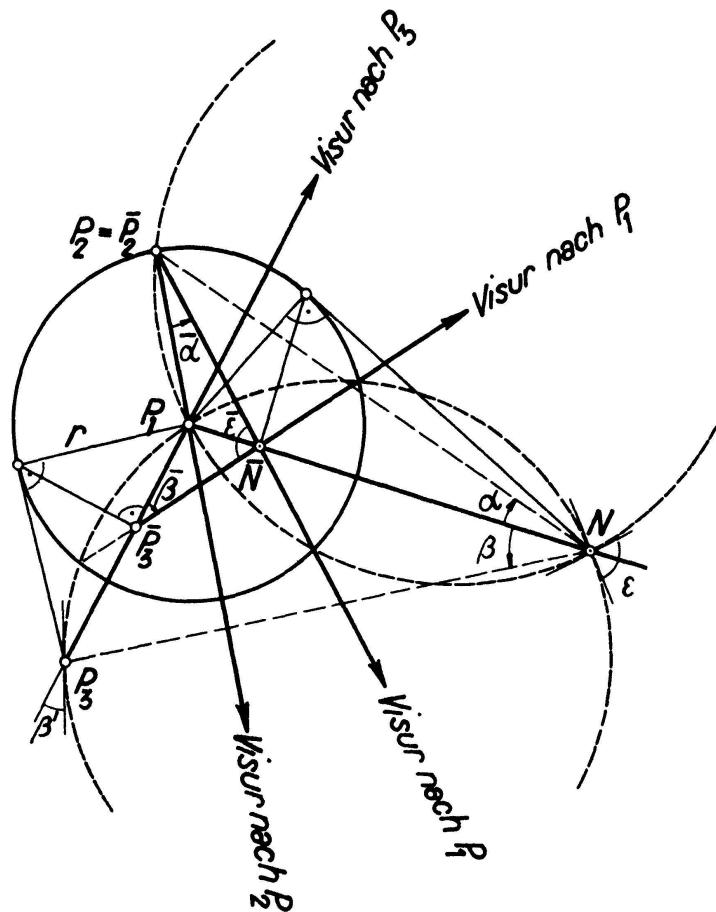
### Der Rückwärtseinschnitt mit reziproken Distanzen

Beim Rückwärtseinschnitt handelt es sich um die Vermessungsaufgabe, aus der bekannten Lage von drei Fernpunkten  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  den eigenen Standort, den Neupunkt  $N$ , zu bestimmen, wenn man bei Unkenntnis der Nordrichtung nur die Richtungsunterschiede  $\alpha$  und  $\beta$  zwischen je zwei Fernpunkten messen kann (Snellius-Pothenotsche Aufgabe<sup>1</sup>)). Der Neupunkt wird als Schnitt zweier Kreise gefunden, die durch je zwei Fernpunkte gehen und die entsprechenden Richtungsunterschiede  $\alpha$  bzw.  $\beta$  als Peripheriewinkel besitzen. Liegt der Neupunkt auf dem durch die Fernpunkte gehenden

<sup>1</sup>) Siehe zum Beispiel E. LEUTENEGGER, *Leitfaden der ebenen Trigonometrie*, 3. Auflage (Orell-Füssli-Verlag, Zürich 1952), S. 121.

Kreis, dem «gefährlichen Kreis», so ist die Aufgabe unbestimmt; liegt er nahe daran, so wird der Schnitt der Kreise schleifend. (Da es sich bei dieser Aufgabe nur um die Bestimmung der Kartenprojektion handelt, wird von den Höhen der Punkte abgesehen, wie auch Verzerrungen wegen der Kugelgestalt der Erde hier nicht berücksichtigt werden, da sie nicht von Bedeutung sind.)

Im Felde ist die Konstruktion der Kreise auf dem Messtisch umständlich und unge nau; man benützt deshalb nicht diesen Lösungsweg, sondern meist ein Verfahren, bei dem die Kreise in der Umgebung des Neupunktes durch Sehnen ersetzt werden. Ein



mathematisch interessantes, einfaches und mindestens ebenso genaues und rasches Verfahren, bei dem der Rückwärtseinschnitt in einen Vorwärtseinschnitt übergeführt wird, erhält man mit Hilfe der Inversion.

Bei der *Inversion*, der Spiegelung am Kreise, liegen ein Punkt  $P$  und sein Bild  $\bar{P}$  auf derselben Zentralen; das Produkt der Abstände von  $P$  und  $\bar{P}$  zum Inversionszentrum ist gleich dem Quadrat des Kreisradius. Wie es die Figur zeigt, kann das Bild mit Hilfe des Kathetensatzes rasch gefunden werden. Die Inversion ist kreistreu (Kreise durch das Zentrum werden zu Geraden) und winkeltreu (mit Umkehrung des Drehsinnes). Somit besteht die Möglichkeit, die Ortskreise in Gerade zu verwandeln, wobei die im Gelände auftretenden Winkel auf der Zeichnung erhalten bleiben.

*Konstruktion.* Als Inversionszentrum wählt man einen Fernpunkt, in der Regel den mittleren. Der Radius wird meist so gross angenommen, dass ein zweiter Fernpunkt auf den Kreis zu liegen kommt, also mit seinem Bild identisch ist. Der dritte Punkt wird invers abgebildet. Die im Gelände gemessenen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  werden mit Scheitel in den Punkten  $\bar{P}_2$  bzw.  $\bar{P}_3$  im umgekehrten Sinn an den Strahlen  $\bar{P}_2P_1$  bzw.  $\bar{P}_3P_1$  abgetragen ( $\bar{\alpha}$  bzw.  $\bar{\beta}$ ), worauf man das inverse Bild  $\bar{N}$  des Neupunktes durch einen Vorwärtseinschnitt erhält. Durch inverse Abbildung findet man den Neupunkt  $N$ .

*Beweis.*  $\beta = \beta'$  (Peripherie- und Sehnentangentenwinkel). Das Bild des Kreises  $NP_1P_3$  muss eine durch  $\bar{P}_3$  gehende Gerade sein, die mit  $P_1\bar{P}_3$  den Winkel  $\bar{\beta} = \beta'$  einschliesst. (Der Beweis kann auch ohne Kenntnis der Inversionseigenschaften abgeleitet werden; denn aus  $P_1P_3 \cdot P_1\bar{P}_3 = r^2 = P_1N \cdot P_1\bar{N}$  folgt  $\triangle P_1P_3N \sim \triangle P_1\bar{N}\bar{P}_3$  und deshalb  $\beta = \bar{\beta}$ ). Der beim Vorwärtseinschnitt auftretende Winkel  $\bar{\epsilon}$  ist gleich dem Winkel  $\epsilon$ , unter dem sich die Kreise in  $N$  schneiden, woraus folgt, dass im Fall des «gefährlichen Kreises» die beiden Strahlen zusammenfallen, folglich die Aufgabe auch unbestimmt wird. Bei schleifendem Schnitt der Kreise wird auch der Schnitt der Geraden schleifend.

In der Praxis arbeitet man meist mit vier oder mehr Punkten, wobei man aus der Güte des Punktschnittes in  $\bar{N}$  auf die Genauigkeit der Vermessung schliessen kann.

Die Konstruktion der inversen Punkte wird dann ungenau, wenn sehr grosse oder sehr kleine Strecken auftreten. Durch geschickte Wahl von Inversionszentrum und -radius kann man dies meist vermeiden. Wählt man den Radius zu 10 cm, so kann man die inversen Strecken am Rechenschieber ablesen, was ungefähr gleich genaue Werte liefert wie eine saubere Konstruktion. Dagegen treten beim Übertragen der Winkel auf den Messtisch keine merkbaren Fehler auf, da die Winkel direkt vom Gelände auf die Zeichnung übernommen werden können, wenn man den Messtisch jeweilen entsprechend dreht und die Visuren mit einer Kippregel vornimmt. Dabei ist auf die Umkehrung des Drehsinnes zu achten.

Dieses Verfahren wurde vor etwa 30 Jahren in einen Entwurf zum Reglement für die Artilleriebeobachter aufgenommen, bei der definitiven Ausgabe jedoch fallengelassen, da man die mathematischen Schwierigkeiten bei Nichtfachleuten fürchtete. Praktische Versuche haben jedoch gezeigt, dass dieses Verfahren dem üblichen zeitlich und hinsichtlich Genauigkeit nicht unterlegen ist.

R. NÜSCHELER, Bern.

### Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen

Es wird folgendes behauptet: «Nimmt man ein gleichschenkliges Dreieck mit ganzzahligen Seiten als Grunddreieck an, zeichnet seinen Umkreis und trägt auf demselben von einem beliebigen Punkt seines Umfangs ausgehend, den Schenkel des Dreiecks stets im selben Sinne, beliebig oft als Sehne ab, dann hat die erhaltene Punktmenge die Eigenschaft, dass je zwei Punkte dieser Menge voneinander rationale Abstände haben.»

Der in zwei Teilen geführte Beweis erfolgt:

1. unter der Annahme, dass sich der durch das Abtragen entstehende Sehnenzug nie schliesse;
2. unter der Annahme, dass der Sehnenzug zum Ausgangspunkt zurückkehre, wobei es dahingestellt bleiben mag, ob dieser Fall, ausser beim gleichseitigen Dreieck als Grunddreieck, überhaupt eintreten kann.

Ad 1: Der Beweis erfolgt durch den Schluss von  $n$  auf  $(n+1)$ .  $P_1$  sei der Anfangspunkt der ersten Sehne,  $P_2, P_3$  usw. die durch Abtragen erhaltenen Punkte.

Für  $n=3$  ist dann die gemachte Behauptung trivial erfüllt, denn die entstandene Punktmenge  $P_1, P_2, P_3$  weist sogar nur ganzzahlige Entfernungen auf, da der Streckenzug  $P_1P_2P_3$  mit dem angenommenen Grunddreieck identisch ist.

Unter der Annahme, dass es bereits erwiesen sei, dass die  $n$  Punkte  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  eine Punktmenge der behaupteten Art bilden, muss gezeigt werden, dass durch Hinzufügen eines weiteren Punktes  $P_{n+1}$  die so erweiterte Menge ebenfalls noch rationale Entfernungen aufweist.

Nun ist aber die Punktmenge  $P_2, P_3, \dots, P_{n+1}$  offenbar kongruent der Punktmenge  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , denn sie unterscheidet sich genetisch von dieser nur darin, dass an Stelle von  $P_1$  als Anfangspunkt  $P_2$  als solcher genommen wurde, so dass durch Drehung des Kreises um denjenigen Winkel, unter welchem die Strecke  $P_1P_2$  vom Mittelpunkt des Kreises aus erscheint, die beiden Punktmengen zur Deckung gebracht werden können. Da die von  $P_1$  ausgehenden Distanzen  $P_1P_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ) laut Annahme

rational sind und ebenso wegen der Annahme und der festgestellten Kongruenz sämtliche Distanzen  $P_iP_k$  ( $i, k = 2, 3, \dots, n+1; i \neq k$ ), bleibt nur mehr nachzuweisen, dass auch die neu auftretende Strecke  $P_1P_{n+1}$  einen rationalen Wert besitzt.

Die Punkte  $P_1, P_{n+1}$  bilden aber mit zwei beliebig herausgegriffenen Punkten der Menge ein Sehnenviereck, in welchem alle Seiten und Diagonalen, ausgenommen der Strecke  $P_1P_{n+1}$  bereits als rational erkannt sind. Nach dem Satz des PTOLEMÄUS ist aber im Sehnenviereck das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte aus je zwei Gegenseiten und somit jede im Sehnenviereck auftretende Strecke rational, falls es die fünf anderen sind; also muss auch  $P_1P_{n+1}$  rational sein, was zu beweisen war.

Ad 2: Würde der Sehnenzug etwa mit dem Punkt  $P_{n+1}$  ( $n \geq 3$ ) zum erstenmal zum Ausgangspunkt zurückkehren, so könnte wie vorhin auf die rationalen Werte der Distanzen der Punktmenge  $P_1, P_2, \dots, P_n$  geschlossen werden. Weil aber  $P_{n+1} \equiv P_1$  sein soll, wird die im vorigen Beweis vorhandene Strecke  $P_1P_{n+1} = 0$ , so dass nichts mehr zu beweisen ist.

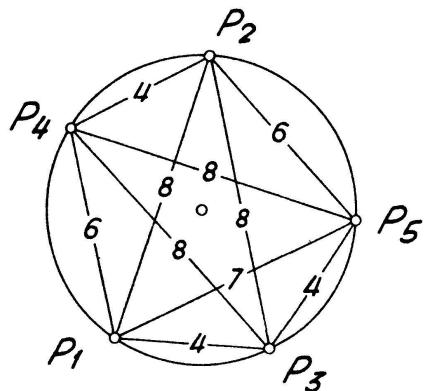


Fig. 1

Es ist selbstverständlich, dass durch entsprechende lineare Vergrösserung die Distanzen der Punktmenge ganzzahlig werden.

Ein Beispiel: Nimmt man als Grunddreieck ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie 1 und dem Schenkel 2 an, so gelangt man beispielsweise nach vier Schritten und vierfacher Vergrösserung zum Fünfeck der Figur 1.

In dieser Zeitschrift (6, Nr. 3, 59 [1951]) berichtet Herr Dr. E. TROST unter dem Titel *Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung* über einen Satz von CHOQUET und KREWERAS, welcher besagt, dass eine unendliche Punktmenge der Ebene mit untereinander ganzzahligen Entfernungen stets auf einer Geraden liegen muss. Herr Dr. E. TROST wirft schliesslich für jede Dimensionszahl  $\phi$  die Frage nach der maximalen Anzahl  $N_\phi$  der Punkte mit ganzzahliger Entfernung auf, die nicht alle auf derselben Geraden liegen.

Diese Frage muss nach Vorangehendem dahin beantwortet werden, dass es in der Ebene keine maximale Anzahl  $N_\phi$  von Punkten der genannten Eigenschaft gibt, dass vielmehr zu jeder vorgegebenen Zahl  $n^*$  eine Zahl  $n \geq n^*$  verschiedener, auf einem Kreise liegender Punkte der erwähnten Eigenschaft angegeben werden kann. Ein einziger sich nicht schliessender Streckenzug beweist bereits das eben Gesagte.

Es ist nicht uninteressant, den Umkreisradius einer Punktmenge, in welcher die Distanzen bereits ganzzahlig sind, abzuschätzen. Greift man einen beliebigen Punkt der Menge heraus, dann sind mindestens die Hälfte aller von diesem Punkt ausgehenden Distanzen untereinander verschieden gross, da man zu jedem Kreispunkt höchstens zwei Strecken gleicher Länge zu anderen Kreispunkten ziehen kann. Also muss der Umkreisradius einer Menge von  $2n$  Punkten grösser als  $n$  sein. Das heisst aber, dass mit über alle Grenzen wachsender Punktzahl auch der Radius des Kreises, auf welchem diese Punkte liegen, über alle Grenzen wächst, so dass schliesslich auch hier bei unendlicher Punktzahl der Satz von CHOQUET und KREWERAS erfüllt wird.

A. MÜLLER, Ried im Innkreis (Österreich).

### Propositions remarquables par rapport à la quadrature approchée du cercle

1<sup>o</sup> On considère un cercle de centre  $O$  et de rayon unitaire  $OA$ . On divise ce rayon en moyen et extrême rayon par le point  $G$  tel que  $OG$  soit la partie plus grande. Soit  $XY$  la corde du cercle perpendiculaire au rayon  $OA$  dans le point  $M$  et supposons que cette corde soit égale au côté du carré équivalent au cercle considéré. Puis soit  $L_x$  le côté du polygone régulier de  $x$  côtés inscrit dans le même cercle,  $\pi$  le rapport de la circonférence à son diamètre et  $\equiv$  une marque d'égalité approchée. On a donc

$$OG = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1) = 0,618\,033\,988\,749\dots;$$

$OM$  est la distance de la corde  $XY$  du centre  $O$ ,

$$OM = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - \pi} = 0,463\,251\,375\,1\dots;$$

$GM$  est la distance de la corde  $XY$  du point  $G$ ,

$$GM = OG - OM = 0,154\,782\,613\,6\dots;$$

$AM$  est la distance de la corde  $XY$  de l'extrémité  $A$  du rayon  $OA = 1$ ,

$$AM = 1 - OM = 0,536\,748\,624\,9\dots.$$

2<sup>o</sup> Proposition: *La constante d'Euler étant*

$$C = 0,577\,215\,664\,901\dots,$$

on a

$$OM \equiv 6C - 3 = 0,463\,293\,989\,4\dots \quad (\text{diff. } 0,000\,042\,61\dots).$$

3<sup>o</sup> Proposition: *La base des logarithmes népériens étant*

$$e = 2,718\,281\,828\,459\,045\dots,$$

on a

$$GM \equiv 3e - 8 = 0,154\,845\,485\,3\dots \quad (\text{diff. } 0,000\,062\,87\dots).$$

4<sup>o</sup> Proposition: *Le côté du polygone régulier supérieur de 27 côtés inscrit dans le cercle de rayon unitaire étant*

$$L_{27} \equiv 0,232\,185\,8,$$

on a

$$GM \equiv \frac{2}{3} L_{27} \equiv 0,154\,790\,6 \quad (\text{diff. } 0,000\,008\,0).$$

5<sup>o</sup> Proposition: *La racine de l'équation*

$$\Psi = \operatorname{ctg} \Psi$$

étant

$$\Psi \equiv 0,860\,333\,4,$$

on a

$$AM \equiv \frac{1}{3} \Psi + \frac{1}{4} \equiv 0,536\,777\,8 \quad (\text{diff. } 0,000\,029\,2).$$

6<sup>e</sup> Proposition: La distance  $OM$  de la corde  $XY$  du centre  $O$  peut être construite avec la règle et le compas, par les formules approchées:

$$OM \equiv \frac{3}{4} OG \equiv 0,463\,525\,491\,5 \quad (\text{diff. } 0,000\,274\,3);$$

$$OM \equiv 2(\sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{3}) - \frac{4}{5} - 3 \equiv 0,463\,306\,995 \quad (\text{diff. } 0,000\,055\,86);$$

$$OM \equiv 4 L_{15} - \frac{6}{5} \equiv 0,463\,293\,526\,4 \quad (\text{diff. } 0,000\,042\,15);$$

$$OM \equiv \frac{1}{8}(3d - 2) \equiv 0,463\,292\,387\,2 \quad (\text{diff. } 0,000\,041\,01);$$

$d = 2 \sin 72^\circ$  est la diagonale du pentagone régulier inscrit dans le cercle de rayon  $OA = 1$ .

7<sup>e</sup> Proposition: La distance  $GM$  de la corde  $XY$  du point  $G$  peut être construite, avec règle et compas, par les formules approchées:

$$GM \equiv \frac{2}{3} L_3 - 1 \equiv 0,154\,700\,538\,4 \quad (\text{diff. } 0,000\,082\,67);$$

$$GM \equiv 14 L_{15} - 6 + \frac{1}{3} \equiv 0,154\,860\,675\,7 \quad (\text{diff. } 0,000\,078\,06);$$

$$GM \equiv \frac{20}{27} L_{30} \equiv 0,154\,856\,98 \quad (\text{diff. } 0,000\,074\,37);$$

$$GM \equiv \frac{1}{4}(L_3 - L_{20}) - \frac{1}{5} \equiv 0,154\,795\,469\,4 \quad (\text{diff. } 0,000\,012\,85);$$

$$GM \equiv \frac{8}{9}(L_3 - L_5 + L_{12}) - \frac{4}{5} \equiv 0,154\,771\,905\,1 \quad (\text{diff. } 0,000\,010\,70).$$

8<sup>e</sup> Proposition: Si  $D$  est le diamètre du cercle ( $D = 2$ ),  $d$  et  $l$  la diagonale et le côté du pentagone régulier inscrit dans le même cercle, on a

$$XY = \sqrt{\pi} = 1,772\,453\,850\,9\dots,$$

$$XY \equiv \frac{3}{4} \left[ D + \frac{1}{2}(d - l) \right] \equiv 1,772\,453\,448\,0 \quad (\text{diff. } 0,000\,000\,402\,9).$$

Remarque: Cette formule importante donne plus directement la corde  $XY$  avec une grande approximation et avec rapidité constructive.

VINCENZO G. CAVALLARO, Cefalù (Sicile).

## Aufgaben

**Aufgabe 144.** B. VAN DER POL findet als Nebenresultat tiefliegender Untersuchungen<sup>1)</sup> folgende Identitäten zwischen unendlichen Summen und den entsprechenden unendlichen Integralen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{4m+1}}{e^{2\pi k} - 1} = \int_0^{\infty} \frac{x^{4m+1}}{e^{2\pi x} - 1} dx. \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

Man gebe einen direkten Beweis.

E. TROST, Zürich.

<sup>1)</sup> B. VAN DER POL, *On a non-linear partial differential equation satisfied by the logarithm of the Jacobian thetafunctions, with arithmetical applications*, Indagationes math. 13, 276 (1951).