

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 8 (1953)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Die Anwendung der Riemannschen Zahlenkugel zur Herleitung der sphärisch-trigonometrischen Hauptsätze  
**Autor:** Herzog, E.R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16915>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 30.11.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

valent, dass  $F(x, y, z) = 0$  in die Gestalt (4) übergeführt werden kann, das heisst, es gibt drei Funktionen  $f_1(x)$ ,  $f_2(y)$  und  $f_3(z)$  mit der Eigenschaft, dass ihre Summe in jedem Punkte eines Gebietes  $\mathfrak{G}$  verschwindet. Da sämtliche Netztafeln für ein und dieselbe Funktion topologisch äquivalent sind, werden wir im folgenden eine Funktion mit einer Sechsecknetztafel als *Sechseckfunktion* bezeichnen.

Der Beweis des Satzes von BLASCHKE und THOMSEN beruht im wesentlichen auf der Konstruktion von drei Funktionen  $f_1(x)$ ,  $f_2(y)$ ,  $f_3(z)$  mit in jedem Punkte verschwindender Summe; dies ist gleichbedeutend mit einer Umnummerierung der Kurven jeder Schar. Lässt sich nämlich  $F(x, y, z) = 0$  auf die Gestalt (4) transformieren, so liefert die Abbildung

$$\xi = f_1(x); \quad \eta = f_2(y)$$

die Überführung des Trägernetzes in ein Parallelnetz.

Die Konfiguration  $S$  (oder  $S'$ ) ist die geometrische Kennzeichnung der Sechseckfunktionen. Für die praktischen Anwendungen ist jedoch eine analytische Form der Parallelisierbarkeitsbedingung kräftiger. Um diese zu finden, haben wir analytisch die Bedingung dafür zu formulieren, dass eine vorgelegte Funktion  $F(x, y, z) = 0$  auf die Gestalt (4) gebracht werden kann. Dies führt auf die sogenannte Differentialgleichung von DE SAINT-ROBERT; die Sechseckfunktionen  $F(x, y, z) = 0$  sind gekennzeichnet durch

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \left( \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \right) = 0 \quad ^1). \quad (5)$$

(Fortsetzung im nächsten Heft)

M. JEGER, Olten und Zürich

## Die Anwendung der Riemannschen Zahlenkugel zur Herleitung der sphärisch-trigonometrischen Hauptsätze

Es ist eine wohlbekannte Tatsache, dass in den meisten Darstellungen der sphärischen Trigonometrie den sogenannten Eulerschen Dreiecken eine Vorzugsstellung eingeräumt wird, indem die Beweise der grundlegenden Sätze unter der ausdrücklichen oder stillschweigenden Annahme geführt werden, es seien sämtliche Seiten und Winkel des Dreiecks kleiner als zwei Rechte. Die Verifikation der Formeln für andere als Eulersche Dreiecke führt dann zu einer mühsamen Fallunterscheidung, die die Darstellung unnötigerweise belastet, falls sie nicht kurzerhand dem Leser aufgebürdet wird. Man kann zwar die Anzahl der zu betrachtenden Fälle etwas vermindern, indem man den Beweis auf die Formeln für die Drehung eines rechtwinkligen Koordinatensystems stützt oder von den Richtungskosinus von drei Richtungen ausgeht, muss aber dann eine Einbusse an Anschaulichkeit dafür in Kauf nehmen.

<sup>1)</sup> Für die an und für sich elementare Herleitung von (5) siehe bei P. DE SAINT-ROBERT, *De la résolution de certaines équations à trois variables*, Mem. reale Accad. Torino 25, 53 (1871), oder H. SCHWERDT, *Lehrbuch der Nomographie* (Springer, Berlin 1924), S. 136.

Es dürfte daher allgemein interessieren, dass sich die Hauptsätze der sphärischen Trigonometrie mittels der Theorie der Kugeldrehungen auf der Riemannschen Zahlenkugel in voller Allgemeinheit und für beliebige, auch mehrfach überschlagene Dreiecke herleiten lassen, ohne dass dabei ein Nachteil der soeben geschilderten Art auftreten würde. Die funktionentheoretischen Hilfsmittel, die zu dieser Herleitung benötigt werden, sind recht bescheiden und beschränken sich im wesentlichen auf die folgenden zwei Punkte:

1. Die Riemannsche Zahlenkugel entsteht durch eine stereographische Projektion aus einer in ihrer Äquatorebene liegenden Gaußschen Zahlenebene, wobei der Nordpol als Projektionszentrum und der Äquator als Einheitskreis dienen. Demjenigen Punkt der Kugel, der durch die Poldistanz  $\vartheta$  und die Länge  $\psi$  definiert ist, wird durch diese Projektion die komplexe Zahl

$$z = \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} e^{i\psi} \quad (1)$$

zugeordnet, wobei es für den vorliegenden Zweck besonders wichtig ist, dass die Poldistanz  $\vartheta$  durchaus nicht auf Winkel beschränkt zu sein braucht, die kleiner als zwei Rechte sind.

2. Die linearen gebrochenen Funktionen

$$w = f(z) \equiv \frac{a z + b}{c z + d}$$

vermitteln Abbildungen der  $z$ -Kugel auf die  $w$ -Kugel, die sowohl kreis- als auch winkeltreu sind. Insbesondere haben Funktionen von der Form

$$w = f(z) \equiv e^{i\varphi} \frac{z + \bar{p}}{\bar{p} z - 1} \quad (2)$$

die Eigenschaft, diametrale Punkte der einen Kugel in ebensolche der andern überzuführen, und liefern daher eine kongruente Abbildung der  $z$ -Kugel auf die  $w$ -Kugel, das heisst eine Kugeldrehung. Dabei bedeutet  $\bar{p}$  die zu  $p$  konjugierte komplexe Zahl.

Sobald man nun den eben skizzierten Tatbestand, dessen Beweis in den meisten Lehrbüchern der Funktionentheorie und der konformen Abbildung nachgelesen werden kann, als bekannt voraussetzen darf, ist man in der Lage, auf den eigentlichen Beweis der trigonometrischen Hauptsätze einzutreten. Bevor dies aber hier getan wird, soll eine genaue Definition dessen gegeben werden, was unter einem allgemeinen sphärischen Dreieck verstanden werden soll<sup>1)</sup>.

Es seien  $A, B, C$  drei beliebige Punkte auf der Kugel, die nicht alle drei auf dem gleichen Grosskreis liegen sollen. Dann bestimmen je zwei der drei Punkte einen Grosskreis, der durch die beiden Punkte in zwei ungleiche Bögen zerlegt wird. *Von diesen beiden Bögen wird nach Belieben einer ausgewählt und als die dem dritten Eckpunkt gegenüberliegende Seite des Dreiecks  $ABC$  bezeichnet.* Sind dann die Seiten auf diese Weise bestimmt, so gebe man dem Dreieck einen als positiv zu bezeichnenden

<sup>1)</sup> Der hier entwickelte Dreiecksbegriff deckt sich im wesentlichen mit demjenigen von MOEBIUS. Die Definition der Winkel ist jedoch so gefasst, dass sie bei Eulerschen Dreiecken die Innenwinkel charakterisiert und nicht, wie bei MOEBIUS, die Aussenwinkel. (Vgl. WEBER-WELLSTEIN, *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, Bd. II, S. 346 f., § 38.)

Umlaufsinn, etwa durch die Forderung, es seien die Seiten in der Weise zu durchlaufen, dass die Ecken in der natürlichen Anordnung  $A-B-C$  aufeinanderfolgen. Durch die Seiten des Dreiecks sind dann in jeder Ecke zwei Richtungen festgelegt: eine primäre, die dem positiven Umlaufsinn entspricht, und eine sekundäre, die demselben entgegengesetzt ist. *Als Winkel des sphärischen Dreiecks sollen diejenigen Winkel bezeichnet werden, um die man die primären Richtungen jeder Ecke im positiven Sinne drehen muss, um sie mit der sekundären Richtung der betreffenden Ecke zur Deckung zu bringen.* Auf Grund dieser Definition gibt es zu je drei Eckpunkten  $A, B, C$  nicht nur ein sphärisches Dreieck, sondern insgesamt 16, je nachdem, welche Bögen als Seiten gewählt werden und welcher Umlaufsinn als positiv angenommen wird. Unter diesen Dreiecken befindet sich stets auch ein Eulersches Dreieck, also ein solches, dessen Seiten und Winkel sämtlich kleiner als zwei Rechte sind.

Es sei nun  $ABC$  ein nach diesen Vorschriften aufgebautes Dreieck, dessen Seiten und Winkel in der üblichen Weise mit  $a, b, c$  bzw.  $\alpha, \beta, \gamma$  bezeichnet werden mögen. Dieses Dreieck werde auf eine Riemannsche Zahlenkugel gelegt, so dass die Ecke  $A$  auf den Nordpol und die von  $A$  ausgehende primäre Richtung (also die Seite  $c$  oder, falls diese grösser als zwei Rechte sein sollte, der an  $A$  angrenzende Teil von  $c$ ) auf die positive reelle Achse fällt. Dann werden den drei Ecken gemäss (1) die folgenden komplexen Zahlen zugeordnet:

$$z_A = \infty, \quad z_B = \operatorname{ctg} \frac{c}{2}, \quad z_C = \operatorname{ctg} \frac{b}{2} e^{i\alpha}.$$

Das Dreieck  $ABC$  soll ferner auf eine zweite Riemannsche Zahlenkugel gelegt werden, und zwar mit der Ecke  $B$  im Nordpol und der von  $B$  ausgehenden primären Richtung (also der Seite  $a$ ) auf der positiven reellen Achse. Dann entsprechen den drei Ecken die komplexen Zahlen

$$w_A = \operatorname{ctg} \frac{c}{2} e^{i\beta}, \quad w_B = \infty, \quad w_C = \operatorname{ctg} \frac{a}{2}.$$

Nun erfüllt aber die lineare Funktion

$$w = f(z) \equiv e^{i\beta} \frac{z + \operatorname{tg} \frac{c}{2}}{z \operatorname{tg} \frac{c}{2} - 1}$$

die Relationen

$$w_A = f(z_A), \quad w_B = f(z_B).$$

Sie hat daher die Eigenschaft, die Ecken  $A$  und  $B$  des Dreiecks aus ihrer Lage auf der  $z$ -Kugel in ihre Lage auf der  $w$ -Kugel überzuführen. Da sie aber vom Typus (2) ist und demnach eine kongruente Abbildung der beiden Kugeln vermittelt, so tut sie dasselbe auch mit dem Punkte  $C$ . Somit gilt auch die Relation

$$w_C = f(z_C),$$

die nach leichter Umformung und unter Verwendung der Abkürzungen

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = P, \quad \operatorname{tg} \frac{b}{2} = Q, \quad \operatorname{tg} \frac{c}{2} = R \quad (3)$$

explizite lautet:

$$e^{i\beta} P = \frac{e^{i\alpha} R - Q}{e^{i\alpha} + Q R}. \quad (4)$$

Dies ist nun die Fundamentalgleichung der sphärischen Trigonometrie, aus der sich sämtliche Hauptsätze durch rein algebraische Umformung gewinnen lassen. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$1 + Q^2 R^2 + 2 Q R \cos \alpha = S$$

und multipliziert (4) mit der dazu konjugierten Gleichung, so erhält man unmittelbar

$$\begin{aligned} S P^2 &= Q^2 + R^2 - 2 Q R \cos \alpha, \\ S(1 + P^2) &= (1 + Q^2)(1 + R^2), \\ S(1 - P^2) &= (1 - Q^2)(1 - R^2) + 4 Q R \cos \alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Andererseits ergibt sich aus (4) durch Trennung von Real- und Imaginärteil sofort

$$\begin{aligned} S P \cos \beta &= R(1 - Q^2) - Q(1 - R^2) \cos \alpha, \\ S P \sin \beta &= Q(1 + R^2) \sin \alpha. \end{aligned}$$

Die letzten drei Gleichungen, durch (5) dividiert, liefern aber weiter

$$\begin{aligned} \frac{1 - P^2}{1 + P^2} &= \frac{1 - Q^2}{1 + Q^2} \cdot \frac{1 - R^2}{1 + R^2} + \frac{2 Q}{1 + Q^2} \cdot \frac{2 R}{1 + R^2} \cos \alpha, \\ \frac{2 P}{1 + P^2} \cos \beta &= \frac{2 R}{1 + R^2} \cdot \frac{1 - Q^2}{1 + Q^2} - \frac{2 Q}{1 + Q^2} \cdot \frac{1 - R^2}{1 + R^2} \cos \alpha, \\ \frac{2 P}{1 + P^2} \sin \beta &= \frac{2 Q}{1 + Q^2} \sin \alpha, \end{aligned}$$

und dies ist zufolge (3) und der Identitäten

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos 2 x, \quad \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2 x$$

dasselbe wie

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha, \quad (6)$$

$$\sin a \cos \beta = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos \alpha, \quad (7)$$

$$\sin a \sin \beta = \sin b \sin \alpha, \quad (8)$$

womit die ersten drei Hauptsätze bewiesen sind. Selbstverständlich gelten damit auch noch die Formeln, die sich daraus durch zyklische Vertauschung ergeben. Allerdings liefert (7) dabei nur noch zwei neue Relationen, während doch insgesamt sechs erwartet werden sollten. Die fehlenden drei, die sich durch die gleichzeitige Vertauschung zweier Seiten und der diesen gegenüberliegenden Winkel daraus ergeben,

werden durch den obigen Beweis nicht unmittelbar erfasst, weil durch die genannte Vertauschung der Umlaufsinn des Dreiecks und damit auch die Winkel geändert werden. Sie können indes sehr leicht aus den übrigen durch Rechnung gefunden werden. Multipliziert man nämlich (6) mit  $\sin c$  und (7) mit  $\cos c$  und subtrahiert, so erhält man mit

$$\sin b \cos \alpha = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta$$

eine der drei Formeln, woraus sich die beiden andern durch zyklische Vertauschung ergeben.

In derselben Weise lassen sich auch die zu (6) und (7) polaren Formeln herleiten. Dividiert man zum Beispiel (7) durch (8) und multipliziert dann mit  $\sin \alpha$ , so erhält man den Kotangentensatz

$$\sin \alpha \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} b \sin c - \cos c \cos \alpha \quad (9)$$

nebst den fünf analogen Relationen. Durch Auflösung von (9) nach  $\operatorname{ctg} b$  und Multiplikation des Resultats mit der zu (8) gehörigen Gleichung

$$\sin b \sin \gamma = \sin c \sin \beta$$

ergibt sich ferner mit

$$\sin \gamma \cos b = \cos \beta \sin \alpha + \sin \beta \cos \alpha \cos c \quad (10)$$

eine der sechs zu (7) polaren Beziehungen. Ersetzt man endlich in der zu (10) gehörigen Relation

$$\cos \gamma \sin \alpha = \sin \beta \cos c - \sin \gamma \cos \alpha \cos b$$

$\sin \gamma \cos b$  durch (10), so erhält man nach Division durch  $\sin \alpha$  unmittelbar

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c, \quad (11)$$

also den zu (6) polaren Winkel-Kosinus-Satz. Damit sind aber sämtliche Hauptsätze bewiesen.

E. R. HERZOG, Riehen bei Basel.

## Kleine Mitteilungen

### Der Rückwärtseinschnitt mit reziproken Distanzen

Beim Rückwärtseinschnitt handelt es sich um die Vermessungsaufgabe, aus der bekannten Lage von drei Fernpunkten  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  den eigenen Standort, den Neupunkt  $N$ , zu bestimmen, wenn man bei Unkenntnis der Nordrichtung nur die Richtungsunterschiede  $\alpha$  und  $\beta$  zwischen je zwei Fernpunkten messen kann (Snellius-Pothenotsche Aufgabe<sup>1</sup>). Der Neupunkt wird als Schnitt zweier Kreise gefunden, die durch je zwei Fernpunkte gehen und die entsprechenden Richtungsunterschiede  $\alpha$  bzw.  $\beta$  als Peripheriewinkel besitzen. Liegt der Neupunkt auf dem durch die Fernpunkte gehenden

<sup>1</sup>) Siehe zum Beispiel E. LEUTENEGGER, *Leitfaden der ebenen Trigonometrie*, 3. Auflage (Orell-Füssli-Verlag, Zürich 1952), S. 121.