

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1953)
Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 12.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Aufgaben

Aufgabe 140. On considère l'ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, rapportée à ses axes de symétrie, et le cercle concentrique C de rayon $a+b$. Montrer que les cercles de CHASLES qui ont leurs centres sur C et qui sont tangents extérieurement à l'ellipse sont enveloppés par une courbe du sixième degré dont on demande l'équation. (Voir problème n° 50, El. Math. 4, n° 4, 91 [1949]).

A. LOEFFLER, Rolle.

Lösung: Man kann einen allgemeineren Satz beweisen. Eine Hypotrochoide c_h und eine Epitrochoide c_e mögen denselben festen Polkreis C (Radius R), kongruente Rollkreise (Radius r) und gleiche Rollgeschwindigkeiten besitzen. Die beschreibenden Punkte P_h und P_e sollen in der Anfangslage ($t=0$) symmetrisch zur gemeinsamen Poltangente beider Rollungen liegen (in der Entfernung c vom Mittelpunkt ihres Rollkreises). Dann liegen P_h und P_e in jedem Zeitpunkt symmetrisch zur zugehörigen gemeinsamen Poltangente, denn die abgerollten Bögen beider Rollkreise sind kongruent. Der Kreis k mit dem Mittelpunkt in einem gemeinsamen Momentanzentrum, der c_h im zugehörigen Punkt P_h berührt, berührt daher auch c_e im «gleichzeitigen» Punkt P_e . *Die Hüllkurve der Kreise k besteht daher aus c_h und c_e .*

Nun sei speziell

$$R = a + b, \quad r = \frac{1}{2} (a + b) \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{2} (a - b).$$

Der Mittelpunkt von C sei Ursprung, P_h liege für $t=0$ auf der x -Achse. Dann ist c_h die Ellipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Die gesuchte Kurve c_e ist die von P_e (Anfangslage $x = a + 2b$, $y = 0$) beschriebene Epitrochoide

$$x = \frac{3}{2} (a + b) \cos t - \frac{1}{2} (a - b) \cos 3t, \quad y = \frac{3}{2} (a + b) \sin t - \frac{1}{2} (a - b) \sin 3t. \quad (1)$$

Drückt man $\cos t$ und $\sin t$ durch $x^2 + y^2$ aus und setzt dies in die erste oder zweite Gleichung (1) ein, so folgt die Kurvengleichung

$$\underline{4(x^2 + y^2 - a^2 - ab - b^2)^3 - 27(a + b)^2(b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2) = 0}.$$

c_e hat mit den Ellipsenachsen die reellen Punkte $[\pm(a + 2b), 0]$ und $[0, \pm(2a + b)]$ gemein und besitzt die (zwischen den Brennpunkten gelegenen) isolierten Punkte

$$\left(\pm \sqrt{\frac{1}{2}(2a^2 - ab - b^2)}, 0 \right)$$

und die konjugiert komplexen Doppelpunkte

$$\left(0, \pm \sqrt{\frac{1}{2}(2b^2 - ab - a^2)} \right).$$

c_e ist trizirkular, in jedem absoluten Kreispunkt berührt c_e die Ferngerade und besitzt dort eine Spurze, deren Tangente durch den Ellipsenmittelpunkt geht.

Die Berechnung von \dot{x} und \dot{y} zeigt, dass c_e Doppeltangenten $x = \pm a\sqrt{2a/(a-b)}$ besitzt; die Berührungsstelle mit

$$\tan t = \pm \sqrt{\frac{a-2b}{a}} \quad \text{und} \quad y = \pm (a+b) \sqrt{\frac{a-2b}{2(a-b)}}$$

sind reell und getrennt für $a > 2b$. Sie rücken für $a = 2b$ zu je einem Flachpunkt $(\pm 2a, 0)$ zusammen. Ausserdem sind die Geraden $y = \pm b\sqrt{2b/(b-a)}$ konjugiert

komplexe Doppeltangenten, ihre Berührungspunkte haben reelles

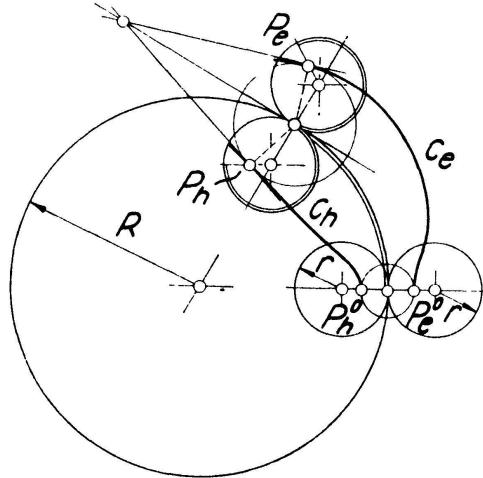
$$x = \pm (a + b) \sqrt{\frac{2a - b}{2(a - b)}}.$$

Durchläuft P_h die Ellipse c_h , so durchläuft P_e die Epitrochoide c_e mit der dreifachen Geschwindigkeit des Punktes P_h .

Im Fall $a > 2b$ besitzt c_e reelle Wendepunkte mit

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} t &= \pm \sqrt{\frac{b(a - 2b)}{a(2a - b)}}, & x &= \pm \frac{a(a + 4b)}{a + b} \sqrt{\frac{a(2a - b)}{2(a^2 - b^2)}}, \\ \frac{dy}{dx} &= \pm \sqrt{\frac{b}{a} \left(\frac{2a - b}{a - 2b} \right)^3}, & y &= \pm \frac{b(4a + b)}{a + b} \sqrt{\frac{b(a - 2b)}{2(a^2 - b^2)}}. \end{aligned}$$

In den Scheiteln $[\pm(a + 2b), 0]$ hat c_e den Krümmungsradius $3b^2/(2b - a)$, in den Scheiteln $[0, \pm(2a + b)]$ den Krümmungsradius $3a^2/(2a - b)$.



Im allgemeinen Fall bestehen Zusammenhänge zwischen den Geschwindigkeiten v_h und v_e , den Beschleunigungen b_h und b_e und den Krümmungsradien ϱ_h und ϱ_e gleichzeitiger Punkte von c_h und c_e , nämlich

$$\begin{aligned} v_h : v_e &= (R - r) : (R + r), \\ \frac{b_h^2}{(R - r)^3} + \frac{b_e^2}{(R + r)^3} &= 2R \left(\frac{1}{R^2 - r^2} + \frac{c^2}{r^4} \right), \\ \underline{4r^2[(R + r)(R - 2r)\varrho_h + (R - r)(R + 2r)\varrho_e] \varrho_h^2 \varrho_e^2} \\ &= \underline{R(r^2 - c^2)[(R + r)\varrho_h + (R - r)\varrho_e]^3}. \end{aligned}$$

F. HOHENBERG, Graz.

Weitere Lösungen sandten F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg) und R. LAUFFER (Graz).

Aufgabe 141. Trouver la probabilité que dans un jeu français de 40 cartes il y ait au moins une fois une dame et un valet contigus. C. BÖHM, Zurich.

Lösung: Ohne Buben und Damen gibt es 32 Karten. In diese Reihe kann man die vier Buben nach folgenden fünf Schemata einsetzen:

- (a) BBBB, (b) BBB*B, (c) BB*B*B, (d) BB*B*B*B, (e) B*B*B*B,

wo (a) bedeutet, dass alle vier Buben nebeneinander stehen, während sie in (e) vollständig getrennt sind. In (b) stehen drei Buben nebeneinander, und der vierte ist isoliert usw. Man erhält nun sofort folgende verschiedene Anordnungsmöglichkeiten der 36 Karten ohne die Damen:

$$\begin{aligned} \text{für (a)} & 32! \cdot 33 \cdot 4!, \quad \text{für (b)} 32! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 4!, \quad \text{für (c)} 32! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 6 \cdot 2, \\ \text{für (d)} & 32! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 6 \cdot 2, \quad \text{für (e)} 32! \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30. \end{aligned}$$

Die vier Damen sollen nun so eingesetzt werden, dass keine Dame neben einem Buben steht. Für jede der Anordnungen in (a) gibt das $32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35$ Möglichkeiten, denn es sind zuerst 32 Plätze frei, nach dem Einsetzen der ersten Dame 33 Plätze usw. Für die andern Fälle erhält man die Zahlen:

$$(b) \text{ und } (c) 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34, \quad (d) 30 \cdot 31 \cdot 32 \cdot 33, \quad (e) 29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32.$$

Multiplizieren wir die beiden zum selben Buchstaben gehörenden Zahlen und addieren diese fünf Produkte, so erhalten wir die Anzahl N der Anordnungen der 40 Karten, bei denen keine Dame neben einem Buben steht. $w = N/40!$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Dame neben einem Buben steht. Für die in der Aufgabe gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$W = 1 - w = \frac{15\,994\,337}{27\,188\,525} = 0,588\dots$$

F. GOLDNER, London.

Eine weitere Lösung sandte J. BINZ, Biel.

Aufgabe 142. Man beweise für $(n, k) = 1$ die Kongruenz

$$\binom{n-k-1}{k-1} \equiv 0 \pmod{k}$$

R. LAUFFER, Graz.

Lösung: Da in

$$\binom{n-k}{k} = \frac{n-k}{k} \binom{n-k-1}{k-1}$$

die linke Seite ganz ist, muss, wegen $(n, k) = 1$, $\binom{n-k-1}{k-1}$ durch k teilbar sein.

B. MARZETTA, Basel.

Ist $(n, k) = t$, so ist $\binom{n-k-1}{k-1}$ durch k/t teilbar.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER, Hjørring (Dänemark), F. GOLDNER, London, und R. KLÖTZLER, Leipzig.

Aufgabe 143. On a dans un plan deux groupes de cinq points A, B, C, D, E et A', B', C', D', E' . Soit \bar{E} le point qui correspond à E' dans la collinéation déterminée par les quatre paires de points AA', BB', CC', DD' ; on aurait quatre autres points $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$, d'une façon analogue. Démontrer que les cinq droites $A\bar{A}, B\bar{B}, C\bar{C}, D\bar{D}, E\bar{E}$ se coupent en un point qui est aussi sur les cinq coniques $ABCDE, ABC\bar{D}\bar{E}, AB\bar{C}DE, A\bar{B}CDE, \bar{A}BCDE$.

L. KOLLROS, Zurich.

Solution: La conique $\mathfrak{C}(A'B'C'D'E')$ est transformée par la collinéation (AA', BB', CC', DD') dans la conique $\mathfrak{C}_1(ABCDE)$ et par la collinéation (AA', BB', CC', EE') dans la conique $\mathfrak{C}_2(ABC\bar{D}\bar{E})$. Les ponctuelles $(A'B'C'D'E')$ sur \mathfrak{C} , $(ABCDE)$ sur \mathfrak{C}_1 , $(ABC\bar{D}\bar{E})$ sur \mathfrak{C}_2 sont projectives. Soit O le quatrième point d'intersection de \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 . Les faisceaux $O(ABC\bar{D}\bar{E})$ et $O(ABC\bar{D}\bar{E})$ étant projectifs, les points O, D, \bar{D} et O, E, \bar{E} sont alignés. Le point O étant déterminé par la droite $E\bar{E}$ et la conique \mathfrak{C}_1 , donc indépendamment de la collinéation (AA', BB', CC', EE') , on en déduit que non

seulement les coniques \mathfrak{C}_1 et \mathfrak{C}_2 se coupent en O , mais encore les coniques \mathfrak{C}_3 , \mathfrak{C}_4 , \mathfrak{C}_5 définies de façon analogue, ce qui démontre le théorème. J.-P. SYDLER, Zurich.

Herr F. HOHENBERG, Graz, sendet uns folgende Bemerkung:

Es genügt, zu zeigen, dass drei der genannten Geraden, etwa $A\bar{A}$, $B\bar{B}$ und $C\bar{C}$, und drei der genannten Kegelschnitte, zum Beispiel $\bar{A}BCDE$, $A\bar{B}CDE$ und $AB\bar{C}DE$ durch einen Punkt gehen. Durch eine auf $A'B'C'D'E'$ ausgeübte Kollineation lässt sich erreichen, dass E' mit E und F' mit F identisch wird. Verlegt man dann E und F durch eine weitere Kollineation in die absoluten Kreispunkte, so sind alle in der Aufgabe genannten Kollineationen gleichsinnige Ähnlichkeiten, und es ist nun zu beweisen:

Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks drei untereinander gleichsinnig ähnliche Dreiecke $\bar{A}BC$, $A\bar{B}C$ und ABC , so schneiden sich die Geraden $A\bar{A}$, $B\bar{B}$ und $C\bar{C}$ in einem Punkt, durch den auch die Umkreise der Dreiecke $\bar{A}BC$, $A\bar{B}C$ und ABC gehen.

Das ist aber eine von NEUBERG gefundene und von ihm nach TORRICELLI benannte Figur (siehe zum Beispiel *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. III AB 10 [Teubner, Leipzig 1914], S. 1216). Die Aufgabe spricht die projektive Fassung des Neubergschen Satzes aus. Auch der elementare Neubergsche Beweis lässt sich projektiv formulieren.

Eine weitere Lösung sandte R. LAUFLER, Graz.

Neue Aufgaben

172. Eine beliebige multiplikative Gruppe \mathfrak{G} werde (wie bei einem Körper, aber allgemeiner) durch ein einziges neues Element O erweitert. Auf wie viele Weisen kann man die Multiplikation von O mit sich und den Elementen von \mathfrak{G} definieren, so dass das assoziative Gesetz bestehen bleibt? Wann ist das erweiterte System wieder eine Gruppe? A. SPEISER, Basel, und A. BAGER, Hjørring (Dänemark).
173. Von EULER stammt das Problem der Bestimmung von Funktionen, die sich selber als Periode haben, das heisst der Funktionalgleichung

$$f[x + f(x)] = f(x)$$

genügen. Man gebe die allgemeine Lösung an. A. SPEISER, Basel.

174. Man zeige: Ein von sechs berührend aneinanderschliessenden, 60gradigen Kreisbögen berandetes Mittelpunktsoval hat die Eigenschaft, in einem festen gleichseitigen Dreieck zwangsläufig umwendbar zu sein, das heisst eine kontinuierliche und geschlossene Bewegung zu gestatten, während welcher es ständig alle drei Seiten berührt. W. WUNDERLICH, Wien.
175. Man beweise: Liegen die Punkte A , B , C und D auf einem Kreis und ist O ein beliebiger Punkt der Kreisebene, dann ist

$$\overline{OA}^2 \cdot Fl(BCD) - \overline{OB}^2 \cdot Fl(ACD) + \overline{OC}^2 \cdot Fl(ABD) - \overline{OD}^2 \cdot Fl(ABC) = 0.$$

R. LAUFLER, Graz.

176. Man beweise: $\binom{n^k - 1}{n}$ ist zu n teilerfremd, wenn k so gross ist, dass die k -te Potenz des kleinsten Primfaktors von n grösser ist als n (n und k natürliche Zahlen). ————— A. STOLL, Zürich.

Bericht

Fortbildungskurs des Vereins Schweizerischer Gymnasiallehrer in Luzern

5. bis 11. Oktober 1952

Für den Physiker war es erfreulich, gleich an der Spitze des Vortragsprogramms ein physikalisches Thema zu finden: In der ersten allgemeinen Sitzung sprach Prof. Dr. G. LEMAITRE (Löwen und Brüssel) über *L'univers tel que le conçoit la physique*