

Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 8 (1953)
Heft: 1

Artikel: Kinematik, Liesche Kreisgeometrie und Geraden-Kugel-Transformation
Autor: Strubecker, Karl
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16913>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

On appelle *hypothèse généralisée du continu* l'hypothèse que, E étant un ensemble infini quelconque et S l'ensemble de tous les sous-ensembles de E , tout sous-ensemble de S qui contient un sous-ensemble de même puissance que E et qui n'est pas lui-même de même puissance que E , est de même puissance que S .

L'hypothèse du continu est un cas particulier de cette hypothèse du continu généralisée, notamment lorsque E est l'ensemble de tous les nombres naturels.

M. K. GÖDEL a démontré¹⁾ que l'hypothèse généralisée du continu est non contradictoire avec les axiomes généralement admis de la théorie des ensembles, si ces axiomes ne sont pas contradictoires.

Une des conséquences de l'hypothèse généralisée du continu est l'axiome du choix²⁾.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

Kinematik, Liesche Kreisgeometrie und Geraden-Kugel-Transformation³⁾

I. Ebene Kinematik

Man kann nach E. STUDY⁴⁾ die Bewegungen (Drehungen, Parallelverschiebungen) der Ebene durch vier homogene Parameter $\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$ mit bilinearer Zusammensetzung darstellen.

Ist (x_m, y_m) der Drehungsmittelpunkt und ω der Drehwinkel dieser Drehung (Figur 1), so gilt für diese Studyschen Parameter

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = -\operatorname{ctg} \frac{\omega}{2} : x_m : y_m : 1.$$

$\alpha_3 = 0$ liefert (Figur 2) Parallelverschiebungen um den Vektor $(-2 \alpha_2/\alpha_0, 2 \alpha_1/\alpha_0)$ der Länge Ω . Die Bewegungsformeln lauten dann in homogenen kartesischen Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$:

$$\begin{aligned} (\alpha_0^2 + \alpha_3^2) x'_1 &= (\alpha_0^2 - \alpha_3^2) x_1 + 2 \alpha_0 \alpha_3 x_2 + 2 (\alpha_1 \alpha_3 - \alpha_0 \alpha_2) x_3, \\ (\alpha_0^2 + \alpha_3^2) x'_2 &= -2 \alpha_0 \alpha_3 x_1 + (\alpha_0^2 - \alpha_3^2) x_2 + 2 (\alpha_0 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3) x_3, \\ (\alpha_0^2 + \alpha_3^2) x'_3 &= (\alpha_0^2 + \alpha_3^2) x_3, \end{aligned}$$

und die bilinearen Zusammensetzungsformeln sind

$$\begin{aligned} \alpha''_0 &= \alpha_0 \alpha'_0 & * & & * & & - \alpha_3 \alpha'_3, & \alpha''_2 &= \alpha_0 \alpha'_2 + \alpha_2 \alpha'_0 + \alpha_3 \alpha'_1 - \alpha_1 \alpha'_3, \\ \alpha''_1 &= \alpha_0 \alpha'_1 + \alpha_1 \alpha'_0 + \alpha_2 \alpha'_3 - \alpha_3 \alpha'_2, & \alpha''_3 &= \alpha_0 \alpha'_3 + \alpha_3 \alpha'_0 & * & & * & \end{aligned}$$

¹⁾ K. GÖDEL, Proc. nat. Acad. Sci. 24, 556–557 (1938); *The consistency of the axiom of choice and of generalized continuum hypothesis with the axioms of the set theory*, Ann. math. Studies N° 3 (Princeton 1940).

²⁾ Cette proposition a été énoncée sans démonstration en 1926 par A. LINDENBAUM et A. TARSKI dans leur *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles*, C. r. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III, 19, 314 (1926), th. 94. Pour la démonstration voir W. SIERPIŃSKI, Fund. Math. 34, 1–5 (1947).

³⁾ Vortrag, gehalten am 19. September 1951 auf der Tagung der DMV. in Berlin.

⁴⁾ EDUARD STUDY, a) *Über Systeme komplexer Zahlen und ihre Anwendung in der Theorie der Transformationsgruppen*, Mh. Math. Phys. 1, 283–355 (1890); b) *Von den Bewegungen und Umlegungen*, Math. Ann. 39, 441–566 (1891).

Man kann diese Formeln nach STUDY besonders elegant schreiben, wenn man sich eines Systems von höheren komplexen Zahlen bedient der Form

$$\alpha = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

bzw.
$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

das ein Grenzfall der Hamiltonschen Quaternionen ist und als System der Studyschen Quaternionen bezeichnet werden soll, für dessen vier Einheiten e_0, e_1, e_2, e_3 die folgende Produkttafel gilt:

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	0	0	$-e_2$
e_2	e_2	0	0	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-e_0$

Dann lautet die Produktformel einfach

$$\alpha'' = \alpha \alpha',$$

und die Bewegungsformel selbst

$$x' = \alpha^{-1} x \alpha,$$

wobei
$$\alpha^{-1} = \frac{\alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3}{\alpha_0^2 + \alpha_3^2} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha \bar{\alpha}} = \frac{\bar{\alpha}}{N(\alpha)}$$

die reziproke Quaternion zu α ist.

$N(\alpha) = \alpha_0^2 + \alpha_3^2 = 0$ kennzeichnet die singulären Bewegungen.

II. Kinematische Abbildung des Geradenraumes und quasielliptische Geometrie

Deutet man die vier homogenen Parameter α_i als homogene kartesische Punktkoordinaten im Raum, indem man setzt

$$\alpha_0 : \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = z : x : y : 1,$$

so dass also α_0 der (lotrechten) z -Richtung entspricht und $\alpha_3 = 0$ die Fernebene darstellt, so wird jeder ebenen Bewegung α im Raum ein Bildpunkt $A(\alpha)$ zugeordnet. Der Raum wird in der Lieschen Ausdrucksweise zum *Parameterraum* der ebenen Bewegungen.

W. BLASCHKE¹⁾ und J. GRÜNWARD²⁾ haben 1911 diese Abbildung der ebenen Bewegungen auf Raumpunkte, die später E. MÜLLER und E. KRUPPA³⁾ als *kinematische Abbildung* bezeichnet haben, durch eine einfache *geometrische Konstruktion* verwirklicht.

¹⁾ WILHELM BLASCHKE, *Euklidische Kinematik und Nichteuklidische Geometrie*, I und II, Z. Math. Phys. 60, 61–91, 203–204 (1911). Vgl. dazu die kurze Darstellung von W. BLASCHKE in: F. KLEIN, *Vorlesungen über höhere Geometrie* (Springer, Berlin 1926), § 81, und die ausführliche Darstellung in dem Büchlein von W. BLASCHKE, *Ebene Kinematik*, Hamburger math. Einzelschriften, 25. Heft (Leipzig und Berlin 1938).

²⁾ JOSEF GRÜNWARD, *Ein Abbildungsprinzip, welches die ebene Geometrie und Kinematik mit der räumlichen Geometrie verknüpft*, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturw. Kl., Abt. IIa, 120, 677–741 (1911).

³⁾ EMIL MÜLLER, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*, 1. Band: *Die linearen Abbildungen*, bearbeitet von ERWIN KRUPPA (Deuticke, Leipzig und Berlin 1923).

Legt man nämlich (Figuren 3 und 4) durch den Bildpunkt $A(\alpha)$ im Raume die ∞^2 Geraden g des Bündels und schneidet man sie mit den Ebenen $z = -1$ und $z = +1$ in Punkten G_- und G_+ , sucht man ferner deren Grundrisse G'_-, G'_+ auf die Ebene $\pi(z = 0)$ auf und schwenkt man diese Punkte G'_-, G'_+ um ihren Mittelpunkt G um $+\pi/2$, so erhält man als «kinematische Bilder» der Geraden g zwei Punkte G_l und G_r , die sich genau in der Bewegung α entsprechen, deren Bildpunkt $A(\alpha)$ war.

Es ist gelegentlich zweckmässig, die Ebene π , aufgefasst als Ort der linken Bildpunkte G_l und als Ort der rechten Bildpunkte G_r , in *zwei Blätter* getrennt zu denken und von der Ebene π_l der linken und von der Ebene π_r der rechten Bildpunkte zu sprechen.

Es folgt, dass die linken und die rechten Bilder zweier sich in $A(\alpha)$ schneidenden Geraden g, h gleiche Entfernungen haben:

$$\overline{G_l H_l} = \overline{G_r H_r}.$$

Ein Strahlbüschel hat als kinematische Bilder zwei kongruente gerade Punkt-reihen, ein *Punkt* (Strahlbündel) eine *Bewegung*, eine *Ebene* (Strahlenfeld) eine *Umlegung* $G_l \rightarrow G_r$. Das Bild eines eigentlichen Punkts $A(\alpha_3 \neq 0)$ ist eine Drehung, das Bild eines Fernpunkts ($\alpha_3 = 0$) eine Parallelverschiebung. Der Fernpunkt O der lot-rechten α_0 -Achse hat als Bild die identische Bewegung $G_l \equiv G_r$.

Den singulären Bewegungen $\alpha_0^2 + \alpha_3^2 = 0$, das heisst $\alpha_0 \pm i \alpha_3 = 0$ entsprechen (Figur 5) die Punkte eines konjugiert komplexen Paares ι^+, ι^- von Ebenen: $z = \pm i$, den singulären Umlegungen ebenso Ebenen durch die absoluten Punkte J^+, J^- der Ferngeraden s der Bildebene $\pi(z = 0)$, so dass im kinematischen Parameterraum insgesamt ein selbstduales singuläres Gebilde, bestehend aus zwei konjugiert komplexen Ebenen ι^+, ι^- und konjugiert komplexen Punkten J^+, J^- ausgezeichnet ist, das (aufgefasst als Linienort) zwei ausgezeichnete Paare verschränkter Strahlbüschel von «Erzeugenden» trägt, die linken Erzeugenden (J^+, ι^+) , (J^-, ι^-) und die rechten Erzeugenden (J^+, ι^-) , (J^-, ι^+) .

Zeichnet man dieses Gebilde als *absolutes Gebilde* einer projektiven Massbestimmung aus, so erhält der Raum *quasielliptische Struktur*. Es entsteht ein Grenzfall des elliptischen Raumes, der sogenannte *quasielliptische Raum*, dessen Geometrie der des elliptischen Raumes sehr ähnlich ist. Zum Beispiel gibt es auch hier Cliffordsche Parallelen, Cliffordsche Schiebungen usw.

Die Geraden g, h sind zum Beispiel im Cliffordschen Sinne linksparallel, wenn sie denselben linken kinematischen Bildpunkt $G_l = H_l$ haben; sie schneiden dann (Figur 6) das Massgebilde in Punkten desselben linken Erzeugendenpaares.

Analog sind im Cliffordschen Sinne rechtsparallele Geraden erklärt.

Alle untereinander links- bzw. rechtsparallelen Geraden bilden ein Strahlnetz, nämlich ein

Linksnetz

Rechtsnetz

der Darstellung

$$\left\| \begin{array}{ccc} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \rho_{01} + \rho_{23} & \rho_{02} + \rho_{31} & \rho_{03} \end{array} \right\| = 0 \quad \left| \quad \left\| \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \rho_{01} - \rho_{23} & \rho_{02} - \rho_{31} & \rho_{03} \end{array} \right\| = 0, \right.$$

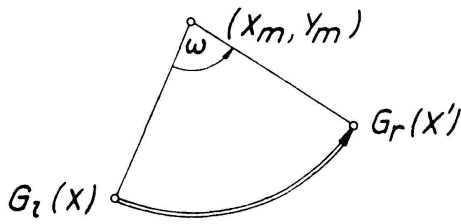


Fig. 1

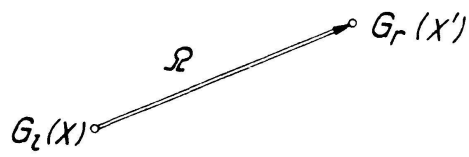


Fig. 2

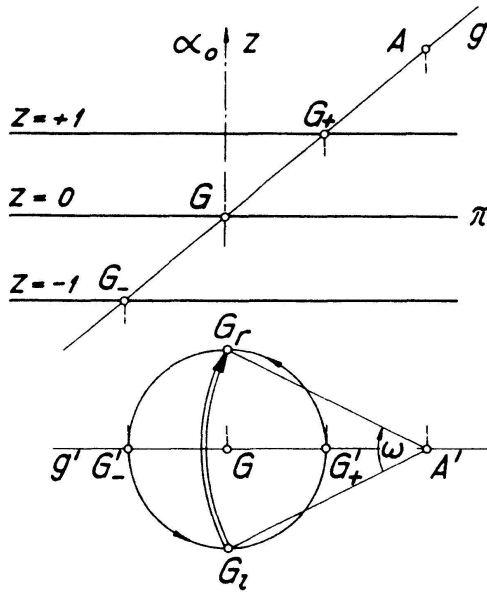


Fig. 3

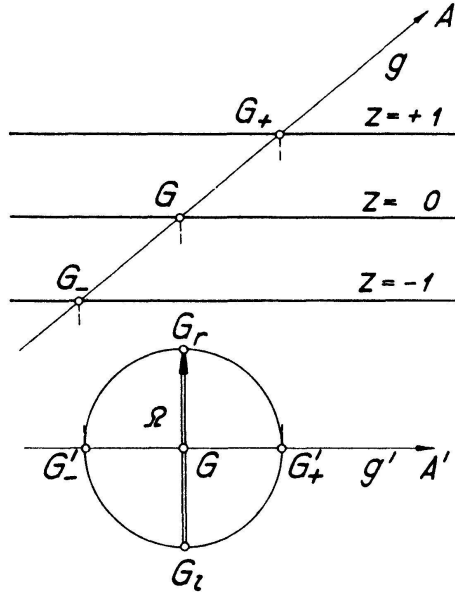


Fig. 4

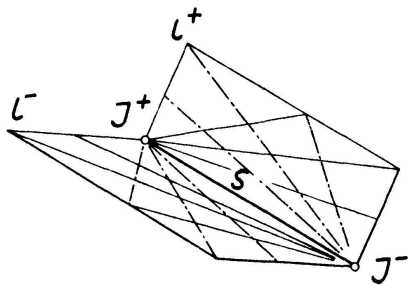


Fig. 5

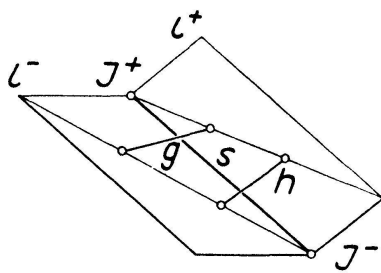


Fig. 6

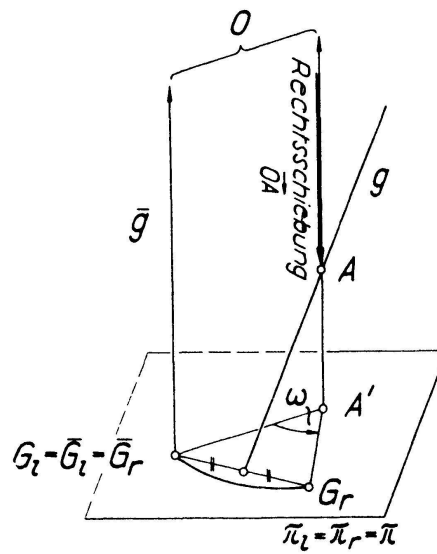


Fig. 7

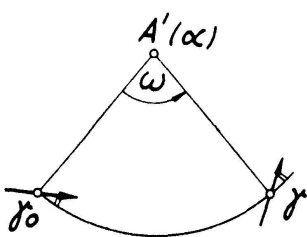


Fig. 8

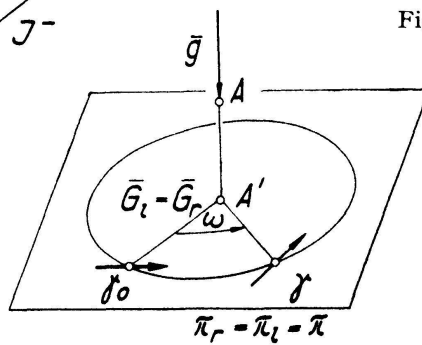


Fig. 9

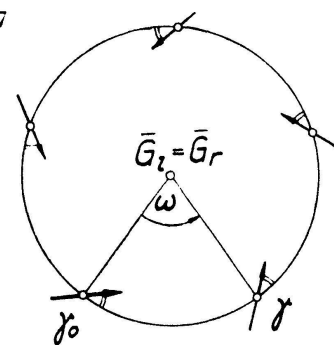


Fig. 10

das im allgemeinen elliptisch, im Falle $\beta_3 = 0$ bzw. $\alpha_3 = 0$ jedoch parabolisch ist und dessen Leitgeraden zwei konjugiert komplexe Erzeugende der

$$\text{Linksschar} \quad | \quad \text{Rechtsschar}$$

des absoluten Gebildes sind, die im parabolischen Falle mit der Ferngeraden s zusammenfallen.

Zu jedem dieser Netze gibt es eine eingliedrige stetige Gruppe von Kollineationen, bei der die Punkte x des Raumes auf den Strahlen des Netzes (also geradlinig!) verschoben werden, und die man daher, weil sie dann notwendig das absolute Gebilde des quasielliptischen Raumes festlassen, als quasielliptische *Cliffordsche Schiebungen* bezeichnet. Genauer spricht man wieder, je nachdem die Bahngeraden der Schiebung links- bzw. rechtsparell sind, von Links- bzw. Rechtsschiebungen.

Fasst man auch im Raume die homogenen Koordinaten x_i zu Studyschen Quaternionen zusammen, indem man setzt

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

und bedeuten

$$\alpha = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

und

$$\beta = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$$

beliebige Studysche Quaternionen, so lauten diese quasielliptischen Cliffordschen

$$\begin{array}{c|c} \text{Linksschiebungen:} & \text{Rechtsschiebungen:} \\ \hline x' = \beta x, & x' = x \alpha. \end{array}$$

Sie bilden kommutative dreigliedrige Gruppen

$$\mathfrak{G}_3^l \quad | \quad \mathfrak{G}_3^r,$$

die zusammen die \mathfrak{G}_6 der quasielliptischen Bewegungen

$$x' = \beta x \alpha$$

ergeben.

Wie äussert sich nun eine solche Cliffordsche Schiebung, ausgeübt auf die Geraden (g) des Raumes, in den (die Ebene π überdeckenden) Ebenen π_l und π_r der linken und rechten kinematischen Bildpunkte (G_l) und (G_r)?

Die Antwort gibt der sogenannte *Fundamentalsatz der kinematischen Abbildung*:

$$\begin{array}{c|c} \text{Bei einer Linksschiebung erfährt das} & \text{Bei einer Rechtsschiebung erfährt das} \\ \text{linke Bildfeld } \pi_l \text{ eine Bewegung, das} & \text{rechte Bildfeld } \pi_r \text{ eine Bewegung, das} \\ \text{rechte } \pi_r \text{ bleibt fest.} & \text{linke } \pi_l \text{ bleibt fest.} \end{array}$$

Anwendung: Das Bündel der lotrechten Geraden \bar{g} durch den Fernpunkt O der x_0 -Achse bildet sich auf identische Bildpaare $\bar{G}_l = \bar{G}_r$ ab (Figur 7). Es folgt:

Bringt man (Figur 7) den Punkt O ($x = e_0$) durch eine Rechtsschiebung (α) nach A ($x' = e_0 \alpha = \alpha$), so kommt \bar{g} nach g , das linke Bildfeld π_l bleibt dabei fest ($G_l = \bar{G}_l$),

das rechte π_r , aber erfährt eine *Bewegung* ($G_r = \overline{G}_r \alpha$), nämlich jene, die zum Punkte $A(\alpha)$ gehört und das Bild der Rechtsschiebung \overrightarrow{OA} ist.

Das kinematische Bild des Punktes A (Drehung, Translation) ist also identisch mit dem Bilde jener Rechtsschiebung, die O nach A bringt.

Der Drehwinkel ω (die Translationsstrecke Ω) ist dabei gleich der doppelten quasielliptischen Schieblänge $2 \overrightarrow{OA}$.

III. Kinematische Abbildung der Geraden auf Turbinen Liesche Kreisgeometrie

Man kann (Figur 8) die *Lagen der Ebene π* kennzeichnen durch die *Lagen eines orientierten Linienelements γ gegen ein vorgegebenes Grundelement γ_0 (Urelement)*. STUDY nennt γ ein «Soma», γ_0 das *Ursoma* («Protosoma»). Jede Bewegung $\alpha (\pi_l \rightarrow \pi_r)$ führt das Grundelement γ_0 (das in π_l liegen soll) in ein orientiertes Linienelement γ (von π_r) über, das umgekehrt (durch seine Lage gegen γ_0) die Bewegung α eindeutig bestimmt, und damit auch eineindeutig auf den Bildpunkt $A(\alpha)$ der Bewegung α abgebildet ist. Diese (nach Wahl von γ_0) umkehrbar eindeutige «kinematische» *Abbildung der orientierten Linienelemente γ auf die Raumpunkte $A(\alpha)$* liegt dem Folgenden zugrunde¹⁾.

Nach dem Fundamentalsatz haben dabei Punktgruppen $(x), (\dot{x})$ des Raumes, die durch eine *Rechtsschiebung α* auseinander entstehen, als Bilder in der Ebene π Figuren von orientierten Linienelementen $(\gamma), (\dot{\gamma})$, die durch *Bewegung* auseinander hervorgehen, und zwar durch jene Bewegung α von π_r gegen π_l , die der Rechtsschiebung α entspricht.

Welche Figuren von orientierten Linienelementen entsprechen in unserer kinematischen Abbildung den Punkten A einer Geraden g?

1. Die Gerade \bar{g} enthalte den Punkt O und sei

a) eine eigentliche, also lotrechte Gerade (Figur 9). Dann ist $\overline{G}_l = \overline{G}_r$, die Punkte A von g bilden sich ab auf die Drehungen von π_r gegen π_l um den festen Punkt $\overline{G}_l = \overline{G}_r = A'$, wobei das orientierte Grundelement γ_0 eine Drehschar von orientierten Linienelementen (γ) beschreibt, eine *Kasnersche Turbine*²⁾ durch γ_0 (Figur 10), wobei der Drehwinkel $\omega = 2 \overrightarrow{OA}$, also gleich der doppelten quasielliptischen Schieb-strecke ist.

b) Wenn die Gerade \bar{g} eine *Ferngerade* durch O ist (Figur 11), so bilden sich ihre Punkte \bar{A} auf *Translationen* einer festen Richtung ab, wobei das orientierte Grundelement γ_0 eine *gerade Turbine* durch γ_0 beschreibt, und die Translationsstrecke

¹⁾ Die Linienelemente γ sind als Repräsentanten der ebenen Bewegungen im Sinne von EDUARD STUDY'S *Geometrie der Dynamen* (Teubner, Leipzig 1903) als (positive) *Somen* zu bezeichnen. Da die kinematische Abbildung analog die Ebenen des quasielliptischen Raumes eineindeutig auf die *Umlagungen* der Ebene π überträgt, die man nach STUDY (nach Wahl des Ursomas γ_0) mit den negativen Somen γ' der Ebene π identifizieren kann, ergibt sich *eine gleichartige Abbildung der negativen Somen von π auf die Ebenen* des quasielliptischen Raumes. Man kann positive und negative Somen nach einem Vorschlag von FRANK LÖBELL durch Linienelemente darstellen, die bloss an ihrem linken (positiven) oder rechten (negativen) Ufer durch einen Halbpfedel orientiert sind, wodurch Figuren entstehen, die LÖBELL als *Rechts-* bzw. *Linkshaken* bezeichnet hat. Wegen der gebotenen Kürze kann auf dieses wichtige Ausgestalten des Gegenstandes jedoch nicht eingegangen werden.

²⁾ EDUARD KASNER, *The Group of Turns and Slides and the Geometry of Turbines*, Amer. J. Math. 33, 193-202 (1911).

$\Omega = 2\overline{OA}$ wieder gleich der doppelten quasielliptischen Schiebstrecke ist. Ist $A' = [\bar{g} s]$ der (unendlich ferne) Schnittpunkt der Geraden \bar{g} mit der Bildebene π , so ist die Translationsrichtung zur Richtung des Fernpunktes A' normal.

2. Ist g eine beliebige Gerade, welche

a) die absolute Gerade s nicht trifft, so kann man sie (Figur 7) durch eine Rechtschiebung in eine ebensolche Gerade \bar{g} durch O verwandeln. Der linke Bildpunkt G_l von g bleibt dabei unverändert ($G_l = \bar{G}_l$), der rechte erleidet eine Bewegung (Drehung) $G_r \rightarrow \bar{G}_r$, die nach dem Fundamentalsatz die Bildfigur der orientierten Linien-elemente von g in die von \bar{g} überführt. Also folgt (Figur 12):

Das Bild einer beliebigen (die absolute Gerade $s = [\iota^+ \iota^-]$ nicht schneidenden) Geraden g ist eine Kasnersche Turbine mit dem rechten kinematischen Bildpunkt G_r von g als Mittelpunkt, die kongruent ist zu jener Turbine, welche das Grundelement γ_0 bei Drehung um den linken kinematischen Bildpunkt G_l von g beschreibt.

b) Wenn g eine beliebige die absolute Gerade $s = [\iota^+ \iota^-]$ schneidende (das heisst horizontale) Gerade ist, so erhält man analog eine beliebige gerade Turbine als kinematisches Bild der Punkte A von g (Figur 13).

Sind (G_l, G_r) die beiden (unendlichfernen) kinematischen Bildpunkte der horizontalen Geraden g , und ist γ das Bildelement eines beliebigen Punktes der Geraden g , so entsteht dabei die gerade Bildturbine von g durch Translation von γ normal zur Richtung G_r und ist damit kongruent zu der geraden Turbine, die entsteht, wenn man das Grundelement γ_0 normal zur Richtung G_l verschiebt.

Schneidenden Geraden g_1, g_2 entsprechen stets berührende Turbinen, das heisst solche, die ein orientiertes Linienelement (Bild des Schnittpunktes $A = [g_1 g_2]$) gemeinsam haben (Figur 14).

Sonderfall (Figur 15). Liegt G_l auf der Normalen n_l des Grundelements γ_0 , so gehört die Gerade g einem Gewinde («Linksgewinde») \mathfrak{G}_l an. Wenn γ_0 im Nullpunkt auf der x -Achse liegt, so ist die Gleichung dieses sogenannten «Nebengewindes»

$$\dot{p}_{01} + \dot{p}_{23} = 0.$$

Als kinematische Bilder der (Punkte der) Strahlen g dieses Nebengewindes \mathfrak{G}_l erhält man die orientierten Linienelemente von Zykeln. Schneidende Geraden g, h des Nebengewindes \mathfrak{G}_l haben als Bilder berührende Zykeln.

Wir haben damit eine überaus einfache konstruktive (darstellend-geometrische) Herstellung jener berühmten Berührungstransformation von SOPHUS LIE gewonnen, durch welche die Strahlen g eines Gewindes auf die Lieschen orientierten Kreise (Zykel) abgebildet werden¹⁾. Der zehngliedrigen stetigen Gruppe \mathfrak{G}_{10} der projektiven Automorphismen des Nebengewindes \mathfrak{G}_l entspricht dabei die \mathfrak{G}_{10} der Lieschen Kreistransformationen.

Sonderfall (Figur 16): Den Strahlen g des Nebengewindes \mathfrak{G}_l , welche die (ebenfalls in \mathfrak{G}_l liegende) absolute Gerade s schneiden und die ein parabolisches Netz («Nebennetz» \mathfrak{N}) bilden, entsprechen gerade Zykeln, das heisst Speere. Die siebengliedrige stetige Gruppe \mathfrak{G}_7 der projektiven Automorphismen des Nebennetzes wird dabei auf die \mathfrak{G}_7 der Laguerreschen Speertransformationen übertragen.

¹⁾ SOPHUS LIE, *Geometrie der Berührungstransformationen* (Teubner, Leipzig 1896).

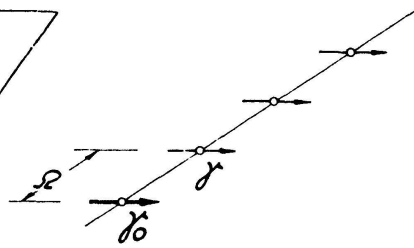
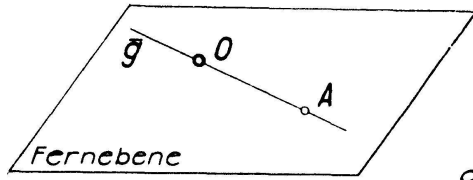


Fig. 11

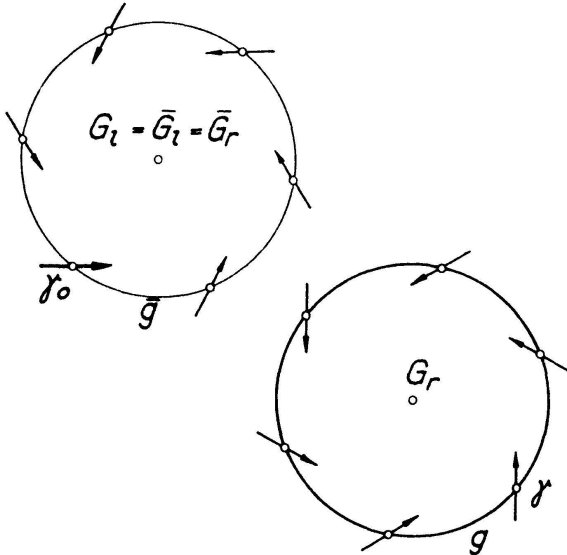


Fig. 12

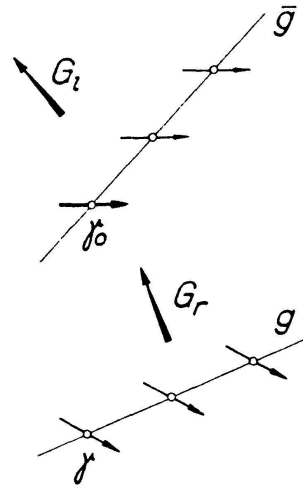


Fig. 13

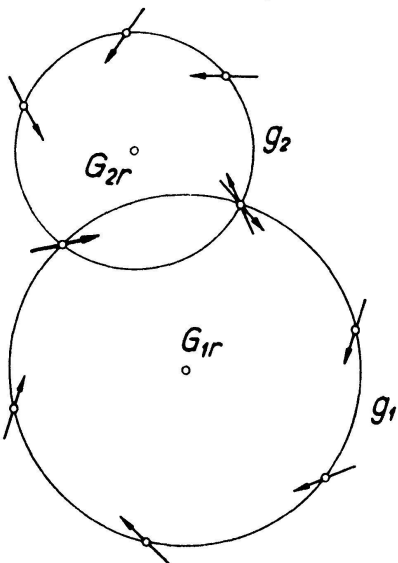


Fig. 14

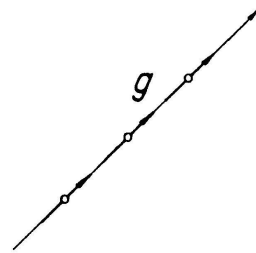


Fig. 15

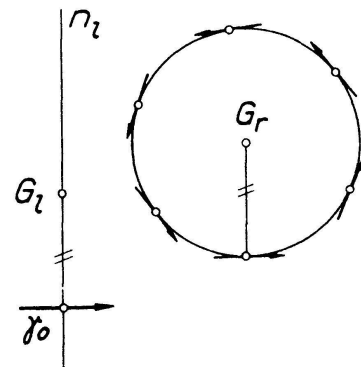


Fig. 16

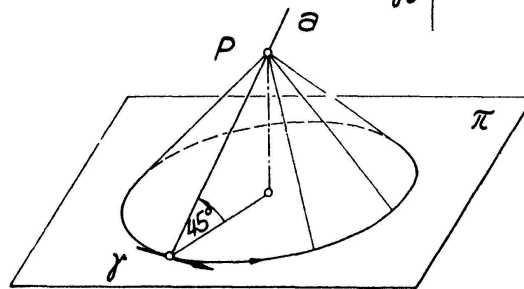


Fig. 17

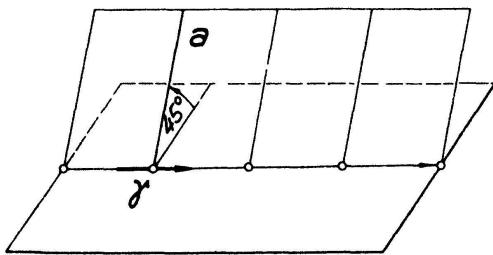


Fig. 18

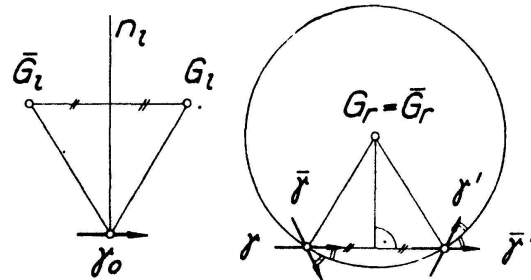


Fig. 19

IV. Euklidische Geraden-Kugel-Transformation

Die *Zyklographie*¹⁾ lehrt (Figuren 17 und 18), orientierte Linienelemente γ der Ebene π aufzufassen als Bilder von isotropen Geraden a oder, nach einer Realitätsverschiebung (Multiplikation der z -Koordinaten mit i), als Bilder von Geraden, die unter 45° «nach links oben» auf der Bildebene π aufstehen und daher einen bestimmten einteiligen Fernkreis «C» schneiden der Gleichung

$$\begin{array}{l|l} t = 0 & \text{Fernebene} \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 & \text{Fernkreis «C»}. \end{array}$$

Als Kugeln («C-Kugeln») fungieren dann die Drehflächen 2. Ordnung (einschaligen Drehhyperboloide) durch den Fernkreis C der Gleichung

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - (z - c)^2 = r^2$$

(r = Kehlradius = «Radius der Kugel»).

Die orientierten Linienelemente einer *Turbine* sind daher zyklographische Bilder der Erzeugenden einer Schar einer solchen «Kugel», welche durch die Auszeichnung einer Erzeugendenschar *orientiert* ist. *Berührende Turbinen* (Figur 14) sind zyklographische Bilder von *berührenden orientierten «Kugeln»*.

Damit haben wir insgesamt durch Zusammensetzung der kinematischen Abbildung der Geraden des Raumes auf Turbinen und der zyklographischen Abbildung der Turbinen auf orientierte (C)-Kugeln eine denkbar einfache darstellend-geometrische Konstruktion der berühmten Berührungstransformation LIES²⁾ erhalten, welche die Geraden g des (quasielliptischen) Raumes auf die orientierten Kugeln κ des (quasi-euklidischen) Raumes abbildet.

Schneidenden Geraden entsprechen dabei berührende Kugeln.

Geraden des Nebengewindes \mathfrak{G} , entsprechen kinematisch zuerst Zykel, dann (Figur 17) zyklographisch isotrope Kegel (Tangentenkegel des Kegelschnitts C, sogenannte «C-Kegel»). Geraden g , die die absolute Gerade s schneiden, entsprechen zuerst kinematisch gerade Turbinen, dann zyklographisch nichtisotrope Ebenen, die durch Auszeichnung einer ihrer Isotropenscharen *orientiert* sind; insbesondere entsprechen Geraden des Nebennetzes \mathfrak{N} zuerst kinematisch Speere, dann (Figur 18) zyklographisch isotrope Ebenen (C-Ebenen), die ebenso wie die isotropen Kegel (C-Kegel) nur eine Orientierung zulassen.

LIE selbst hat die Kugeln noch nicht orientiert, das heisst seine Geraden-Kugel-Transformation ist nicht eineindeutig. Den beiden isotropen Erzeugendenscharen der Kugel entsprechen zyklographisch «*polare Turbinen*», deren orientierte Linienelemente bezüglich des Trägerkreises der Turbine symmetrisch liegen (Figur 19), das heisst

¹⁾ EMIL MÜLLER, *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*, II. Band: *Die Zyklographie*, bearbeitet von J. L. KRAMES, (Deuticke, Leipzig und Wien 1929),

²⁾ SOPHUS LIE, *Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann. 5, 145–256 (1872) = *Gesammelte Abhandlungen*. Bd. 2, I, S.1–121.

Eine ausführliche historische Übersicht gab E. A. WEISS, *Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation*, I–VII, Deutsche Math. 1–3 (1935–1938).

kinematisch: Geraden g, \bar{g} , deren linke Bildpunkte G_l, \bar{G}_l bezüglich der Bildgeraden n_l des Nebengewindes \mathfrak{G}_l symmetrisch liegen, das heisst Geraden g, \bar{g} , die *bezüglich des Nebengewindes \mathfrak{G}_l nullpolar* sind.

Die Notwendigkeit der Orientierung der Kugeln hat zuerst (1897) E. STUDY¹⁾ erkannt, der auch als erster (1926) eine völlig einwandfreie analytische Darstellung der (euklidischen) Geraden-Kugel-Transformation gegeben hat²⁾, die mit unserem geometrischen Modell in Übereinstimmung ist.

Man kann in der gleichen Weise die Liesche Kreisgeometrie auf der Kugel und die *nichteuklidische Geraden-Kugel-Transformation geometrisch-konstruktiv begründen*, indem man sich der *Kinematik der Kugel* und ihres (*elliptischen*) *Parameterraumes* bedient, wie ich schon 1930 gezeigt habe³⁾.

Das *euklidische Modell* findet sich schon in einer aus der gleichen Zeit stammenden *Wiener Dissertation* von A. E. MAYER⁴⁾, die jedoch nicht zugänglich ist und über die auch nichts veröffentlicht wurde.

Ich selbst habe im Winter- und Sommersemester 1935/36 den Gegenstand in einer *Wiener Vorlesung über «Neuere Kinematik»* ausführlich dargelegt. Im Jahre 1948 hat W. BLASCHKE⁵⁾ in den «Münchener Sitzungsberichten» und 1949 in den «Rendiconti di matematica» darüber veröffentlicht. KARL STRUBECKER, Karlsruhe.

Kleine Mitteilungen

Sur une démonstration géométrique d'un théorème de M. D. Pompeïu

M. D. POMPEÏU a démontré, à l'aide des nombres complexes, ce théorème de géométrie élémentaire⁶⁾:

Dans le plan, on peut toujours construire un triangle avec les distances d'un point aux sommets d'un triangle équilatéral.

Nous montrerons ici que l'on peut déduire ce théorème de la proposition suivante:

Dans le plan, le lieu géométrique des sommets Q des triangles PTQ , directement semblables à un triangle donné ABC et dont les deux sommets P et T sont sur deux circonférences O_1 et O_2 , est un anneau fermé.

1° Soient donnés le triangle ABC et les deux circonférences de centres O_1, O_2 et de rayons a, b (figure 1), avec $a < b$.

Construisons d'abord $\triangle O_1 O_2 K \sim \triangle ABC$, $\overline{O_1 O_2} = m$, $\overline{O_1 K} = l$, $\overline{O_2 K} = n$, et ensuite les triangles $O_1 M O$ et $R_1 M R_2$ semblables au triangle donné, les points R_1, M étant sur la droite $O_1 O_2$, R_1 sur la circonférence O_1 et M sur la circonférence O_2 .

¹⁾ Vgl. die ausführliche kritische Abhandlung von E. STUDY, *Über Lies Kugelgeometrie*, Jber. Dtsch. Math.-Ver. 25, 96–113 (1917).

²⁾ EDUARD STUDY, *Vereinfachte Begründungen von Lies Kugelgeometrie I*, Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin 1926, 360–380.

³⁾ KARL STRUBECKER, *Zur nichteuklidischen Geraden-Kugel-Transformation*, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturw. Kl., Abt. IIa, 139, 685–700 (1930) und *Zur Geometrie sphärischer Kurvenscharen*, Jber. Dtsch. Math.-Ver. 44, 184–198 (1934).

⁴⁾ ANTON ERNST MAYER, *Die kinematische Abbildung*, Dissertation, Techn. Hochschule Wien (1930).

⁵⁾ W. BLASCHKE, *Kinematische Begründung von S. Lies Geraden-Kugeltransformation*, Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. (München 1948), 291–297, und *Contributi alla cinematica*, Rend. Mat. Applicazioni [V] 8, 268–280 (1949).

⁶⁾ D. POMPEÏU, *Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire*, Bull. Math. Phys. Ecole polytechn. Bucarest 6, 6–7 (1936).