Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 7 (1952)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

hat, so ergibt sich als Hüllgebilde dieser vom Parameter φ abhängigen Geradenschar die Kurve

$$x = a\,(\cosh\lambda\,\varphi\,\cos\varphi - \lambda\,\sinh\lambda\,\varphi\,\sin\varphi)\,,$$

$$y = a\,(\cosh\lambda\,\varphi\,\sin\varphi + \lambda\,\sinh\lambda\,\varphi\,\cos\varphi)\,,$$

womit die gewünschte Parameterdarstellung der Hyperzykloide gewonnen ist.

Analog findet man im Fall $\mu > 1$

$$v = a\,\cos\lambda\,\varphi\,, \qquad \lambda = \mu : \sqrt{\mu^2 - 1} > 1$$

als Gleichung der Hypozykloide in polaren Speerkoordinaten.

Die Sonderfälle I und II liefern eine bemerkenswerte gemeinsame reelle Erzeugungsweise der Hyper- und Hypozykloiden. Es lässt sich ohne weiteres denken, dass sich nach dieser Methode Instrumente anfertigen lassen, welche eine mechanische Erzeugung dieser Kurven gestatten. WOLFGANG STRÖHER, Wien.

Aufgaben

Aufgabe 136. Es ist der Kreis zu bestimmen, dessen Polarität die Neilsche Parabel $a\,y^2 = x^3$ in sich transformiert. R. LAUFFER, Graz.

Lösung: Die Neilsche Parabel $a\,y^2 = x^3$ gehört zu den *binomischen Kurven*

$$x^n = a\,y^m. \tag{1}$$

Diese Kurven haben dieselbe Ordnungs- und Klassenzahl und besitzen, wenn $n/m > 0$ und rational ist, im Ursprung O des zugrunde gelegten kartesischen Normalkoordinatensystems und im Fernpunkt der y-Achse zueinander reziproke Singularitäten. Diese *höheren Parabeln* entsprechen sich stets selbst in dem Polarsystem eines bestimmten Kreises um O.

Einer Tangente t von (1) in einem Punkt $(x_1|y_1)$ entspricht im Polarsystem des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ein Punkt

$$T\left(\frac{n\,r^2}{x_1\,(n-m)}\,,\ \frac{m\,r^2}{y_1\,(m-n)}\right)\,^{1)}.$$

Soll dieser Pol T von t wieder ein Punkt der Kurve (1) sein, so muss die Bedingungsgleichung

$$r^{2(n-m)} = (-1)^m\,\frac{m^m\,(n-m)^{n-m}}{n^n}\,a^2 \tag{2}$$

bestehen, die man durch Einsetzen der Koordinaten von T in (1) erhält. Aus (2) ergibt die Spezialisierung $m = 2$, $n = 3$ für den Radius des gesuchten Kreises den Wert

$$r = \frac{2\,a}{3\sqrt{3}}\,.$$

R. BEREIS, Wien.

Weitere Lösungen gingen ein von A. BAGER (Hjørring), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), A. UNTERBERGER (Bludenz).

Aufgabe 137. Evaluez l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x^2\right) dx\,.$$

H. BREMEKAMP, Delft.

[1]) Man überzeugt sich sofort, dass $P(x_1|y_1)$ auf der Polaren von T liegt und diese die Steigung $n\,y_1/m\,x_1$ der Tangenten besitzt. *Die Redaktion.*

Lösung: Im Intervall $0 \leqq x \leqq \infty$ ist $\operatorname{arctg} x^2 + \operatorname{arcctg} x^2 = \pi/2$. Das gesuchte Integral ist daher

$$J = \int_0^\infty \operatorname{arcctg} x^2 \, dx = \int_0^\infty y \, dx.$$

Da im Intervall $\langle 0, \infty \rangle$ $y = \operatorname{arcctg} x^2$ fallend ist und ferner gilt

$$\lim_{x \to 0} y = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to \infty} y = 0, \quad y' = \frac{-2x}{1 + x^4},$$

haben wir für die Fläche unter der Kurve auch die Form

$$J = \int_0^{\pi/2} x \, dy = 2 \int_0^\infty \frac{x^2 \, dx}{1 + x^4}. \qquad (*)$$

Es ist

$$\int \frac{x^2 \, dx}{1 + x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} [\ln (x^2 - x\sqrt{2} + 1) - \ln (x^2 + x\sqrt{2} + 1)]$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} [\operatorname{arctg} (x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg} (x\sqrt{2} - 1)]$$

und daher

$$J = \frac{\pi}{2} \sqrt{2}.$$

R. LAUFFER, Graz.

Das Integral (*) kann auch mit dem Residuensatz oder durch Zurückführung auf das Eulersche Integral $B(1/4;\ 3/4)$ bestimmt werden.

Weitere Lösungen sandten J. BINZ (Biel), P. BOLLI (Petit-Lancy, Genève), L. KIEFFER (Luxemburg), B. MARZETTA (Basel).

Aufgabe 138. Für die Bernoullischen Zahlen B_n, die durch die Entwicklung

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{B_h x^h}{h!}$$

definiert sind, ist die Gültigkeit folgender Darstellungen nachzuweisen

$$B_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu \nu!}{1 + \nu} a_\nu^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu \binom{\mu}{\nu}}{1 + \mu} \nu^n$$

mit

$$a_1^{(n)} = a_n^{(n)} = 1,$$

$$a_\nu^{(n)} = a_{\nu-1}^{(n-1)} + \nu\, a_\nu^{(n-1)}, \qquad a_0^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, \\ 0 & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

H. BURGER, Grenchen.

Lösung des Aufgabenstellers: Wir beweisen zunächst die erste Darstellung. Es sei

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{B}_n x^n}{n!} \quad \text{und} \quad \bar{B}_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(-1)^\nu \nu!}{1 + \nu} a_\nu^{(n)}. \qquad (1)$$

Aus der Definitionsgleichung für $a_\nu^{(n)}$ folgt, wenn man $\nu = n, n + 1, \ldots$ setzt, dass

$a_m^{(n)} = 0$ für $m > n$. Somit gilt für (1)

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \, \nu! \, a_\nu^{(n)}}{(1+\nu)\, n!} x^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \, \nu!}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_\nu^{(n)} x^n}{n!}. \tag{2}$$

Durch vollständige Induktion erkennt man leicht die Richtigkeit der Beziehung

$$R_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{(n)} x^\nu = e^{-x} \left(x \frac{d}{dx}\right)^n e^x,$$

denn es ist

$$R_{n+1}(x) = e^{-x} x \frac{d}{dx} [R_n(x) e^x] = x R_n(x) + x R_n'(x).$$

Dasselbe rekursive Gesetz erfüllt auch der Ausdruck

$$S_n(x) = \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{x(e^z-1)}\right)\Big|_{z=0} = \frac{d}{dz} \left[S_{n-1}(x e^z) \, e^{x(e^z-1)}\right]\Big|_{z=0}.$$

Wegen $R_1(x) = S_1(x) = x$ ist $R_n(x) = S_n(x)$, und es gilt die Taylorsche Entwicklung

$$e^{x(e^z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n(x)}{n!} z^n.$$

k-malige Differentiation nach x liefert

$$(e^z - 1)^k e^{x(e^z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R_n^{(k)}(x)}{n!} z^n. \tag{3}$$

Wegen $R_n^{(k)}(0) = k! \, a_k^{(n)}$ folgt für $x = 0$ aus (3)

$$(e^z - 1)^k = k! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_k^{(n)} z^n}{n!} \qquad \text{oder} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_\nu^{(n)} x^n}{n!} = \frac{1}{\nu!} (e^x - 1)^\nu. \tag{4}$$

Setzen wir den letzten Ausdruck in (2) ein, so folgt

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{1+\nu} (e^x - 1)^\nu = \frac{1}{e^x - 1} \ln(1 + e^x - 1) = \frac{x}{e^x - 1},$$

$F(x)$ ist also gleich der erzeugenden Funktion der Bernoullischen Zahlen, also $\bar{B}_n = B_n$. Die zweite explizite Darstellung ergibt sich, wenn man nach (4) setzt

$$a_\nu^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} \cdot \frac{(e^x - 1)^\nu}{\nu!}\Big|_{x=0} = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \sum_{\lambda=0}^{\nu} (-1)^\lambda \binom{\nu}{\lambda} \lambda^n.$$

Aufgabe 139. Eine variable Gerade g werde an den Seiten eines festen, spitzwinkligen Dreiecks ABC gespiegelt. Das Dreieck der Spiegelbilder heisse Spiegeldreieck von g. Man beweise:

Die Spiegeldreiecke einer Parallelenschar sind perspektiv ähnlich. Das Ähnlichkeitszentrum G ist ihr Inkreismittelpunkt, und die Ecken liegen auf den Strahlen GA, GB, GC. Der Radius der Inkreise ist gleich dem Abstand der betreffenden Geraden g vom Höhenschnittpunkt des Grunddreiecks ABC. G liegt auf dem Umkreis des Grunddreiecks, und die Richtungen von g sind den Punkten dieses Kreises eineindeutig zugeordnet.

Wenn das Grunddreieck stumpfwinklig ist, dann treten an Stelle der Inkreise die Ankreise derjenigen Seite des Spiegeldreiecks, die aus der Spiegelung an der längsten

Seite von ABC hervorgeht. Bei rechtwinkligem Grunddreieck rückt eine Ecke der Spiegeldreiecke ins Unendliche. A. STOLL, Zürich.

Lösung: Eine Schargerade g_0 durch den Höhenschnittpunkt H des Grunddreiecks geht bei Spiegelung an b und c in die Geraden g_{0b} und g_{0c} über. Diese gehen durch die Punkte H_b und H_c des Umkreises, die durch Spiegelung von H an b und c erhalten werden. Der Schnittpunkt von g_{0b} und g_{0c} sei G. Die Winkel des Vierecks GH_bAH_c bei H_b und H_c sind supplementär, weil sie als Nebenwinkel laut Spiegelungsvorgang um H nochmals auftreten. Das Viereck ist demnach Sehnenviereck, G liegt auf dem durch A, H_b und H_c bestimmten Kreis, also auf dem Umkreis des Grunddreiecks. Analog gilt, dass g_{0a} und g_{0b} (aber auch g_{0a} und g_{0c}) einander auf dem Umkreis von Dreieck ABC schneiden. Ohne Widerspruch geht das nur, wenn alle drei Spiegelgeraden durch G gehen: Das Spiegeldreieck von g_0 artet in den Umkreispunkt G aus. Die Strahlen g_0 des Büschels H repräsentieren die Parallelenscharen. Das Büschel g_{0c} ist dazu gegensinnig kongruent und schneidet aus dem Umkreis die dazu perspektive Punktreihe G aus, da der Büschelscheitel H_c auf dem Kreise liegt. Die Richtungen g_0 und die Umkreispunkte G entsprechen also einander projektiv. Eine Schargerade g gehe nun aus g_0 durch Translation um die Strecke gH hervor. Die Spiegelgeraden von g_0: g_{0a}, g_{0b}, g_{0c} erfahren dadurch eine gleich grosse Parallelverschiebung. G ist damit gemeinsame Berührkreismitte aller homothetischen Spiegeldreiecke der Geraden einer Schar, und der Radius dieser Kreise ist jeweils gleich dem Abstand von g und H. G ist damit aber auch gemeinsames Ähnlichkeitszentrum der Spiegeldreiecke dieser Parallelenschar; legt man speziell die Schargeraden durch A, B, C, so erkennt man, dass die Geraden GA, GB, GC die Eckpunkte der Spiegeldreiecke tragen. Über die Spiegeldreiecke beliebiger Geraden lässt sich folgendes aussagen: Aus der Entstehungsweise der Spiegeldreiecke folgt, dass ihre Aussenwinkel 2α, 2β, 2γ sind, wenn man die Innenwinkel des Grunddreiecks mit α, β, γ bezeichnet. Demnach sind alle Spiegeldreiecke einander ähnlich. Für das Spiegeldreieck der längsten Grunddreiecksseite sind die im letzten Absatz der Aufgabe angegebenen Tatsachen unmittelbar einzusehen. Lässt man diese Dreiecksseite durch stetige Bewegung unter Vermeidung des Punktes H in eine beliebige andere Gerade übergehen, so erfährt auch das Spiegeldreieck samt G und Berührkreis eine stetige Veränderung, bei der der Berührkreisradius – wie bewiesen – nie Null wird und die Spiegeldreieckswinkel nach obigem unverändert bleiben. Dann aber kann der Berührkreischarakter (als Inkreis oder als der genannte Ankreis) keine Änderung erfahren, womit nun alle Aussagen dieser Geraden-Dreieckszuordnung begründet sind. A. UNTERBERGER, Bludenz.

Neue Aufgaben

168. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist die Kurve mit der Gleichung $y = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4$ (a, b, c, d, e reell, $e \neq 0$) gegeben. Man finde ohne Differentialrechnung die Bedingung dafür, dass die Kurve eine reelle, echte Doppeltangente besitzt (Tangente mit zwei getrennten Berührungspunkten).

W. PROKOP, Winterthur.

169. Von zwei monofokalen Parabeln p_1 und p_2 kennt man je ein Krümmungselement (Punkt samt Krümmungskreis); die beiden Parabeln sind zu konstruieren.

R. BEREIS, Wien.

170. Man beweise die Identität:

$$\prod_{k=1}^{n} \left\{x - 4\cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right\} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n-k}{k} x^{n-k}.$$

J. BARINAGA, Madrid.

171. D'un navire A se déplaçant d'un mouvement rectiligne uniforme sur une droite a, on observe un autre navire B se déplaçant aussi d'un mouvement rectiligne uniforme sur une droite b coplanaire avec a.

De certains points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la trajectoire de A, on observe B selon des lignes de visée qui forment avec la route de A des angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$.

Les seules données sont donc les distances $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, etc. ainsi que les angles α_1, α_2, etc.

D'une part, on demande de construire:

1° Le point O où les deux trajectoires a et b se coupent.
2° Le point A_0 où se trouve A lorsque B se trouve en O.
3° Le point B_0 où se trouve B lorsque A se trouve en O.
4° L'angle φ des deux trajectoires.
5° Le rapport des vitesses des deux navires.

D'autre part, pour pouvoir répondre à chacune des questions précédentes, quel est le nombre nécessaire et suffisant de visées qu'il faut faire? CH. ROTH, Genève.

Berichte

Schweizerische Mathematische Gesellschaft

41. Jahresversammlung in Bern am 23. und 24. August 1952

Programm

W. GAUTSCHI (Basel): Das asymptotische Verhalten von Matrizenpotenzen.
H. BLUMER (Zürich): Integralgleichungen erster Art und Potentiale einfacher Schicht.
J. HERSCH (Zürich): Longueurs extrémales et applications quasi-conformes.
K. VOSS (Zürich): Ein Satz aus der Flächentheorie im Grossen.
M. JEGER (Zürich): Eine Kennzeichnung der linearen Abbildungen des Raumes auf die Ebene.
A. CHALLAND (Bern): Moyenne d'une série de grandeurs fortuites dont la loi de distribution est elle-même fortuite.
S. PICCARD (Neuchâtel): Sur les groupes de substitutions.
H. MEIER (Rorbas): Neue Resultate im Burnside-Problem.
H. HADWIGER (Bern): Über additive und schwachstetige Polyederfunktionale.
B. ECKMANN (Zürich): Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten.
H. GUGGENHEIM (Basel): Über Einsteinsche Räume.
G. DE RAHM (Lausanne): Sur la réductibilité d'un espace de Riemann.

In der Schweizerischen Gesellschaft für Logik und Philosophie der Wissenschaften sprachen zum Thema «Der Begriff der Wahrscheinlichkeit und seine Rolle in den Naturwissenschaften» die Herren B. L. VAN DER WAERDEN (Mathematik), W. PAULI (Physik) und S. ROSIN (Biologie).

Dritter Österreichischer Mathematikerkongress

9. bis 14. September 1952 in Salzburg

Im Mai 1948 führte die «Mathematische Gesellschaft in Wien» die erste österreichische Mathematikertagung durch. An vier Tagen wurden von und vor ausschliesslich österreichischen Mathematikern 24 Vorträge gehalten. Jedem Teilnehmer war es damals möglich, jeden Vortrag anzuhören, weil die verschiedenen Fachgruppen nicht gleichzeitig tagten und jedem Vortrag eindeutig eine bestimmte Zeit, meistens eine Stunde, zugeordnet war. Der Erfolg jener Veranstaltung führte zu verschiedenen Verallgemeinerungen: 1. Die «Mathematische Gesellschaft in Wien» wurde zur «Österreichischen Mathematischen Gesellschaft» erweitert. 2. Aus der «Tagung» des Jahres 1948 wurde schon im Spätsommer des folgenden Jahres ein «Kongress», der zweite Österreichische Mathematikerkongress in Innsbruck. 3. Ausser 36 in Österreich lebenden Mitgliedern nahmen an diesem Kongress 71 ausländische Mathematiker aus 12 Staaten teil. 4. Die Zahl der Vorträge wurde verdreifacht, die der Vortragssprachen sogar vervierfacht.