Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 7 (1952)
Heft: 6

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Kleine Mitteilungen

Die Ableitung der trigonometrischen Formeln im Poincaréschen Modell der hyperbolischen Geometrie

Einleitung

Die Beschäftigung mit der Axiomatik der Geometrie und den Elementen der nichteuklidischen Geometrie ist von hohem bildendem Wert. Es ist deshalb eine sehr dankenswerte Leistung, dass zum erstenmal ein Schweizer Lehrbuch[1]) den Versuch unternommen hat, dieses Gebiet dem Schulunterricht zugänglich zu machen. Es ist dabei die Frage, wieweit es möglich ist, in die Probleme der nichteuklidischen Geometrie einzudringen. Vielleicht könnte man mindestens in Arbeitsgemeinschaften mit interessierten Schülern auch noch über den in (1) aufgenommenen Stoff hinausgehen. Es ergibt sich hier unter anderem das methodische Problem der Einführung in die Trigonometrie, das auch für die Vorlesungen an Hochschulen von Interesse sein dürfte.

In den älteren Büchern wird im allgemeinen der methodisch schwierige, abstrakte Weg ohne Modell gegangen, das Buch von BALDUS[2]) benutzt das Kleinsche Modell, das aber den entscheidenden Nachteil hat, dass die Winkel hier nicht euklidisch gemessen werden. Die Ableitung der trigonometrischen Formeln aus dem Poincaréschen Modell ist bisher unseres Wissens in der Literatur noch nicht dargestellt worden. Es soll im folgenden gezeigt werden, wie bei dem in (1) benutzten Poincaréschen Modell die trigonometrischen Formeln auf einfache Weise gefunden werden können.

Das Prinzip der speziellen Lage

Die Kongruenztransformationen im Poincaréschen Modell sind die linearen Transformationen der oberen (komplexen) Halbebene auf sich. Es genügt, die Formeln für eine «spezielle Lage» des Dreiecks zu beweisen, in die man es durch eine Kongruenztransformation bringen kann.

Wir gehen aus von einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse eine Strecke AB der imaginären Achse mit einem Eckpunkt i ist (Figur 1). Offenbar kann man jedes beliebige rechtwinklige Dreieck durch eine Kongruenztransformation in diese Lage bringen. Es seien die (zur reellen Achse orthogonalen) Kreisbogen $BC = a$ und $AC = b$ die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks, D und E bzw. r_a und r_b die Mittelpunkte und Radien der entsprechenden Vollkreise. Ferner bezeichnen wir den Nullpunkt mit O, die Strecken OE, OA und OD mit ξ, η und ζ. Dann gilt:

$$\xi^2 + \eta^2 = (\zeta + \xi)^2 - (\zeta^2 + 1).$$

Also:

$$\eta^2 + 1 = 2\,\xi\,\zeta. \tag{1}$$

Nun ist die (hyperbolische) Länge der Hypotenuse c gegeben durch das Doppelverhältnis:

$$\mathfrak{c} = \log(\eta, 1, 0, \infty) = \log \eta.$$

Daraus folgt:

$$\mathfrak{Cof}\,\mathfrak{c} = \frac{e^{\mathfrak{c}} + e^{-\mathfrak{c}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\eta^2 + 1}{\eta}\right).$$

Da die der Hypotenuse anliegenden Winkel α und β gleich den Winkeln AEO bzw.

---

[1]) F. GONSETH und P. MARTI, *Planimetrie*, 2. Teil (Orell Füssli, Zürich und Leipzig 1936).

[2]) R. BALDUS, *Nichteuklidische Geometrie* (de Gruyter, Berlin 1944, Sammlung Göschen, Bd. 970).

BDO sind, so haben wir:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\xi}{\eta}; \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{\xi}{1} = \zeta,$$

und aus (1) wird:

$$\mathfrak{Cof}\,\mathfrak{c} = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta. \tag{2}$$

Das ist die erste der beiden abzuleitenden Formeln.

Die Berechnung von $\mathfrak{Tg}\,\mathfrak{a}$

Zur Ableitung einer zweiten Beziehung zwischen den Seiten und den Winkeln des rechtwinkligen Dreiecks formen wir zunächst die Formel für die hyperbolische Länge

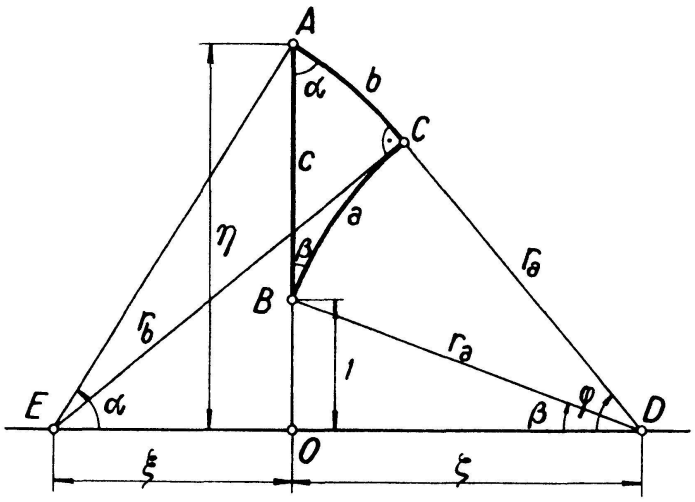

Fig. 1

einer Strecke etwas um. Bekanntlich ist die hyperbolische Länge einer durch die Zentriwinkel ε und δ auf einer hyperbolischen Geraden ausgeschnittene Strecke a:

$$\mathfrak{a} = \log \frac{\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}.$$

Daraus folgt:

$$e^{2\mathfrak{a}} = \operatorname{tg}^2\frac{\varepsilon}{2} \operatorname{ctg}^2\frac{\delta}{2}.$$

Unter Benutzung der Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varepsilon}{1+\cos\varepsilon}}$$

kann man jetzt $\mathfrak{Tg}\,\mathfrak{a}$ berechnen:

$$\mathfrak{Tg}\,\mathfrak{a} = \frac{e^{2\mathfrak{a}}-1}{e^{2\mathfrak{a}}+1} = \frac{\cos\delta - \cos\varepsilon}{1-\cos\delta\cos\varepsilon}. \tag{3}$$

Für $\varepsilon = \pi/2$ kann man aus (3) die bekannten Beziehungen zwischen Parallelwinkel und Paralleldistanz gewinnen. Wir wollen indessen (3) benutzen, um eine weitere Beziehung für das rechtwinklige Dreieck abzuleiten.

Es ist nach (1)

$$\mathfrak{Tg}\,\mathfrak{c} = \frac{e^{2\mathfrak{c}}-1}{e^{2\mathfrak{c}}+1} = \frac{\eta^2+1-2}{\eta^2+1} = \frac{\xi\zeta-1}{\xi\zeta}. \tag{4}$$

Benutzung von (3) ergibt aber:

$$\mathfrak{Tg}\,\mathfrak{a} = \frac{\cos(\pi-\varphi)-\cos(\pi-\beta)}{1-\cos(\pi-\varphi)\cos(\pi-\beta)} = \frac{\cos\beta-\cos\varphi}{1-\cos\beta\cos\varphi}.$$

Nun ist, wie man Figur 1 entnimmt:

$$\cos\beta = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}}; \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{1+\zeta^2}}{\xi+\zeta}.$$

Also wird:

$$\mathfrak{Tg}\,\mathfrak{a} = \frac{\xi\zeta-1}{\xi\sqrt{1+\zeta^2}}.$$

Daraus folgt schliesslich:

$$\mathfrak{Tg}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{Tg}\,\mathfrak{c}\cos\beta. \tag{5}$$

Aus den Formeln (2) und (5) kann man leicht alle weiteren Beziehungen für das rechtwinklige Dreieck und daraus wieder in der üblichen Weise den Sinus- und Cosinus-Satz für beliebige Dreiecke ableiten. HERBERT MESCHKOWSKI, Berlin.

Anmerkung der Redaktion: Wir erwähnen an dieser Stelle die Abhandlung von H. EVES und V. E. HOYGATT, *Hyperbolic Trigonometry derived from the Poincaré model*, Amer. Math. Monthly *58*, 469–474 (1951).

Der Kreidekreis

Beim Zeichnen eines Kreises an der Tafel mit Hilfe des üblichen *Kreidezirkels* nimmt man stillschweigend an, dass sich die Kreide nicht merklich abnützt, so dass ihre Spitze nach einem Umlauf wieder im Ausgangspunkt ankommt. In Wirklichkeit ist dies nun nicht der Fall, vielmehr wird sich das Kreidestück ständig verkürzen, wenn auch nicht sehr stark. Unter der naheliegenden Annahme, dass diese *Verkürzung proportional zum beschriebenen Bogen* ist, erhebt sich die Frage, was für eine Kurve der so erhaltene «*Kreidekreis*» nun eigentlich sei.

Sei O der Einsatzpunkt des Zirkels (der in Figur 1 in die Zeichenebene umgelegt gezeichnet wurde), P die Schreibspitze, $OQ = a$ das Lot auf die Kreidenachse; denkt man sich das ganze Stück PQ aus Kreide und macht man den Kurvenpunkt A, der bei vollkommen abgeschriebener Kreide erreicht wird, zum Anfangspunkt der (rückläufigen) Messung des Bogens s, dann gilt $PQ = \mu s$, wobei μ die (positive und normalerweise sehr kleine) «Abnützungskonstante» bezeichnet. Für den Radiusvektor $OP = r$ ergibt sich dann aus dem rechtwinkligen Dreieck OPQ die Beziehung

$$r^2 = a^2 + \mu^2 s^2. \tag{1}$$

Da in diesem Ausdruck die Bogenlänge unmittelbar als Parameter erscheint, liegt es nahe, sich der Methoden der natürlichen Geometrie zu bedienen. Zu diesem Zweck werde die Ebene auf ein mit der Kurve beweglich verbundenes kartesisches Koordinatensystem bezogen, dessen u- und v-Achse die Kurventangente bzw. -normale ist. Die Koordinaten u, v des festen Punktes O genügen dann neben der zu (1) äquivalenten Beziehung

$$u^2 + v^2 = a^2 + \mu^2 s^2 \tag{2}$$

nach den Cesàroschen «Unbeweglichkeitsbedingungen»

$$\frac{du}{ds} = \varkappa v - 1, \qquad \frac{dv}{ds} = -\varkappa u, \tag{3}$$

worin $\varkappa = 1/\varrho$ die Krümmung der Kurve im Punkte P bedeutet[1]). Zweimalige Anwen-

[1]) H. WIELEITNER, *Spezielle ebene Kurven* (Göschensche Verlagsbuchhandlung, Leipzig 1908), S. 174.

dung von (3) auf (2) liefert die Gleichungen

$$u = -\mu^2 s, \qquad v = (1-\mu^2)\,\varrho. \tag{4}$$

Nach Elimination der Grössen u, v aus (2) und (4) ergibt die Beziehung

$$\frac{s^2}{A^2} + \frac{\varrho^2}{B^2} = 1, \qquad A^2 = \frac{a^2}{\mu^2(\mu^2-1)}, \quad B^2 = \frac{a^2}{(\mu^2-1)^2} \tag{5}$$

die Abhängigkeit des Krümmungsradius ϱ von der Bogenlänge s, also die *natürliche*

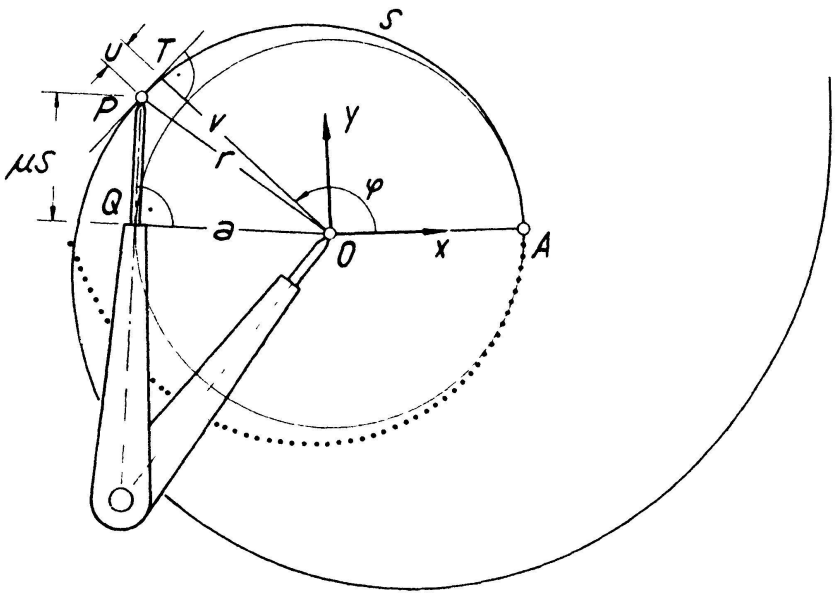

Fig. 1

Gleichung der gesuchten Kurve. Bekanntlich[1]) kennzeichnet eine Beziehung von der Gestalt (5) die *Zykloiden*, also diejenigen Kurven, welche von einem Umfangspunkt eines Kreises mit dem Radius

$$R_1 = \frac{AB}{2(A+B)}$$

beschrieben werden, wenn derselbe auf einem festen Kreis vom Radius

$$R_2 = \frac{AB^2}{A^2-B^2}$$

abrollt.

I. $\mu < 1$. In diesem Falle rollt ein komplexer Kreis vom Radius

$$R_1 = -\frac{a}{2}(1+i\lambda), \qquad \lambda = \mu : \sqrt{1-\mu^2}$$

auf dem nullteiligen (rein imaginären) vom Radius

$$R_2 = a\lambda i.$$

Diese Kurven werden als *Hyperzykloiden* bezeichnet. Figur 1 zeigt den zur Abnützungskonstanten $\mu = 0{,}25$ gehörigen Kreidekreis.

---

[1]) H. Wieleitner, a. a. O., S. 195 ff.

II. $\mu > 1$. In diesem unwahrscheinlichen Fall treten *Hypozykloiden* auf, wie man den verschiedenen Vorzeichen der Kreisradien

$$R_2 = a\,\lambda, \quad R_1 = -\frac{a}{2}(\lambda - 1), \qquad \lambda = \mu : \sqrt{\mu^2 - 1}$$

entnimmt. Setzt man $\mu = 1/\cos\alpha$, so wird $R_1 = a/\sin\alpha$, womit eine einfache geometrische Deutung der Konstanten μ gefunden ist (Figur 2, $\mu = 1{,}2$). Da die Tangentenstrecke $QP = \mu\, s = s/\cos\alpha$ an den Scheitelkreis der Hypozykloide proportional der Bogenlänge der Hypozykloide ist, lässt sich die Bogenlänge $AP = s = PQ\cos\alpha$ in einfachster Weise rektifizieren. (Figur 2, der Nullkreis über Q ist mit A zu bezeichnen.)

Anmerkung: Epizykloiden würden sich für rein imaginäres μ ergeben. In diesem Falle ist die angeführte Konstruktion zur Rektifikation eines Bogens einer einfachen Modifikation fähig.

III. $\mu = 1$. Dieser Grenzfall vermittelt zwischen den nach innen hohlen Hyperzykloiden und den nach aussen hohlen Hypozykloiden. Aus (5) folgt für die Krümmung $\varkappa = 0$, so dass sich hier eine nicht alltägliche Methode ergibt, eine *Gerade* zu zeichnen, die aber trotzdem unmittelbar geometrisch einleuchtet.

IV. $\mu = 0$. Dieser Fall liefert nach (1) die *echten Kreise*, da keinerlei Abnützung des Schreibstiftes eintritt.

V. $a = 0$, $\mu < 1$ liefert aus (2) $\sqrt{u^2 + v^2} = \mu\, s$, woraus mittels der Unbeweglichkeitsbedingungen (3) $u/v = \lambda = \text{const}$ folgt, das heisst die Strahlen des Büschels O werden von der Kurve unter dem konstanten Winkel $\omega = \operatorname{arcctg}\lambda$ geschnitten. Durch diese Eigenschaft sind aber die *logarithmischen Spiralen* gekennzeichnet.

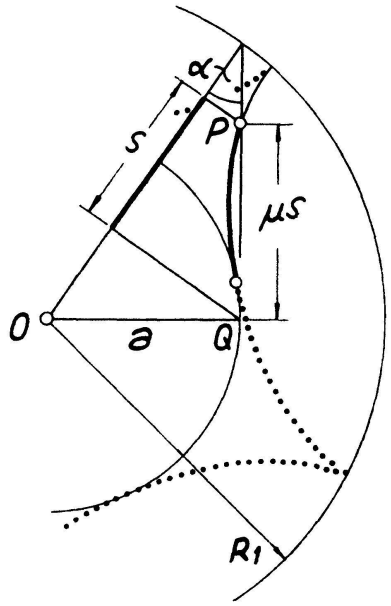

Fig. 2

Es erscheint noch wünschenswert, von den erhaltenen Kurven *Parameterdarstellungen* zu gewinnen. Zu diesem Ende ist es zweckmässig, *polare Speerkoordinaten* heranzuziehen. Bei dieser Darstellungsart wird die orientierte Kurventangente durch ihren (vorzeichenbegabten) Abstand $v = OT$ von O und dessen Polarwinkel $\varphi = \sphericalangle AOT$ festgelegt.

Aus (4) und (5) findet man

$$\varrho = \frac{v}{1 - \mu^2}, \qquad s = \frac{\sqrt{a^2 - v^2}}{\mu\sqrt{\mu^2 - 1}}$$

und damit

$$d\varphi = \frac{ds}{\varrho} = \frac{ds}{dv} \cdot \frac{dv}{\varrho} = \frac{\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu} \cdot \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}}.$$

Schliesslich findet man für den Sonderfall $\mu < 1$

$$\frac{\mu\,\varphi}{\sqrt{1 - \mu^2}} = \int_a^v \frac{dv}{\sqrt{v^2 - a^2}} = \operatorname{ar\,cosh}\frac{v}{a}.$$

Die Gleichung der Hyperzykloide in polaren Speerkoordinaten lautet mithin

$$v = a\cosh\lambda\,\varphi, \qquad \lambda = \mu : \sqrt{1 - \mu^2}.$$

Bedenkt man, dass die Kurventangente im kartesischen Koordinatensystem $O(x, y)$ die als «Hessesche Normalform» bekannte Gleichung

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = v = a\cosh\lambda\,\varphi$$

hat, so ergibt sich als Hüllgebilde dieser vom Parameter φ abhängigen Geradenschar die Kurve

$$x = a\,(\cosh\lambda\,\varphi\cos\varphi - \lambda\sinh\lambda\,\varphi\sin\varphi)\,,$$

$$y = a\,(\cosh\lambda\,\varphi\sin\varphi + \lambda\sinh\lambda\,\varphi\cos\varphi)\,,$$

womit die gewünschte Parameterdarstellung der Hyperzykloide gewonnen ist.

Analog findet man im Fall $\mu > 1$

$$v = a\cos\lambda\,\varphi, \qquad \lambda = \mu : \sqrt{\mu^2 - 1} > 1$$

als Gleichung der Hypozykloide in polaren Speerkoordinaten.

Die Sonderfälle I und II liefern eine bemerkenswerte gemeinsame reelle Erzeugungsweise der Hyper- und Hypozykloiden. Es lässt sich ohne weiteres denken, dass sich nach dieser Methode Instrumente anfertigen lassen, welche eine mechanische Erzeugung dieser Kurven gestatten. WOLFGANG STRÖHER, Wien.

Aufgaben

Aufgabe 136. Es ist der Kreis zu bestimmen, dessen Polarität die Neilsche Parabel $a\,y^2 = x^3$ in sich transformiert. R. LAUFFER, Graz.

Lösung: Die Neilsche Parabel $a\,y^2 = x^3$ gehört zu den *binomischen Kurven*

$$x^n = a\,y^m. \tag{1}$$

Diese Kurven haben dieselbe Ordnungs- und Klassenzahl und besitzen, wenn $n/m > 0$ und rational ist, im Ursprung O des zugrunde gelegten kartesischen Normalkoordinatensystems und im Fernpunkt der y-Achse zueinander reziproke Singularitäten. Diese *höheren Parabeln* entsprechen sich stets selbst in dem Polarsystem eines bestimmten Kreises um O.

Einer Tangente t von (1) in einem Punkt $(x_1|y_1)$ entspricht im Polarsystem des Kreises

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ein Punkt

$$T\left(\frac{n\,r^2}{x_1\,(n-m)}\,,\ \frac{m\,r^2}{y_1\,(m-n)}\right)\ ^{1)}.$$

Soll dieser Pol T von t wieder ein Punkt der Kurve (1) sein, so muss die Bedingungsgleichung

$$r^{2(n-m)} = (-1)^m\,\frac{m^m\,(n-m)^{n-m}}{n^n}\,a^2 \tag{2}$$

bestehen, die man durch Einsetzen der Koordinaten von T in (1) erhält. Aus (2) ergibt die Spezialisierung $m = 2$, $n = 3$ für den Radius des gesuchten Kreises den Wert

$$\underline{r = \frac{2\,a}{3\sqrt{3}}}\,.$$

R. BEREIS, Wien.

Weitere Lösungen gingen ein von A. BAGER (Hjørring), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), A. UNTERBERGER (Bludenz).

Aufgabe 137. Evaluez l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x^2\right) dx\,.$$

H. BREMEKAMP, Delft.

---

[1]) Man überzeugt sich sofort, dass $P(x_1|y_1)$ auf der Polaren von T liegt und diese die Steigung $n\,y_1/m\,x_1$ der Tangenten besitzt. *Die Redaktion.*