Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 7 (1952)
Heft: 6

Artikel: Zum Begriff des konservativen Systems
Autor: Ziegler, Hans
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16360

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band VII Nr. 6 Seiten 121–144 Basel, 15. November 1952

Zum Begriff des konservativen Systems

1. *Problemstellung*

Der aus didaktischen Gründen induktive Aufbau der Mechaniklehrbücher bringt es mit sich, dass viele Begriffe enger definiert werden, als dies im Hinblick auf spätere Anwendungen wünschbar wäre. So wird beispielsweise der Begriff der Arbeit in der Regel an Hand der stationären Feldkraft erklärt, und dasselbe trifft für die Definition der konservativen Kraft zu. Wenn diese Begriffsbestimmungen beim Übergang zur Mechanik der materiellen Körper und Systeme erweitert würden, wäre gegen dieses Vorgehen nichts einzuwenden. Da aber diese Erweiterung meist unterlassen wird, entstehen bei der Behandlung von starren Körpern und Systemen gelegentlich unerwartete Schwierigkeiten, deren Überwindung oft nicht nur dem Anfänger Mühe macht. Im folgenden soll auf einige dieser Schwierigkeiten hingewiesen und gezeigt werden, wie sie sich durch Straffung gewisser Definitionen vermeiden lassen.

2. *Die Arbeit*

Es ist üblich, die Arbeit mit

$$A = \int_C \mathfrak{K}\, d\mathfrak{r}$$

als Linienintegral der Kraft $\mathfrak{K}$ längs eines Bogens C zu definieren. Diese Definition, die vom Begriffe der stationären Feldkraft $\mathfrak{K}(\mathfrak{r})$ ausgeht und von einem materiellen Träger derselben absieht, ist aus zwei Gründen zu beanstanden.

Erstens wird sie schon im instationären Kraftfeld $\mathfrak{K}(\mathfrak{r}, t)$, dann aber auch für bewegungs-, insbesondere geschwindigkeitsabhängige Kräfte $\mathfrak{K}(\mathfrak{r}, \mathfrak{v})$ erst dadurch physikalisch brauchbar, dass man mit $\mathfrak{r}(t)$ den Bewegungsablauf längs C vorschreibt. Sie wird daher zweckmässig durch

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{K}\, \mathfrak{v}\, dt \tag{2.1}$$

ersetzt, wobei neben $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ auch die Kraft $\mathfrak{K}$ und ihre Leistung $\mathfrak{K}\,\mathfrak{v}$ als Funktionen von t aufzufassen sind.

Zweitens ist der Begriff der Kraft physikalisch nicht von demjenigen ihres Trägers zu lösen, und wenn dieser räumliche Ausdehnung besitzt, brauchen sich die Verschiebungen des Kraftangriffspunktes im mathematischen Sinne und des materiellen

Punktes, in dem die Kraft momentan angreift, nicht zu decken. So ist etwa im Falle der rollenden Scheibe (Figur 1) die Elementarverschiebung des mathematischen Angriffspunktes der Reibungskraft durch $a\,d\varphi$ gegeben, die Verschiebung ihres materiellen Angriffspunktes dagegen null, während für die Spannkräfte bei der Bandbremse (Figur 2) das Gegenteil zutrifft. Bei allen Anwendungen des Arbeitsbegriffes (in Energiesatz, Prinzip der virtuellen Arbeiten usw.) wird unter $d\mathfrak{r}$ die Verschiebung des materiellen Angriffspunktes und unter $\mathfrak{v}$ seine Geschwindigkeit verstanden, und nur so erklärt sich ja die Tatsache, dass die Haftreibungskraft R in Figur 1 keine Arbeit leistet, während umgekehrt die Gesamtarbeit der beiden Spannkräfte S_1, S_2 bei der Bandbremse (Figur 2) von Null verschieden ist.

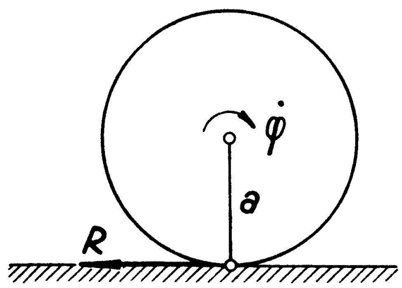

Fig. 1

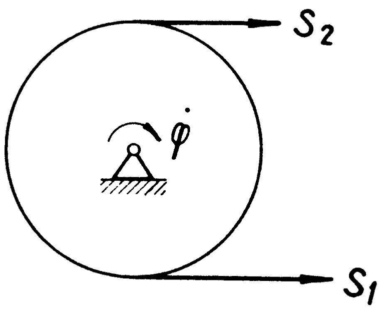

Fig. 2

Es empfiehlt sich also, zunächst den Begriff des Angriffspunktes von $\mathfrak{R}$ materiell zu fassen, alsdann mit $d\mathfrak{r}$ seine Verschiebung sowie mit $\mathfrak{v}$ seine Geschwindigkeit, ferner mit

$$L = \mathfrak{R}\,\mathfrak{v} \tag{2.2}$$

die Leistung von $\mathfrak{R}$ und erst dann die Arbeit

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt \tag{2.3}$$

als deren Zeitintegral zu definieren, wobei die Elementararbeit nach erfolgter Präzision des Begriffes «Angriffspunkt» in irgendeiner der Formen

$$dA = L\,dt = \mathfrak{R}\,\mathfrak{v}\,dt = \mathfrak{R}\,d\mathfrak{r} \tag{2.4}$$

verwendet werden kann.

3. *Konservative Kräfte*

Die konservative Kraft wird üblicherweise durch die Forderung definiert, dass ihre Arbeit auf jedem geschlossenen Weg null sei, mithin bei einer beliebigen Verschiebung nur von deren Ausgangs- und Endpunkt, nicht aber vom Verschiebungsweg oder der Art abhänge, wie dieser durchlaufen wird. Auch diese Definition geht vom Bilde der Feldkraft aus und erhält ihre Bedeutung mit dem Satz, dass bei Systemen, an denen nur konservative Kräfte angreifen, die Summe aus der kinetischen und der potentiellen Energie konstant sei.

Systeme, die lediglich Feldkräften unterworfen sind, kommen praktisch äusserst selten vor. Der Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie gilt aber auch für allgemeinere Systeme. Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit, den Begriff der konservativen Kraft zu erweitern, und zwar wieder unter Einbezug des Trägers, ohne den gewisse Kräfte (zum Beispiel Reaktionen) gar nicht definiert sind.

Eine praktisch brauchbare Definition der konservativen Kraft besteht in der Forderung, dass ihre Arbeit bei jeder passenden (das heisst mit den Bindungen verträglichen, im übrigen aber nicht virtuellen, sondern wirklichen und endlichen) Verschiebung nur von der Ausgangs- und Endlage ihres Trägers abhängig und damit insbesondere null sei, sofern diese beiden Lagen zusammenfallen.

Diese Definition ist insofern umfassender als die erste, als sie sich auf beliebige Kräfte, insbesondere auch auf Reaktionen anwenden lässt. Es folgt aus ihr, dass die Arbeit der konservativen Kraft bei der Verschiebung des Systems in eine feste Endlage eine eindeutige Funktion $V(q)$ der Lagekoordinaten q_k der Ausgangslage ist, und damit ist die potentielle Energie $V(q)$ definiert, deren totales Differential gemäss

$$dA = -dV = -\sum_k \frac{\partial V}{\partial q_k}\, dq_k \tag{3.1}$$

die Elementararbeit bei einer wirklichen Verschiebung liefert.

Da der Fahrstrahl des (materiellen) Kraftangriffspunktes im allgemeinsten Falle eine Funktion $\mathfrak{r}\,(q,\,t)$ der Lagekoordinaten und der Zeit, mithin

$$d\mathfrak{r} = \sum_k \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_k}\, dq_k + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\, dt$$

ist, erhält man für dA auch den Ausdruck

$$dA = \mathfrak{K}\left(\sum_k \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_k}\, dq_k + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\, dt\right),$$

der mit den Abkürzungen

$$\mathfrak{K}\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_k} = P_k \tag{3.2}$$

in

$$dA = \sum_k P_k\, dq_k + \mathfrak{K}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\, dt \tag{3.3}$$

übergeht. Durch Koeffizientenvergleich zwischen (3.1) und (3.3) gewinnt man die Identitäten

$$\mathfrak{K}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t} = 0, \qquad P_k = \mathfrak{K}\,\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, \tag{3.4}$$

aus denen sich eine Reihe von Schlüssen ziehen lässt.

Zunächst folgt aus der ersten Beziehung (3.4), dass in rheonomen Systemen[1]) höchstens diejenigen Kräfte konservativ sind, die bei festen q_k niemals Arbeit leisten, das heisst stets normal zur Verschiebung sind, welche ihre Angriffspunkte bei festen q_k ausführen. Da diese Bedingung nur selten erfüllt ist, hat man in rheonomen Systemen nur ausnahmsweise konservative Kräfte. Wir beschränken uns daher auf skleronome

---

[1]) Rheonome Systeme sind solche mit zeitlich veränderlichen Bindungen.

Systeme[1]) und fassen fortan die Fahrstrahlen als Funktionen $\mathfrak{r}(q)$ der Lagekoordinaten allein auf.

Da in den übrigen Gleichungen (3.4) die rechten Seiten Funktionen der Lagekoordinaten sind, können ferner nur solche Kräfte konservativ sein, deren Arbeit bei der allgemeinsten wirklichen Elementarverschiebung nur von den q_k abhängt.

Bei den Lasten (oder eingeprägten Kräften), die sich (im Gegensatz zu den Reaktionen) als Funktionen $\mathfrak{K}(q, \dot{q}, t)$ darstellen lassen, scheiden deshalb die explizit von t abhängigen Kräfte mit wenigen, praktisch kaum vorkommenden Ausnahmen aus. Aber auch die geschwindigkeitsabhängigen Lasten erfüllen diese Bedingung im allgemeinen nicht. Jedenfalls müssen die dissipativen Kräfte, die (wie etwa der Luftwiderstand) unabhängig von der Bewegungsrichtung stets negative Arbeit leisten,

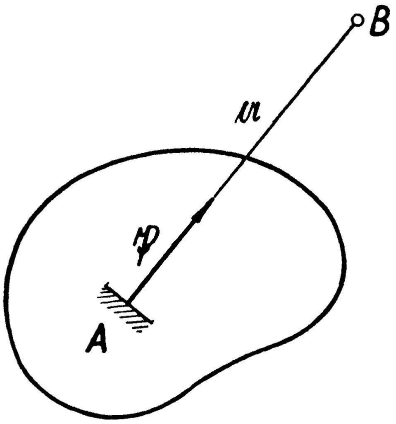

Fig. 3

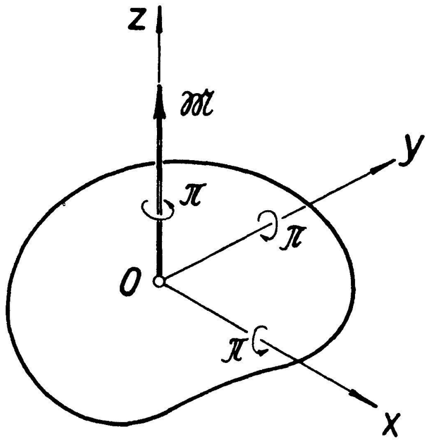

Fig. 4

ausgeschlossen werden. Die wichtigste Ausnahme bilden hier die sogenannten gyroskopischen Kräfte, die (wie die Corioliskraft, die Lorentzkraft oder das Kreiselmoment) bei wirklichen Verschiebungen keine Arbeit leisten. Gyroskopische Kräfte sind stets konservativ, und dann selbstverständlich auch viele nur von den q_k abhängige Kräfte.

Die Reaktionen leisten im skleronomen System entweder keine oder negative Arbeit. Diejenigen, welche (wie Normaldrücke, Haftreibungskräfte und -momente, Rollreibungsmomente bei fehlender Relativdrehung und Bedingungskräfte der Starrheit) keine Arbeit leisten, sind konservativ, die übrigen (Gleitreibungskräfte und -momente, Rollreibungsmomente beim Abrollen) dagegen nicht.

Zusammenfassend kann also festgestellt werden, dass im allgemeinen nur skleronome Systeme konservative Kräfte aufweisen, und zwar neben solchen, die nur von den Lagekoordinaten abhängen, im wesentlichen nur gyroskopische Kräfte sowie Reaktionen, die keine Arbeit leisten.

Bei den nur von den q_k abhängigen handelt es sich keineswegs nur um stationäre Feldkräfte $\mathfrak{K}(\mathfrak{r})$, denn durch den Fahrstrahl $\mathfrak{r}$ eines Kraftangriffspunktes sind die Lagekoordinaten seines Trägers im allgemeinen nicht festgelegt. Tatsächlich sind selbst sehr einfache Kräfte $\mathfrak{K}(q)$ nichtkonservativ.

[1]) Skleronome Systeme enthalten nur zeitlich konstante Bindungen.

Greift zum Beispiel an einem starren Körper (Figur 3) eine starr mit ihm verbundene Kraft $\mathfrak{P}$ mit konstantem Betrag an, so ist ihre Arbeit bei einer Translation um $\mathfrak{a}$ in der Kraftrichtung gleich $P a$, dagegen null, wenn der Körper vor und nach der Translation so um den Angriffspunkt A bzw. B gedreht wird, dass $\mathfrak{P}$ während der Translation normal zu $\mathfrak{a}$ und am Schluss wieder mit $\mathfrak{a}$ gleichgerichtet ist. Die Kraft $\mathfrak{P}$, die hier von den Eulerschen Winkeln ihres Trägers abhängt (und damit nicht als Feldkraft im gewöhnlichen Sinne bezeichnet werden kann), ist also nichtkonservativ.

Ähnlich steht es, wenn an einem starren Körper (Figur 4) ein Kräftepaar mit konstantem (und damit auch von den Lagekoordinaten unabhängigen) Momentvektor $\mathfrak{M}$ angreift. Solange der Körper nur um die Achse z dieses Vektors rotieren kann, mag man allenfalls noch berechtigt sein, Lagen mit einem Drehwinkelunterschied von $2 n \pi$ als verschieden und damit das Paar als konservativ zu betrachten. Sobald aber auch Kreiselungen um O zugelassen werden, ist es nichtkonservativ, denn bei einer Drehung um π um die z-Achse leistet $\mathfrak{M}$ die Arbeit πM, bei zwei ebenso grossen, aufeinanderfolgenden Drehungen um die x- und die y-Achse, die auf die gleiche Endlage führen, dagegen die Arbeit null.

Es ist kein Zufall, dass Kräfte dieser Art bei mechanischen Antrieben (Kurbel, Welle, Schubkurbel-, Zahnradgetriebe usw.) die Hauptrolle spielen, handelt es sich doch hier stets darum, an einem Körper, der fortwährend die gleichen Lagen durchläuft, Arbeit zu leisten.

4. *Konservative Systeme*

Ein System kann als konservativ bezeichnet werden, wenn an ihm ausschliesslich konservative Kräfte angreifen. Diese Definition erhält aber ihre praktische Bedeutung erst mit der Erweiterung, welche in Ziffer 3 dem Begriff der konservativen Kraft gegeben worden ist.

Dieser Erweiterung zufolge sind im allgemeinen nur skleronome Systeme konservativ. Sie sind es im allgemeinen nur dann, wenn ihre Reaktionen keine Arbeit leisten und die Lasten aus gyroskopischen sowie nur von den Lagekoordinaten abhängigen konservativen Kräften bestehen.

Aus der Definition des konservativen Systems folgt, dass die bei seiner Verschiebung in eine feste Endlage geleistete Arbeit eine eindeutige Funktion $V(q)$ der Lagekoordinaten der Ausgangslage ist, und damit ist die potentielle Energie $V(q)$ des ganzen Systems definiert, die sich als Summe der potentiellen Energien sämtlicher (äusseren und inneren) Kräfte ermitteln lässt.

Durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Leistungen auf die wirkliche Bewegung erhält man den Energiesatz, und zwar zunächst in der allgemeinen Form $dT/dt = L$. Integriert man ihn über das Zeitintervall $t_1 \ldots t_2$, so geht er in $T_2 - T_1 = A_{12}$ und für konservative Systeme wegen $A_{12} = V_1 - V_2$ in

$$T + V = E, \tag{4.1}$$

das heisst in den Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie über. Dieser gilt für beliebige konservative, mithin im allgemeinen für skleronome Systeme, sofern ihre Reaktionen keine Arbeit leisten und neben gyroskopischen nur von den Lagekoordinaten abhängige konservative Lasten vorkommen.

Bemerkenswert ist, dass der Satz auch bei Anwesenheit gyroskopischer Kräfte, das heisst bei sogenannten gyroskopischen Systemen, gültig bleibt. Er gilt aber – wie man von Figur 3 her schliesst – beispielsweise nicht beim Doppelpendel der Figur 5, bei dem als Lasten die Rückstellmomente M_1, M_2 in den beiden Lagern und die in die Achse des zweiten Pendels fallende Kraft $\mathfrak{P}$ mit konstantem Betrag angreifen. Auch beim sphärischen Pendel, das unter dem Einfluss des Gewichtes $\mathfrak{G}$ sowie eines konstanten Momentes $\mathfrak{M}$ steht, ist er ungültig. In beiden Fällen hat man nämlich mit einem nichtkonservativen System zu tun.

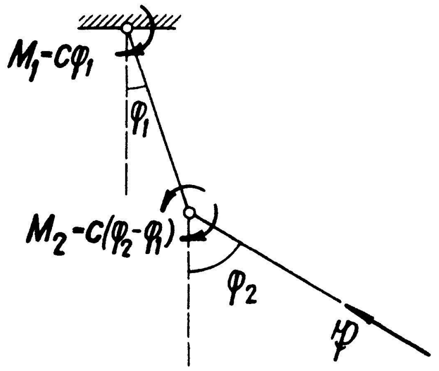

Fig. 5

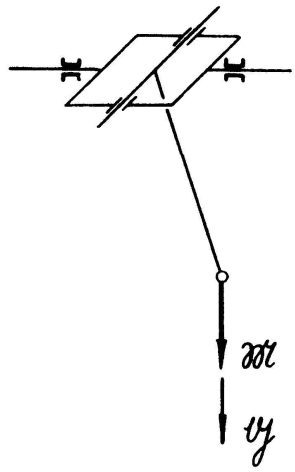

Fig. 6

Verallgemeinert man die Beziehungen von Ziffer 3 durch Übertragung auf die Gesamtheit der angreifenden Kräfte, so erhält man aus (3. 3) für das skleronome System

$$dA = \sum_k P_k \, dq_k \tag{4.2}$$

und aus (3. 1), wenn das System auch als konservativ vorausgesetzt wird,

$$dA = -\sum_k \frac{\partial V}{\partial q_k} dq_k . \tag{4.3}$$

Die Grössen P_k sind also gemäss

$$P_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{4.4}$$

die negativen partiellen Ableitungen der potentiellen Gesamtenergie nach den Lagekoordinaten (und können zu einem Vektor im q-Raum zusammengefasst werden, welcher sich als negativer Gradient von V darstellen lässt).

5. *Die Lagrangeschen Gleichungen*

Wendet man das Prinzip der virtuellen Leistungen unter Beschränkung auf holonome Systeme[1]) auf die passenden virtuellen Verschiebungen an, bei denen je nur

[1]) Bei holonomen Systemen sind nicht nur die Lagekoordinaten q_k, sondern auch ihre Differentiale dq_k voneinander unabhängig.

eine Lagekoordinate q_k um δq_k geändert wird, so erhält man die Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k. \tag{5.1}$$

Ihre rechten Seiten werden als verallgemeinerte Kräfte bezeichnet und lassen sich als Beiwerte der δq_k im Ausdruck

$$\delta A = \sum_k Q_k \, \delta q_k \tag{5.2}$$

für die Arbeit bei der allgemeinsten virtuellen Verschiebung ablesen.

Als virtuelle bezeichnet man dabei eine mögliche, vom System nicht wirklich ausgeführte Verschiebung, durch die man sich die wirkliche Bewegung unterbrochen denkt, und zwar so, dass sämtliche Kräfte die zur wirklichen Bewegung gehörenden Beträge und Richtungen beibehalten. Es besteht also zwischen den Ausdrücken (4. 2) und (5. 2) (auch bei skleronomen Systemen, wo sie sich formal kaum unterscheiden) insofern ein grundsätzlicher Unterschied, als die wirkliche Arbeit (4. 2) mit einer wirklichen Verschiebung und den zugehörigen Kräften, die virtuelle (5. 2) dagegen mit einer virtuellen Verschiebung und den zur wirklichen Bewegung gehörenden Kräften gebildet wird. Die verallgemeinerten Kräfte Q_k in (5. 2) fallen daher im allgemeinen nicht mit den P_k in (4. 2) zusammen, sondern enthalten im Gegensatz zu diesen auch die gyroskopischen, das heisst diejenigen Kräfte, welche bei passenden virtuellen, nicht aber bei wirklichen Bewegungen Arbeit leisten.

Aus (4. 4) und diesen Überlegungen folgt, dass sich die verallgemeinerten Kräfte nur bei nichtgyroskopischen Systemen als negative partielle Ableitungen

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \tag{5.3}$$

der potentiellen Energie nach den Lagekoordinaten (die vektoriell aufgefasste verallgemeinerte Kraft mithin als negativer Gradient von V im q-Raum) darstellen lassen. Die Beziehungen (5. 3) und mit ihnen die umgeformten Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \tag{5.4}$$

in denen $L = T - V$ als kinetisches Potential bezeichnet wird, gelten also nicht für alle konservativen Systeme, sondern müssen bei den gyroskopischen durch

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} + G_k \tag{5.5}$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = G_k \tag{5.6}$$

ersetzt werden, wobei die G_k die verallgemeinerten gyroskopischen Kräfte sind, die sich dem Ausdruck

$$\delta A_G = \sum_k G_k \, \delta q_k \tag{5.7}$$

für ihre virtuelle Arbeit entnehmen lassen.

So hat man beispielsweise am freien Massenpunkt (Figur 7), wenn seine Relativbewegung bezüglich eines gleichförmig um die z-Achse rotierenden Koordinatensystems untersucht werden soll, neben der Schwerkraft die Zentrifugal- und die (gyroskopische) Corioliskraft einzuführen. Der Massenpunkt ist konservativ; die in

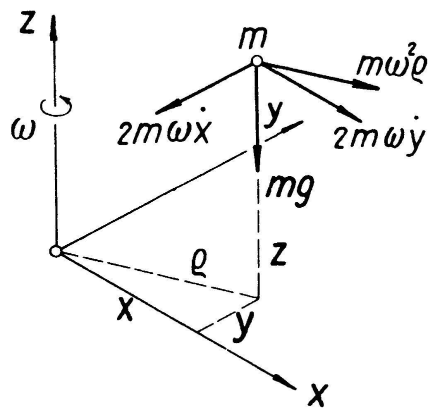

Fig. 7

Wirklichkeit keine Arbeit leistende Corioliskraft liefert aber keinen Beitrag zur potentiellen Energie

$$V = -\frac{1}{2}\, m\, \omega^2 (x^2 + y^2) + m\, g\, z$$

und würde bei Verwendung von (5.4) verlorengehen. Mit (5.7) erhält man aber aus

$$\delta A_G = 2\, m\, \omega\, (\dot{y}\, \delta x - \dot{x}\, \delta y)$$

die verallgemeinerten gyroskopischen Kräfte

$$G_x = 2\, m\, \omega\, \dot{y}, \qquad G_y = -2\, m\, \omega\, \dot{x}, \qquad G_z = 0$$

und sodann mit (5.6) die auch aus dem Newtonschen Gesetz folgenden Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\ddot{x} - 2\, \omega\, \dot{y} - \omega^2 x = 0, \qquad \ddot{y} + 2\, \omega\, \dot{x} - \omega^2 y = 0, \qquad \ddot{z} + g = 0.$$

In diesem und in anderen Fällen ist es möglich, die verallgemeinerten gyroskopischen Kräfte gemäss

$$G_k = -\frac{\partial W}{\partial q_k}$$

von einem auch von den verallgemeinerten Geschwindigkeiten abhängigen Potential $W(q, \dot{q})$ abzuleiten. Damit dann aber die Lagrangeschen Gleichungen mit $L = T - V - W$ in der Gestalt (5. 4) verwendet werden könnten, müsste W eine lineare Funktion der $\dot{q}_k$ allein, also entgegen der Voraussetzung von den q_k unabhängig sein. Um die Lagrangeschen Gleichungen auch für gyroskopische konservative Systeme in der Form (5. 4) anschreiben zu können, muss man offenbar darauf verzichten, die Lagrangesche Funktion als Differenz einer kinetischen und potentiellen

Energie aufzufassen, und die G_k gemäss

$$G_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial M}{\partial q_k} \tag{5.8}$$

von einer Funktion $M(q, q)$ ableiten können. Da man hiefür auch

$$G_k = \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_k}\right)\ddot{q}_i\right] - \frac{\partial M}{\partial q_k}$$

schreiben kann und die G_k als Funktionen der q_k und $\dot{q}_k$ allein vorausgesetzt wurden, folgt

$$\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_k} = f_k(q).$$

Es müssen also die Funktion M von der Form

$$M = \sum_i f_i(q)\,\dot{q}_i$$

und die G_k von der Gestalt

$$G_k = \frac{df_k}{dt} - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\dot{q}_i = \sum_i \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i \tag{5.9}$$

sein.

Im dreidimensionalen Raum ist (5. 9) dahin zu interpretieren, dass sich der Vektor $\mathfrak{G}$ der gyroskopischen Kraft als Vektorprodukt eines Rotors rot $\mathfrak{f}$ mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathfrak{q}}$ darstellen lassen muss. Dies ist zum Beispiel[1]) bei der Lorentzkraft $\mathfrak{L} = e(\mathfrak{v} \times \mathfrak{H})/c$ der Fall, da die magnetische Feldstärke mit $\mathfrak{H} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$ von einem Vektorpotential abgeleitet werden kann. Es trifft auch für die Corioliskraft $\mathfrak{C} = 2\,m\,\mathfrak{v} \times \mathfrak{o}$ zu, denn die doppelte Winkelgeschwindigkeit $2\,\mathfrak{o}$ lässt sich als Rotor der Führungsgeschwindigkeit deuten.

Sind die G_k durch (5. 9) gegeben, so erhält man für ihre wirkliche (im Gegensatz zur virtuellen) Leistung den Ausdruck

$$\sum_k G_k\,\dot{q}_k = \sum_{i,k}\left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i} - \frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\,\dot{q}_k = 0. \tag{5.10}$$

Hieraus folgt nebenbei, dass bei dissipativen Systemen, für welche diese Überlegungen auch gelten, die Lagrangeschen Gleichungen in der Form (5. 4) ausscheiden, während sie andererseits bekanntlich[2]) auch für rheonome und andere Systeme, bei denen ein explizit von der Zeit abhängiges Potential $V(q, t)$ existiert, ihre Gültigkeit behalten.

Bleibt man bei den konservativen Systemen, so gelten die Lagrangeschen Gleichungen in der Gestalt (5. 4) einmal beim Fehlen gyroskopischer Kräfte, dann aber auch, falls sich die verallgemeinerten gyroskopischen Kräfte in der Form (5. 9) darstellen lassen (das heisst spezielle Linearkombinationen der verallgemeinerten Geschwindigkeiten sind). Das kinetische Potential L lässt sich im zweiten Falle freilich nicht mehr als Differenz der beiden Energien T und V auffassen, mit denen der Energiesatz (4. 1) nach wie vor zu bilden ist.

HANS ZIEGLER, Zürich.

[1]) Vgl. etwa H. C. CORBEN und PHILIP STEHLE, *Classical Mechanics* (John Wiley & Sons, New York und London 1950), S. 69.

[2]) Vgl. H. FAVRE, *Cours de Mécanique*, Bd. II (Gebr. Leemann, Zürich 1947), S. 379.