Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 7 (1952)
Heft: 5

Rubrik: Kleine Mitteilungen

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Offenbar gilt nun aber

$$\lim_{n\to\infty} A_\mu^2 = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\mu\,\pi}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\mu\,\pi}{n}\right)\right]^2 = 1. \tag{17}$$

Wenden wir also (16) und (17) auf (15) an, so folgt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\frac{1}{A_\mu^2}\right)\frac{1}{k^2\,\pi^2} = 0 \tag{18}$$

oder, ausgeschrieben gemäss (14) und (13),

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{1}{k^2\,\pi^2} - \frac{1}{n^2\,\mathrm{tg}\left(\frac{k\,\pi}{n}\right)}\right\} = \theta.$$

Nach Multiplikation mit π^2 ergibt sich daher unter Beachtung von (11)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{19}$$

womit die Begründung von (1) vollendet ist.

Nach demselben Verfahren erhält man natürlich auch die Reihen der reziproken geraden Potenzen

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2p}} = \frac{2^{2p-1}\,\pi^{2p}\,B_p}{(2\,p)\,!}. \tag{20}$$

Durch passende Auswertung der Gleichung (3) gelingt es überdies, die Partialbruchreihen

$$\mathrm{ctg}\,(\pi\,x) = \frac{1}{\pi\,x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\,x}{\pi\,(x-k^2)} \tag{21}$$

und

$$\frac{1}{\sin\,(\pi\,x)} = \frac{1}{\pi\,x} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,x}{x^2-k^2} \tag{22}$$

sowie ihre zu (20) analogen Verallgemeinerungen zu gewinnen.

W. SCHERRER, Bern.

Kleine Mitteilungen

Einteilung der Dreiecksformen

Vorbemerkung

Die klassische Einteilung der Dreiecke in spitzwinklige und stumpfwinklige hat den Vorzug grösster Einfachheit und unmittelbarer Erkennbarkeit. Sie ist nur insofern nicht restlos befriedigend, als sie leicht zu der Meinung verleitet, es gäbe ungefähr ebenso viele spitzwinklige wie stumpfwinklige Dreiecke.

In Wahrheit gibt es – in einem noch zu präzisierenden Sinne – dreimal so viele stumpfwinklige Dreiecke wie spitzwinklige. Es erscheint daher wünschenswert, die ersteren in möglichst ungezwungener Weise zu unterteilen. Eine solche, die klassische ergänzende Einteilung wird im folgenden aufgezeigt.

Der Formenbereich

Es werden nur ebene reelle Dreiecke betrachtet. Ihre Grösse spielt keine Rolle. Dreiecke mit nicht verschwindenden Winkeln sollen eigentliche heissen.

Zwei Dreiecke gelten als formgleich, wenn sie in den Winkeln übereinstimmen. Formgleiche eigentliche Dreiecke sind ähnlich, da sie auch in den Seitenverhältnissen übereinstimmen. Es ist zweckmässig, auch uneigentliche Dreiecke mit teilweise verschwindenden Winkeln zuzulassen.

Jedes Dreieck hat einen grössten, einen mittleren und einen kleinsten Winkel; sie seien in dieser Reihenfolge mit x, y und z bezeichnet. Für diese drei Grössen gelten also die vier Ungleichungen

$$\pi \geqq x \geqq y \geqq z \geqq 0, \tag{1}$$

und die Gleichung

$$x + y + z = \pi. \tag{2}$$

Eliminiert man y mittels (2), so folgt aus

$$x \geqq y: \quad 2x + z \geqq \pi, \tag{3}$$

und aus

$$y \geqq z: \quad x + 2z \leqq \pi. \tag{4}$$

Ferner ist

$$z \geqq 0. \tag{5}$$

(4) und (5) ziehen $x \leqq \pi$ nach sich.

Deutet man x und z als kartesische Punktkoordinaten in einer (x, z)-Ebene, so erfüllen die zulässigen Punkte (x, z) ein Dreieck mit den Ecken $A(\pi/3;\ \pi/3)$, $D(\pi/2;\ 0)$ und $F(\pi;\ 0)$ (Figur 1).

Die Punkte auf AD entsprechen (3) mit dem Gleichheitszeichen und repräsentieren Dreiecke mit $x = y$, also gleichschenklige Dreiecke mit grösstem Winkel an der Basis («Keile»).

Die Punkte auf AF entsprechen (4) mit dem Gleichheitszeichen und repräsentieren Dreiecke mit $y = z$, also gleichschenklige Dreiecke mit grösstem Winkel an der Spitze («Giebel»).

Die Punkte auf DF mit $z = 0$ repräsentieren uneigentliche Dreiecke. Ausser für D selber ist z der einzige Nullwinkel. Solche Dreiecke können auf zweierlei Art realisiert werden: Entweder dadurch, dass eine Ecke ins Unendliche rückt, dann hat man einen schräg oder senkrecht abgeschnittenen Parallelstreifen vor sich, oder dadurch, dass zwei Ecken in gegebener Richtung unbegrenzt nahe zusammenrücken, was eine Art Nadel ergibt.

Für D selber verschwindet auch y, so dass $x = \pi$ wird. Das kann realisiert sein in Form einer geteilten Strecke. Das Teilverhältnis bleibt dabei willkürlich.

Die genannten Dreiecke auf dem Rand von ADF sollen Randdreiecke heissen. Sie sind entweder gleichschenklig oder formdegeneriert. Alle Dreiecke im Innern von ADF repräsentieren eigentliche und ungleichschenklige Dreiecke.

Assoziierte Dreiecke

Abgesehen von gewissen Grenzfällen bilden die Ecken eines Dreiecks zusammen mit dem Höhenschnittpunkt Ecken eines vollständigen orthogonalen Vierecks. Jeder dieser vier Punkte ist Höhenschnittpunkt im Dreieck der andern. Jedes der vier dergestalt assoziierten Dreiecke bestimmt die drei andern.

Die vier Dreiecke einer solchen Gruppe sind im allgemeinen formungleich. Sie seien nach steigendem grösstem Winkel geordnet und mit D_0 bis D_3 numeriert. Man überzeugt sich leicht, dass D_0 nicht stumpfwinklig und dass nur D_0 spitzwinklig sein kann. Seine Winkel seien in abnehmender Folge u, v, w, und es sei

$$\frac{\pi}{2} > u > v > w > 0, \tag{6}$$

dann entnimmt man der Figur des genannten Vierecks (Figur 2) folgende Winkelbeziehungen (x, y, z haben die frühere Bedeutung):

	x	y	z
D_0	u	v	w
D_1	$\pi - u$	$\pi/2 - w$	$\pi/2 - v$
D_2	$\pi - v$	$\pi/2 - w$	$\pi/2 - u$
D_3	$\pi - w$	$\pi/2 - v$	$\pi/2 - u$

(7)

Die Winkelsumme in jeder Zeile der Tabelle (7) ist π, und jede Zeile bestimmt eindeutig die drei andern. Ausserdem entnimmt man (7), unabhängig von den speziellen Werten von u, v und w, folgende Vorzeichen für die Ausdrücke $(x - \pi/2)$, $(x - z - \pi/2)$ und $(x - y - \pi/2)$:

	$x - \pi/2$	$x - z - \pi/2$	$x - y - \pi/2$
D_0	$-$	$-$	$-$
D_1	$+$	$-$	$-$
D_2	$+$	$+$	$-$
D_3	$+$	$+$	$+$

(8)

Die drei Ausdrücke folgen sich nach abnehmender Grösse, und die vier assoziierten Dreiecke realisieren die vier möglichen Vorzeichenkombinationen und unterscheiden sich durch sie.

Man bemerke noch, dass vier nach Tabelle (7) assoziierte Dreiecke bei passendem Grössenverhältnis zur Figur des vollständigen orthogonalen Vierecks zusammengefügt werden können und dass sie dann den Feuerbach-Kreis gemeinsam haben.

Die vier Dreiecksklassen

Tabelle (8) suggeriert für den Formenbereich die folgenden drei Teilungslinien:

Grenze 01:
$$x = \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Es ist die Linie BD in Figur 1. Ihre Punkte repräsentieren alle rechtwinkligen Dreiecke, und sie trennt die spitzwinkligen Formen von den stumpfwinkligen.

Grenze 12:
$$x - z = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Linie DC: ihre Punkte repräsentieren diejenigen Dreiecke, bei denen sich der kleinste

Winkel vom grössten um einen Rechten unterscheidet. Sie trennt die Formen, bei denen diese Differenz kleiner ist als $\pi/2$ von denen, wo sie grösser ist als $\pi/2$.

Grenze 23: $$x - y = \frac{\pi}{2}, \quad \text{das ist} \quad 2x + z = \frac{3\pi}{2}. \tag{11}$$

Linie CE: ihre Punkte repräsentieren diejenigen Dreiecke, bei denen sich schon der mittlere Winkel um einen rechten vom grössten unterscheidet. Sie trennt die Formen, bei denen diese Differenz kleiner ist als $\pi/2$ von denen, wo sie grösser ist als $\pi/2$.

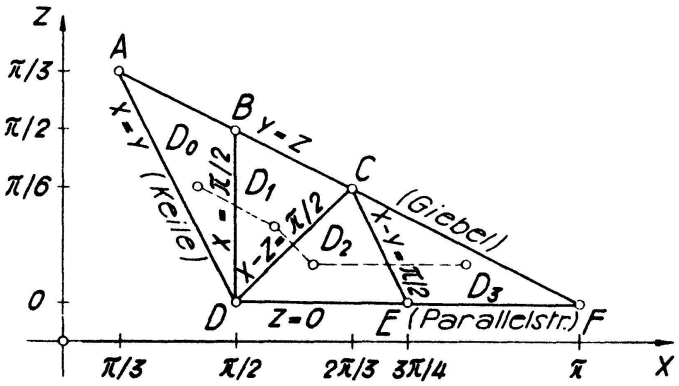


Fig. 1

Formenbereich mit einem Quadrupel assoziierter Dreiecke.

Man bemerkt, dass die Geraden (9), (10) und (11) sich wohl auf dem Rande, aber nicht im Innern des Formenbereiches schneiden. Sie zerlegen diesen also in vier getrennte Gebiete.

Dreiecke, welche einer der Gleichungen (9), (10), (11) genügen, nenne ich Grenzdreiecke. Sie bilden zusammen mit den Randdreiecken eine nur einfach unendliche Menge «besonderter» Dreiecke. Die nichtbesonderten Dreiecke bilden dagegen eine zweifach unendliche Menge, die nach obigem in vier elementfremde Klassen zerfällt. Jede Klasse enthält nur Dreiecke von einem der vier durch Tabelle (8) charakterisierten Typen. Klasse D_0 insbesondere umfasst die ungleichschenklig-spitzwinkligen Dreiecke, die Klasse D_1, D_2, D_3 dagegen die eigentlichen, ungleichschenklig-stumpfwinkligen Dreiecke erster, zweiter und dritter Art.

Die benachbarten Gebiete D_0 und D_1 sind schiefsymmetrisch in bezug auf die Grenze 01. Ebenso sind D_1 und D_2 normalsymmetrisch in bezug auf 12 und D_2 und D_3 schiefsymmetrisch in bezug auf 23. Und diese Symmetrien entsprechen genau den durch Tabelle (7) gestifteten Assoziationen, wie man leicht verifiziert. Die Menge der nichtbesonderten Dreiecke ordnet sich somit zu einer zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von elementfremden Quadrupeln, deren jedes aus klassenfremden Dreiecken besteht. Die vier Klassen sind einander gliedweise assoziiert und in diesem Sinne gleich mächtig.

Auch die besonderten Dreiecke lassen sich durch die Vierecksfigur assoziieren, und zwar nur unter sich. Wegen auftretender Symmetrien und Koinzidenzen sind aber nicht mehr alle vier assoziierten Formen verschieden.

Von den eigentlichen Randdreiecken seien noch hervorgehoben: A, das gleichseitige Dreieck, ferner B, das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck, und C, das Giebeldreieck mit dem Winkel $2\pi/3$. Unter den uneigentlichen Dreiecken ist D der rechtwinklig und E der unter 45° abgeschnittene Parallelstreifen, und F repräsentiert die Schar der in verschiedenen Verhältnissen geteilten Strecken.

Klasse und Feuerbach-Kreis

Bedenkt man, dass bei einem Dreieck der Höhenschnittpunkt immer der stumpferen von zwei Ecken näher liegt und dass infolgedessen beim spitzwinkligen Dreieck der Umkreismittelpunkt und also auch das Zentrum F des Feuerbach-Kreises stets auf

derjenigen Seite einer Höhe liegt, auf der sich der kleinere Winkel befindet, so versteht man, was Figur 2 unmittelbar anschaulich zeigt:

F liegt im Innern von D_0 und D_1 und im Äussern von D_2 und D_3. Sein Abstand von der nächsten Ecke ist bei D_0 grösser, bei D_1, D_2 und D_3 aber kleiner als der Radius.

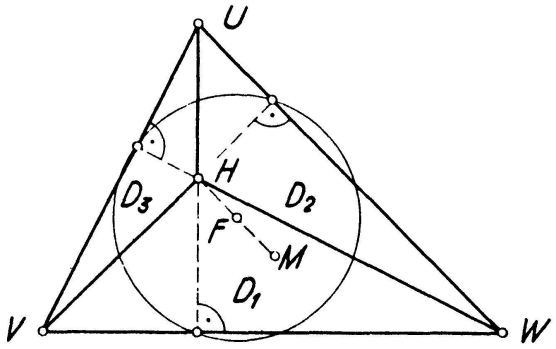


Fig. 2

Spitzwinkliges Dreieck UVW mit den drei assoziierten stumpfwinkligen Dreiecken D_1, D_2, D_3.

F liegt bei D_2 jenseits der mittleren Seite, bei D_3 jenseits der mittleren und der kleinsten Seite. Für die vier Klassen ergibt sich somit folgende Tabelle:

Klasse	Lage des Feuerbach-Zentrums	
D_0	Abstand von nächster Ecke > Radius	diesseits aller Seiten
D_1	Abstand von stumpfer Ecke < Radius	
D_2		jenseits mittlerer, diesseits kürzester Seite
D_3		jenseits mittlerer und kürzester Seite

Für die Grenzdreiecke gilt: F liegt bei den rechtwinkligen Dreiecken D_{01} in der Mitte der kürzesten Schwerlinie, bei D_{12} auf der mittleren Seite, und bei D_{23} auf der Verlängerung der kürzesten Seite über die stumpfe Ecke hinaus. A. Stoll, Zürich.

Verallgemeinerung einer Teilbarkeitsregel für 7

Um natürliche Zahlen n, zum Beispiel $n = 3395$, auf ihre *Teilbarkeit durch 7* zu untersuchen, kann man bekanntlich[1]) so vorgehen: Die letzte Ziffer wird gestrichen und ihr doppeltes Produkt vom Rest der Zahl subtrahiert.

$$\begin{array}{r|l} 339 & 5 \\ -\ 10 & \quad (10 = 2 \cdot 5) \\ \hline 32 & 9 \\ -\ 18 & \quad (18 = 2 \cdot 9) \\ \hline 14 & \end{array}$$

[1]) Vergleiche zum Beispiel W. Lietzmann, *Sonderlinge im Reich der Zahlen* (F. Dümmlers Verlag, Bonn 1948), S. 109.

Dann und nur dann, wenn die hierbei erhaltenen Zahlen durch 7 teilbar sind, ist es auch die ursprünglich gegebene Zahl. Diese Regel beruht darauf, dass $(10, 7) = 1$ und $z(2 \cdot 10 + 1) \equiv 0 \pmod 7$ ist. Dabei ist z die Endziffer von n.

Diese Regel lässt sich für $p > 7$ *verallgemeinern*, wenn wir die Lösungen y der folgenden Kongruenz betrachten[1]:

$$z(y \cdot 10 + 1) \equiv 0 \pmod p \qquad (p > 7,\ y > 0)$$

oder, da $(z, p) = 1$ ist:

$$\underline{y \cdot 10 + 1 \equiv 0 \pmod p.} \qquad \text{(A)}$$

Diese Kongruenz ist wegen $(10, p) = 1$ immer lösbar. Für einige Zahlen p seien die kleinsten positiven y angegeben:

$p = 11$	$y = 1$
13	9
17	5
31	3
37	11

usw.

Beispiel: Ist $37 \mid 11\,396$? Für $p = 37$ entnehmen wir der obigen Zusammenstellung $y = 11$, so dass wir die folgende Rechnung erhalten:

$$\begin{array}{r|l} 1139 & 6 \\ -\,66 & \\ \hline 107 & 3 \\ -\,33 & \\ \hline 74 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ (66 = 11 \cdot 6) \\ \\ (33 = 11 \cdot 3) \\ \\ \end{array}$$

Da $37 \mid 74$, so ist auch $37 \mid 11\,396$.

In vielen Fällen ist es bei grossen Werten y einfacher, eine abgeänderte – und soviel uns bekannt ist, nirgends erwähnte – Regel zu benutzen, indem passende Vielfache der Endziffer z *addiert* statt subtrahiert werden. Wir betrachten dazu die Kongruenz

$$\underline{x \cdot 10 - 1 \equiv 0 \pmod p.} \qquad (p > 7,\ x > 0) \quad (B)$$

Für verschiedene p ergeben sich als kleinste positive Lösungen x:

$p = 13,$	$x = 4$
19	2
23	7
29	3

usw.

Beispiel: Wir finden so eine einfache *19er-Regel*: Gilt $19 \mid 323$? Für $p = 19$ ist $x = 2$ und die Rechnung lautet:

$$\begin{array}{r|l} 32 & 3 \\ +\,6 & \\ \hline 38 & \end{array} \qquad (6 = 2 \cdot 3)$$

Weil $19 \mid 38$, so ist auch $19 \mid 323$.

Ebenso bequem ist die *29er-Regel* mit $x = 3$.

Die Lösungen von (A) und (B) genügen der Kongruenz:

$$\underline{x + y \equiv 0 \pmod p.} \qquad \text{(C)}$$

---

[1]) Siehe auch: O. Hofmann, zitiert in «Naturforschung und Medizin in Deutschland», Bd. 1/I, S. 23 (Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1948):

Demnach fällt die Regel, nach der die Vielfachen der Endziffer z addiert werden, im wesentlichen mit der Subtraktionsregel zusammen, indem im ersten Falle einfach die Zahl $z(x-p) < 0$ zu subtrahieren ist.

Die kleinsten positiven Lösungen der Kongruenzen (A) und (B) können wir leicht allgemein bestimmen. Stellen wir zu diesem Zwecke die Primzahlen $p > 7$ in der Form $10a+1$, $10a+3$, $10a+7$, $10a+9$ dar, so finden wir, wie sich leicht nachprüfen lässt, die untenstehende Tabelle für die gesuchten Faktoren x und y. Das Stichwort «Subtraktion» oder «Addition» soll angeben, ob es sich um eine Regel vom Typ der 7er-Regel (Produkt subtrahieren) oder vom Typ der 19er-Regel (Produkt addieren) handelt.

p	Regel	x oder y
$10a+1$	*Subtraktion*	a
$10a+1$	Addition	$9a+1$
$10a+3$	Subtraktion	$7a+2$
$10a+3$	*Addition*	*$3a+1$*
$10a+7$	*Subtraktion*	*$3a+2$*
$10a+7$	Addition	$7a+5$
$10a+9$	Subtraktion	$9a+8$
$10a+9$	*Addition*	*$a+1$*

Für die praktische Untersuchung der Teilbarkeit wird man also für die Primzahlen $p \equiv 1$ oder 7 (mod 10) zweckmässig das Verfahren der Subtraktion (mit den Faktoren a bzw. $3a+2$) und für die Primzahlen $p \equiv 3$ oder 9 (mod 10) dasjenige der Addition (mit den Faktoren $3a+1$ bzw. $a+1$) anwenden, da in diesen Fällen mit den kleinern Faktoren y bzw. x zu rechnen ist.

Im Falle, wo das Produkt $x \cdot z$ addiert wird, wäre es denkbar, dass die gemäss der Regel weiter zu untersuchende Zahl grösser wird als das ursprünglich gegebene n. Dass dies nicht eintritt bei den Zahlen n, für die es sinnvoll ist, die Regeln anzuwenden, zeigt die folgende Abschätzung. Aus $x < p$ und $p \leqq \sqrt{n}$ folgt für den ungünstigsten Fall $z = 9$ die Ungleichung

$$\frac{n}{10} + 9x < n$$

oder

$$\frac{n}{10} + 9\sqrt{n} < n.$$

Also

$$10\sqrt{n} < n,$$

was für $n > 100$ immer erfüllt ist. Somit werden für $n > 100$ und $p \leqq \sqrt{n}$ auch bei der Addition des Produktes $x\,z$ die neu gebildeten Zahlen stets kleiner.

E. Roth und R. Ineichen, Luzern.

Bemerkung. Ein Leser teilte uns mit, dass R. Grammel (Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 4. Bd., 1951/52) auf das folgende allgemeine und einfache Kriterium hinwies:

Die ganze Zahl $\sum_{\nu=0}^{k} 10^\nu a_\nu$ ist mod n kongruent ihrer gewichteten Quersumme $\sum_{\nu=0}^{k} r_\nu a_\nu$, in der als Gewichte r_ν der Reihe nach die bei der Dezimalbruchentwicklung von $1/n$ auftretenden Reste (mit $r_0 = 1$ als ersten Rest) genommen werden.

Nach Definition von r_ν ist nämlich $10^\nu/n =$ ganze Zahl $+ (r_\nu/n)$, also $10^\nu \equiv r_\nu \pmod{n}$. Die bekannten Teilbarkeitsregeln ergeben sich ohne weiteres als Sonderfälle (man beachte, dass an Stelle von r_ν natürlich auch der negative Rest $r'_\nu = r_\nu - n$ genommen werden darf).

Elementare Berechnung der Krümmungsradien der Ellipse in den Scheiteln[1])

Die Berechnung geschieht mit Hilfe des folgenden Satzes: Sind A und P zwei Punkte der Kurve C, so ist der zu A gehörende Krümmungsmittelpunkt von C die Grenzlage des Schnittpunktes der Kurvennormalen in A und P, wenn P auf C gegen A strebt.

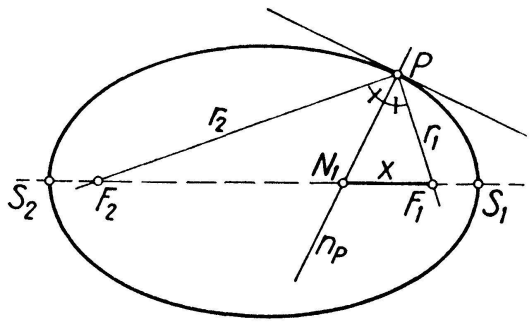


Fig. 1

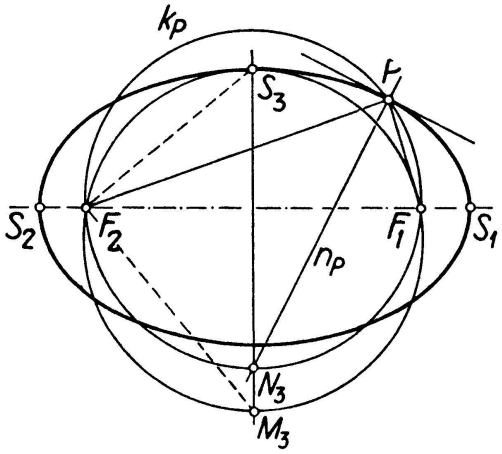


Fig. 2

1. Der Krümmungsradius ϱ_a im Hauptscheitel (Figur 1): S_1, S_2 seien die Hauptscheitel einer Ellipse (mit den Halbachsen a, b und der linearen Exzentrizität e), F_1, F_2 ihre Brennpunkte, P ein beliebiger Kurvenpunkt. Da die Kurvennormale n_P in P den Winkel der Brennstrahlen r_1, r_2 halbiert, gilt (wenn $\overline{N_1F_1} = x$ gesetzt wird):

$$x : (2\,e - x) = r_1 : r_2\,.$$

Lässt man P gegen S_1 streben, so strebt einerseits der Schnittpunkt N_1 von n_P mit der Kurvennormalen in S_1 gegen den zu S_1 gehörenden Krümmungsmittelpunkt, also x gegen $x_1 = \varrho_a - a + e$, und andererseits der Quotient $r_1 : r_2$ gegen $(a - e) : (a + e)$. Man erhält daher die Gleichung

$$x_1 : (2\,e - x_1) = (a - e) : (a + e),$$

aus der sich $\varrho_a = b^2/a$ ergibt.

2. Der Krümmungsradius ϱ_b im Nebenscheitel (Figur 2): Die Annahmen seien die gleichen wie oben, ergänzt durch den Nebenscheitel S_3. Legt man den Kreis k_P durch F_1, F_2 und P, so liegt der Schnittpunkt N_3 dieses Kreises mit der Kurvennormalen n_P auf der Nebensymmetrieachse, da n_P als Halbierende des Winkels F_1PF_2 den Bogen $F_1N_3F_2$ in N_3 halbiert (Peripheriewinkelsatz). N_3 ist also der Schnittpunkt der Kurvennormalen in P und S_3. Lässt man nun P gegen S_3 streben, so strebt N_3 gegen den Schnittpunkt M_3 des Kreises durch F_1, F_2, S_3 mit der Nebensymmetrieachse. Dieser ist daher der zu S_3 gehörende Krümmungsmittelpunkt. Durch Anwendung des Kathetensatzes auf das rechtwinklige Dreieck $M_3F_2S_3$ ergibt sich dann: $\varrho_b = a^2/b$.

W. Prokop, Winterthur.

Zur analemmatischen Sonnenuhr

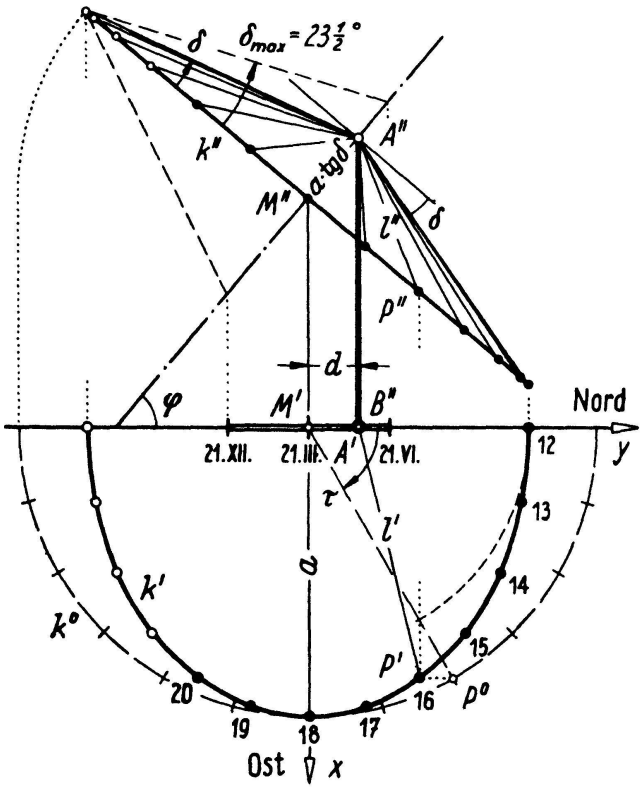
H. Stohler beschrieb und erläuterte unlängst (El. Math. 7, 61–64 [1952]) eine höchst originelle «analemmatische» *Horizontalsonnenuhr* mit lotrechtem Zeiger, wobei er bemerkte, dass eine einfache und durchsichtige Erklärung dieser Uhr bislang zu vermissen sei. Seine eigene, analytische Ableitung ist wohl nicht schwierig, setzt aber doch gewisse Kenntnisse der sphärischen Trigonometrie voraus und stellt letzten Endes bloss die

[1]) Erst nach Eingang dieser Mitteilung wurde festgestellt, dass die darin beschriebene Berechnungsart in knapper Form schon in der Arbeit von C. Bindschedler, *Zur Elementargeometrie der Ellipse* (El. Math. 3, 108 [1948]), enthalten ist. Wegen des Interesses, auf das elementare Berechnungen von Krümmungsradien immer wieder stossen, soll die Mitteilung trotzdem publiziert werden.

Verifikation eines Sachverhalts dar, dessen geometrischer Kern verborgen bleibt. Es sei daher gestattet, eine rein geometrische Darstellung kurz vorzuführen, die an Einfachheit und Durchsichtigkeit wohl kaum etwas zu wünschen übriglassen dürfte.

Das Wesen der genannten Sonnenuhr besteht darin, dass der *Standpunkt* des lotrechten Zeigerstabes in bestimmter Weise vom *Datum* abhängig gemacht wird, damit sein auf die Grundebene fallender Schatten auf einem *unveränderlichen Kranz von Stundenmarken* während des ganzen Jahres die richtige Tageszeit abzulesen gestatte.

Sei also AB ein *lotrechter Stab*. Sein *Schlagschatten* auf die den Basispunkt B enthaltende Horizontalebene wird von dem durch das freie Ende gehenden *Lichtstrahl* (Sonnenstrahl) l bestimmt und deckt sich mit dessen *Grundriss* l'. Dieser Lichtstrahl überstreicht – für einen irdischen Beobachter – im Verlauf eines Tages mit konstanter



Geschwindigkeit einen gewissen von A ausstrahlenden *Drehkegel*, dessen Achse die Richtung der Erdachse hat, also unter dem Breitenwinkel φ des Standortes gegen Norden ansteigt und dessen Öffnungswinkel $180° - 2\,\delta$ beträgt, wenn δ die Deklination der Sonne bezeichnet (Figur). Ein bestimmter *Punkt* P des Lichtstrahls l beschreibt bei der Drehung um die Kegelachse PM einen *Parallelkreis* k, auf dem seine Stundenlagen die Ecken eines regelmässigen 24-Ecks bilden. Die *Grundrisse* dieser Stundenlagen können nach dem eingangs Gesagten als *Stundenmarken* für den Stabschatten dienen, allerdings zunächst nur während des einen Tages.

Diese Stundenmarken P' bilden ein zu dem regulären 24-Eck affines und sind nach den Regeln der darstellenden Geometrie – etwa mittels einer Umklappung oder Paralleldrehung k° von k – leicht zu konstruieren. Sie liegen auf einer *Ellipse* k', dem Grundriss des Kreises k; der Radius a von k gibt gleichzeitig die grosse Halbachse der Ellipse ab, während die kleine Halbachse die Länge $b = a \sin\varphi$ hat. Die kleine Ellipsenachse weist nach Norden und geht durch den Fusspunkt B des Zeigerstabes. Die Zeitmarken lassen sich koordinatenmässig unter Benützung des (vom Mittagspunkt aus gezählten) Stundenwinkels τ durch

$$x = a \sin\tau\,, \quad y = b \cos\tau \quad \text{mit} \quad b = a \sin\varphi \tag{1}$$

festlegen, wobei x nach Osten und y nach Norden positiv orientiert sind.

Denkt man sich die geschilderte Konstruktion für andere Deklinationswerte δ, jedoch unter Beibehaltung des Kreisradius a wiederholt, so erhält man offensichtlich lauter kongruente und gleichgestellte Ellipsen mit *kongruenten Markenpolygonen*. Es liegt daher nahe, diese durch Verschiebung in Nord-Süd-Richtung zur Deckung zu bringen: Dann muss aber der Zeigerstab von Tag zu Tag einen neuen Standort haben, und zwar hat er, wie aus der Figur abzulesen ist, jeweils in der Entfernung

$$d = a \operatorname{tg} \delta \cos \varphi \tag{2}$$

nördlich vom Ellipsenzentrum zu stehen. Die Konstruktion der entsprechenden *Kalenderskala* geht aus der Figur wohl zur Genüge hervor. Dass hierbei viele der nur zu Erklärungszwecken aufgenommenen Linien entbehrlich sind, liegt auf der Hand; auch die Ermittlung der Stundenskala kann mittels der Ellipsenkonstruktion von PROKLUS noch rationalisiert werden.

Abschliessend sei bemerkt, dass sich die geometrischen Überlegungen ohne weiteres auch auf eine Zifferblattebene beliebiger Stellung und einen Zeigerstab beliebiger Richtung übertragen lassen: An Stelle des Grundrisses hat dann eben die Parallelprojektion in Zeigerrichtung auf die Ziffernebene zu treten. W. WUNDERLICH, Wien.

Aufgaben

Aufgabe 131. Man beweise

$$\sqrt{2} = 2 \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(4k-3)(4k-1)}{(4k-2)(4k-2)}$$

und stelle eine entsprechende Produktentwicklung für $\sqrt{n}$ auf.

K. SCHNEIDER, Oberdorf, BL.

Zu dieser Aufgabe schreibt uns Prof. W. SIERPINSKI (Warschau):

«Ce problème a été résolu par moi en 1908[1]). La formule pour $\sqrt{n}$ trouvée par moi était

$$\sqrt{n} = \prod_{k} \frac{k + (-1)^{[k/n]}}{k}, \tag{1}$$

où le produit doit être étendu à toutes les valeurs k impaires et non divisibles par n. Pour $n = 2$, on trouve la formule bien connue de EULER[2])

$$\sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdots$$

déduite par lui du développement de $\sin \pi x$ en produit infini pour $x = 1/4$. Cette formule donne tout de suite la formule du problème 131.

Pour $n = 3$, on trouve la formule de STERN[3])

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 7} \cdot \frac{10 \cdot 14}{11 \cdot 13} \cdot \frac{16 \cdot 20}{17 \cdot 19} \cdots$$

---

[1]) W. SIERPIŃSKI, C. r. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III, *1908*, 138–140.

[2]) L. EULER, *Introductio* (Lausanne 1748), p. 147. *L. Euleri Opera omnia*, Ser. I, Vol. 8, p. 198.

[3]) STERN, *Lehrbuch der algebraischen Analysis* (Leipzig 1860), p. 375.