Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 7 (1952)
Heft: 5

Artikel: Einlagerung kongruenter Kugeln in eine Kugel
Autor: Hadwiger, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16358

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer

El. Math. Band VII Nr. 5 Seiten 97–120 Basel, 15. September 1952

Einlagerung kongruenter Kugeln in eine Kugel

Wir gehen von der folgenden sich auf den gewöhnlichen Raum beziehenden Frage aus: Wie viele unter sich kongruente Kugeln fester Grösse können in einer vorgegebenen grossen Kugel höchstens eingelagert[1]) werden?

Es bedeutet keine Einschränkung, anzunehmen, dass die einzulagernden Kugeln den Radius $r = 1$ aufweisen, kurz Einheitskugeln sein sollen. Es bezeichne $N(R)$ die grösstmögliche Anzahl von Einheitskugeln, die sich in einer Kugel $K(R)$ vom Radius $R \geqq 1$ einlagern lassen. Es ist offenbar $N(R)$ eine ganzzahlige monoton zunehmende Funktion von R.

Die oben gestellte Frage kann der Mathematiker mit den ihm heute zur Verfügung stehenden Kenntnissen und Methoden nicht erschöpfend beantworten, das heisst, es gelingt nicht, eine Vorschrift – etwa im günstigsten Falle eine Formel – anzugeben, welche eine exakte Berechnung des Wertes $N(R)$ für alle Radien R ermöglicht. Selbstverständlich können leicht Abschätzungen gefunden werden, aber bereits die Ermittlung feinerer Schätzungen bereitet grösste Mühe. Die hier zutage tretenden typischen Schwierigkeiten teilt dieses Problem mit zahllosen andern, die ebenso unlösbar sind, obwohl sie an die einfachsten elementargeometrischen Tatbestände anschliessen. In unserm Falle ist es offenkundig, dass die besondere Schwierigkeit der Frage darin begründet ist, dass die eingelagerten Kugeln zunächst keinem Gesetz, das ihre räumliche gegenseitige Anordnung beherrscht, unterliegen müssen.

Eine Einlagerung der grösstmöglichen Anzahl $N(R)$ von Einheitskugeln in der Kugel $K(R)$ heisst *dichteste Einlagerung*. Unter der *Dichte* einer Einlagerung versteht man das Verhältnis des total eingelagerten Kugelvolumens zum Volumen von $K(R)$.

Die *maximale Einlagerungsdichte* $D(R)$ wird also durch die dichteste Einlagerung realisiert, und sie ist offenbar durch

$$D(R) = \frac{N(R)}{R^3} \tag{1}$$

gegeben. Nach einer bis heute unbewiesenen Vermutung[2]) gilt die asymptotische

[1]) Zur mengengeometrischen Präzisierung diene folgendes: Alle Kugeln sollen abgeschlossen sein. Ein Aggregat von Kugeln nennen wir gelagert, wenn diese höchstens Randpunkte, aber keine inneren Punkte gemeinsam haben. Das Aggregat heisst in einer weiteren Kugel K eingelagert, wenn die Kugeln des Aggregates gelagert und ausserdem alle in K enthalten sind.

[2]) L. Fejes-Tóth (Veszprém, Ungarn), der das Problem der dichtesten regellosen Kugellagerung wesentlich gefördert hat, skizziert in seinem beim Springer-Verlag (Berlin) im Druck befindlichen Buch *Lagerungsprobleme in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum* einen Beweisplan, der darauf hinzielt, die Lösung des Problems auf die Diskussion verschiedener Funktionen mehrerer Veränderlichen zu reduzieren. Die Schwierigkeiten einer wirklichen Durchführung sind aber noch zu gross.

Beziehung

$$\lim_{R\to\infty} D(R) = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0{,}74048\ldots. \tag{2}$$

Die Sicherstellung von (2) wäre gleichbedeutend mit der Lösung des Problems der *dichtesten Kugellagerung im Raum* schlechthin. Das erwähnte Problem ist unter der zusätzlichen Bedingung gelöst, dass die Kugeln gitterförmig gelagert sind[1]), und die verantwortliche Dichte ist die nämliche. Es fragt sich nun, ob eine regellose Anordnung zu einer noch höheren Dichte führen kann als die regelmässige, kurz, ob hier die Ordnung durch eine Unordnung überboten werden kann, ein Tatbestand, den wir als unwahrscheinlich beurteilen.

Betrachten wir die mit (1) gegebene Dichte $D(R)$, so ist zunächst trivialerweise $D(1)=1$, und offenbar gilt für $R>1$ stets $D(R)<1$. Ferner ist es durchaus plausibel, dass $D(R)$ für genügend grosse R beständig grössere Werte annimmt als in einem anfänglichen für die Einlagerung besonders unwirtschaftlichen Bezirk. Der Dichte $D(R)$ wird demnach voraussichtlich im Bereich kleiner Radien ein Tiefstwert als untere Schranke zukommen. Damit ist die kleine Fragestellung, die wir hier beantworten wollen, erklärt:

Wie klein wird die Einlagerungsdichte $D(R)$ im ungünstigsten Fall?

Die exakte Antwort ist durch

$$\inf D(R) = \frac{1}{8} = 0{,}125 \tag{3}$$

gegeben, wobei $D(R)$ für $R \to 2$ dem angegebenen Tiefstwert beliebig nahe kommt, ohne ihn selbst zu erreichen.

Der Weg, der zu dieser einfachen Feststellung führt, bringt uns auch einige weitere Nebenergebnisse. So werden wir die Abschätzung

$$D(R) \geqq \frac{\pi}{3\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{R}\right)^3 \tag{4}$$

kennenlernen, die an sich bekannt ist[2]), für die wir aber eine dem elementaren Charakter des vorliegenden Aufsatzes entsprechende Herleitung geben. Aus (4) folgt übrigens bereits

$$\liminf_{R\to\infty} D(R) \geqq \frac{\pi}{3\sqrt{2}}, \tag{5}$$

womit in gewissem Sinne eine Hälfte der vermuteten Relation (2) nachgewiesen ist.

Es sei weiter R_n der Radius der kleinsten Kugel $K(R)$, in welcher noch n Einheitskugeln eingelagert werden können. Diese Grenzradien R_n bilden eine monoton steigende Folge, so dass

$$R_n \leqq R_{n+1} \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{6}$$

---

[1]) Zu diesem klassischen und ganz wesentlich einfacheren Problem vergleiche man etwa die hübsche Darstellung bei D. HILBERT und S. COHN-VOSSEN, *Anschauliche Geometrie* (Springer Berlin, 1932) insbesondere § 7, 39–46.

[2]) Es handelt sich um einen einfachen Spezialfall einer allgemeineren Formel für die Dichte der Kugeleinlagerung in einen konvexen Körper, die L. FEJES-TÓTH angegeben hat (vergleiche das in der Fussnote 2 auf Seite 97 erwähnte Buch).

gilt. Wie wir weiter unten sehen werden, kann für gewisse n das Gleichheitszeichen gelten.

Die mit (1) definierte Dichtefunktion $D(R)$ ist unstetig, und die Sprünge befinden sich an den durch die Werte der R_n bezeichneten Stellen.

Eine weitere in dieser Note gelöste einfache Nebenaufgabe ist die Bestimmung der sechs ersten Grenzradien. Die Resultate sind in der untenstehenden Tabelle eingesetzt.

n	R_n
1	$1 = 1{,}000$
2	$2 = 2{,}000$
3	$1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 2{,}154\ldots$
4	$1 + \sqrt{\frac{3}{2}} = 2{,}224\ldots$
5	$1 + \sqrt{2} = 2{,}414\ldots$
6	$1 + \sqrt{2} = 2{,}414\ldots$

Mit Hilfe der Grenzradien R_n lässt sich die Dichtefunktion $D(R)$ in der folgenden Weise darstellen:

$$D(R) = \frac{n}{R^3} \qquad (R_n \leqq R < R_{n+1}). \tag{7}$$

Die zugehörige Funktionskurve (Figur 1) zerfällt in abzählbar unendlich viele Parabelstücke, die zwischen konsekutive Werte R_n und R_{n+1} eingeschoben sind. Man beachte

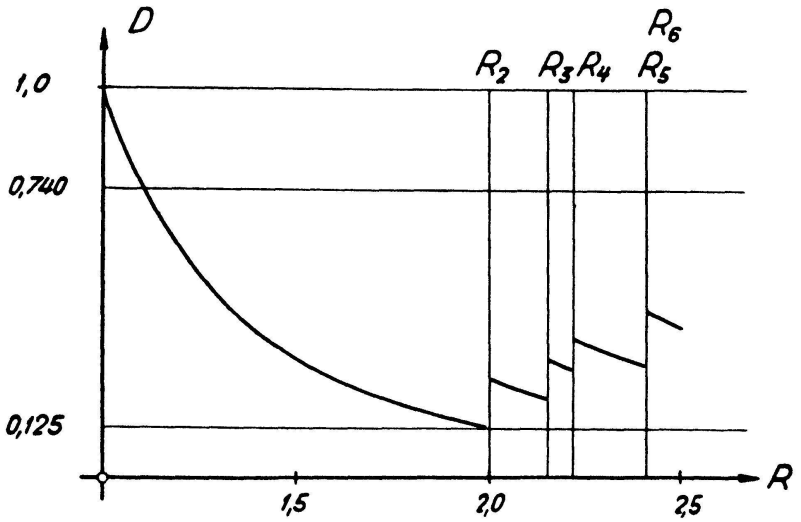

Fig. 1

aber, dass die rechtsseitigen, tiefer liegenden Endpunkte der Parabelstücke der Kurve selbst nicht angehören, da dort die von rechts stetige Funktion $D(R)$ auf den höheren Wert springt, welcher durch den linksseitigen, höher liegenden Endpunkt des nächstfolgenden Parabelstückes gegeben ist.

Wir beschreiben kurz den Gang des unten folgenden Beweises. Wir haben zu zeigen, dass

$$D(R) > \frac{1}{8} \qquad (R > 1) \tag{8}$$

ausfällt und dass der Koeffizient 1/8 hier nicht durch einen grösseren ersetzt werden kann. Damit ist die Behauptung (3) nachgewiesen. Um die Ungleichung (8) zu begründen, beweisen wir zunächst die Abschätzung (4). Aus dieser Relation folgt aber bereits (8) für alle Radien, welche der Bedingung

$$R > \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{3}{4\sqrt{2}\,\pi}}} = 2{,}235\ldots \tag{9}$$

genügen. Ungleichung (8) muss demnach nur noch für das Intervall $1 \leqq R \leqq 2{,}235\ldots$ sichergestellt werden. Es genügt, die Richtigkeit der in der obenstehenden Tabelle eingetragenen Werte für die ersten sechs Grenzradien nachzuweisen. Da $2{,}235\ldots < R_6$, so reduziert sich die verbleibende Aufgabe noch auf eine elementare Diskussion der durch (7) dargestellten Funktion im Intervall $1 \leqq R < R_6$.

Wir geben jetzt die beiden fehlenden Beweise.

1. Wir beziehen uns auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y, z) und betrachten den (halbabgeschlossenen) Würfel W, der durch $0 \leqq x, y, z < 2\sqrt{2}$ gegeben ist. Der Ursprung ist eine ihm angehörende Ecke. Diese Ecke sowie die Mittelpunkte der drei anschliessenden quadratischen Seitenflächen von W bilden vier ausgezeichnete Punkte, wir nennen sie Gitterpunkte (Figur 2). Wird der Raum mit translationsgleichen Würfeln gitterförmig ausgepflastert, so erzeugen die vier Punkte ein sogenanntes flächenkonzentriertes Würfelgitter G.

Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Der Würfel W_n $0 \leqq x, y, z < 2\sqrt{2}\,n$ lässt sich durch n^3 mit W translationsgleichen gitterförmig angeordneten Würfeln auspflastern. W_n enthält dann $4\,n^3$ Gitterpunkte. Es bezeichne nun $K(r)$ eine Kugel vom Radius r, die wir im Raume verschieben wollen, aber immer nur so, dass sie den Würfel W_n noch trifft. In einer solchen Lage von $K(r)$, die etwa durch die Koordinaten x, y, z ihres Mittelpunktes fixiert sei, soll $q_n(x, y, z)$ die Anzahl der Gitterpunkte von W_n bezeichnen, die durch sie bedeckt[1]) werden. Wir berechnen nun den über alle oben zugelassenen Lagen von $K(r)$ erstreckten Mittelwert $\bar{q}_n$ von $q_n(x, y, z)$, das heisst, wir setzen

$$\bar{q}_n = \frac{U_n}{V_n}, \tag{10}$$

wobei

$$U_n = \int\int\int q_n(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{11}$$

und

$$V_n = \int\int\int dx\, dy\, dz \tag{12}$$

bedeuten soll.

Mit Hilfe einfacher Überlegungen findet man leicht die beiden Resultate

$$U_n = \frac{16\,\pi\, n^3}{3}\, r^3 \tag{13}$$

[1]) Ein Punkt heisst durch eine Kugel bedeckt, wenn diese ihn im Innern oder auf dem Rand enthält.

und
$$V_n = 16\sqrt{2}\,n^3 + 48\,n^2 r + 6\sqrt{2}\,\pi\,n\,r^2 + \frac{4\pi}{3}\,r^3. \tag{14}$$

Hierbei hat man zu bedenken, dass der Beitrag, welcher von einem ausgewählten Gitterpunkt von W_n an das Integral (11) geliefert wird, durch das Volumen von $K(r)$ gegeben ist. Ferner stellt das Integral (12) das Volumen des äusseren Parallelkörpers des Würfels W_n im Abstand r dar, welcher aus denjenigen Punkten besteht, deren Abstand von W_n den Wert r nicht überschreitet.

Es bezeichne weiter p die grösste Zahl von Gitterpunkten im obenerwähnten, sich über den ganzen Raum erstreckenden Gitter G, die durch die Kugel $K(r)$ überdeckt

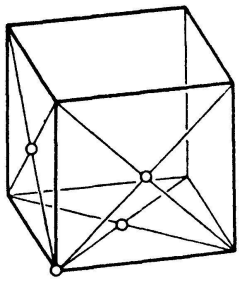

Fig. 2

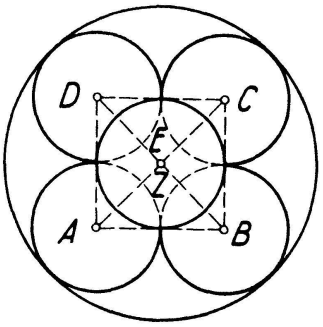

Fig. 3

werden können. Auf Grund der Bemerkung, dass stets $q_n(x, y, z) \leqq p$ sein muss, ergibt sich offenbar
$$p \geqq \bar{q}_n. \tag{15}$$

Setzt man in dieser Relation den sich nach (10), (13) und (14) ergebenden Quotienten ein, so erzielt man durch den Grenzübergang $n \to \infty$
$$p \geqq \frac{\pi}{3\sqrt{2}}\,r^3. \tag{16}$$

Wir denken uns nun weiter um jeden Gitterpunkt des gesamten Gitters G eine Einheitskugel gelegt. Wie man leicht überprüft, entsteht auf diese Weise eine Kugellagerung, da die Gitterpunkte alle eine den Wert 2 nicht unterschreitende Distanz haben. In einer Kugel $K(R)$ denken wir uns eine konzentrische Kugel $K(R-1)$ vom Radius $r = R - 1$. Diese lässt sich im Raume so verschieben, dass die Anzahl der bedeckten Gitterpunkte den Höchstwert p annimmt. Ohne weiteres erkennt man jetzt, dass die mitgeschobene Kugel $K(R)$ nun p Einheitskugeln der oben beschriebenen Lagerung enthält. Demnach gilt mit Rücksicht auf (16)
$$N(R) \geqq \frac{\pi}{3\sqrt{2}}\,(R-1)^3, \tag{17}$$

und hieraus ergibt sich die nachzuweisende Abschätzung (4).

2. Wir ermitteln nun die ersten sechs Grenzradien R_1 bis R_6 und bestätigen die in der Tabelle eingetragenen Werte. Die Bestimmung der ersten vier Grenzradien R_1

bis R_4 ist teils trivial, teils sehr einfach. Die Mittelpunkte der in die kleinsten Kugeln eingelagerten Einheitskugeln bilden 1. einen Punkt; 2. ein Punktepaar vom Abstand 2; 3. ein reguläres Dreieck der Seitenlänge 2; 4. ein reguläres Tetraeder der Seitenlänge 2. Die elementaren Betrachtungen, welche der Nachweis dafür erfordert, dass die angegebenen vier Kugelaggregate im Sinne unserer Fragestellung die günstigsten sind, wollen wir dem Leser überlassen und uns nunmehr der Bestimmung von R_5 und R_6 zuwenden.

Wir betrachten zunächst ein spezielles Aggregat von 5 Kugeln, deren Mittelpunkte A, B, C, D, E eine regelmässige quadratische Pyramide mit 8 gleichen Kanten der Länge 2 bilden (Figur 3). Dieses Aggregat ist einer Kugel K^0 vom Radius $1+\sqrt{2}$ eingelagert, deren Mittelpunkt Z im Zentrum des Basisquadrates liegt. Hieraus folgt offenbar

$$R_5 \leqq 1+\sqrt{2}. \tag{a}$$

Andererseits sollen jetzt A, B, C, D, E die Mittelpunkte einer noch unbekannten günstigsten Lagerung der 5 Einheitskugeln bezeichnen, so dass das gesamte Aggregat in der kleinstmöglichen Kugel K^0 vom Radius R_5 eingelagert ist.

1. Fall: E sei ein Punkt im Innern des von A, B, C, D aufgespannten Tetraeders. Die vier von E nach den Punkten A, B, C, D hinweisenden Einheitsvektoren a, b, c, d liegen in keinem (abgeschlossenen) Halbraum. Für $s = a+b+c+d$ können demnach nicht alle Skalarprodukte (s, a), (s, b), (s, c) und (s, d) positiv sein, und ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf also $(s, d) \leqq 0$ angenommen werden, wobei der Fall $s = 0$ eingeschlossen ist. Es ist demnach $1+(a, d)+(b, d)+(c, d) \leqq 0$, und von den Skalarprodukten (a, d), (b, d), (c, d) kann nicht jedes grösser als $-1/3$ sein. Es darf etwa $(c, d) \leqq -1/3$ angenommen werden. Ist ε der Winkel im Dreieck CED bei E, so ist $\cos\varepsilon \leqq -1/3$, und da ja $|EC| \geqq 2$ und $|ED| \geqq 2$ sein muss, ergibt die Anwendung des Kosinussatzes $|CD| \geqq \sqrt{32/3}$. Die beiden zu C und D gehörenden Einheitskugeln enthalten zwei auf der Zentralen liegende Punkte C' und D', so dass $|C'D'| \geqq 2+\sqrt{32/3} = 5{,}265\ldots$ ist. Insbesondere ist $|C'D'| \geqq 2+2\sqrt{2} = 4{,}828\ldots$ oder im Hinblick auf (a) also $|C'D'| \geqq 2R_5$, was natürlich nicht angeht. Das nämliche gilt *eo ipso* für jeden andern Fall, der sich durch Austausch der Bezeichnungen aus diesem ergibt.

2. Fall: Die 5 Punkte A, B, C, D, E bilden die Eckpunkte eines (eventuell entarteten) konvexen Polyeders. Offenbar gehört das Zentrum Z der Kugel K^0 diesem Polyeder an, da man andernfalls Z so verschieben könnte, dass sich alle Abstände $|ZA|$ bis $|ZE|$ simultan verkleinern; dann liesse sich aber das ganze Kugelaggregat in eine noch kleinere Kugel einlagern im Widerspruch zur Annahme. Die Abstände $|ZA|$ bis $|ZE|$ sind weiter alle nicht grösser als R_5-1. Wir dürfen sogar annehmen, dass sie alle gleich R_5-1 sind. In der Tat: Ist etwa $|ZA|$ kleiner, so verschiebe man A nach A' orthogonal zu einer durch die Ecke A hindurchgehenden Stützebene des Polyeders $ABCDE$ in den äusseren Halbraum so lange, bis $|ZA'| = R_5-1$ ist. Da sich hierbei alle Abstände $|AB|$ bis $|AE|$ vergrössern, wird die Bedingung für die Lagerung nicht gestört, und weiter muss das entstehende Polyeder $A'BCDE$ immer noch konvex sein. Auf diese Weise können der Reihe nach alle Punkte, soweit erforderlich, korrigiert werden. Die 5 Punkte A bis E liegen jetzt alle auf einer Kugelfläche vom Radius $r = R_5-1$ und weisen paarweise Abstände auf, welche den Wert 2

nicht unterschreiten. Wir zeigen jetzt, dass hieraus $r \geqq \sqrt{2}$ folgt[1]). Sind a, b, c, d, e die 5 Einheitsvektoren, die von Z ausgehend nach den 5 Punkten A, B, C, D, E hinweisen, so gelten die Zerlegungen $a = (a, e)\, e + a'$; $b = (b, e)\, e + b'$; $c = (c, e) + c'$; $d = (d, e)\, e + e'$, wo a', b', c', d' Vektoren bezeichnen, welche in Z angreifen und in der auf e orthogonal stehenden Ebene liegen. Da die vier konsekutiven Zwischenwinkel dieser koplanaren Vektoren nicht alle $\pi/2$ überschreiten können, darf man ohne Einschränkung der Allgemeinheit etwa $(a', b') \geqq 0$ annehmen. Es ergibt sich jetzt $(a, b) \geqq (a, e)\,(b, e)$. Hieraus folgt aber, dass die drei hier beteiligten Skalarprodukte nicht alle negativ sein können. Also ist etwa $(a, b) \geqq 0$. Ist ε der Winkel im Dreieck AZB bei Z, so ist $\cos\varepsilon \geqq 0$ und da ja $|ZA| = |ZB| = r$ und $|AB| \geqq 2$ sein muss, ergibt die Anwendung des Kosinussatzes $r \geqq \sqrt{2}$. So folgt nun

$$R_5 \geqq 1 + \sqrt{2}. \tag{b}$$

Mit (a) schliessen wir daraus auf $R_5 = 1 + \sqrt{2}$, was zu beweisen war.

Endlich wollen wir noch zeigen, dass $R_5 = R_6$ ausfällt. Damit ist ein Fall aufgewiesen, wo in der Folge der Grenzradien R_n zwei konsekutive übereinstimmen. Ob sich dieses Vorkommnis im weiteren Verlauf der Folge wiederholt, ist unseres Wissens nicht bekannt. Wir gehen vom günstigen Aggregat für 5 Kugeln (Figur 3) aus. Die Kugel K^0 vom Radius R_5 mit dem Mittelpunkt Z im Zentrum des Basisquadrates $ABCD$ enthält mit den 5 Einheitskugeln um die Punkte A, B, C, D, E noch eine weitere, nämlich die Einheitskugel um E', wo E' den bezüglich der Quadratebene zu E spiegelbildlichen Punkt bedeutet. Somit ist (a): $R_5 \geqq R_6$; weiter hat man mit Rückblick auf (6) noch (b): $R_5 \leqq R_6$. Hieraus ergibt sich die Behauptung $R_5 = R_6$.

H. HADWIGER, Bern.

Elementare Bestimmung der Summe der reziproken Quadratzahlen

Die Geschichte der Reihe

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \tag{1}$$

findet der Leser in einer Abhandlung von O. SPIESS[2]). Berühmt geworden ist der Beweis von EULER, der sich auf das unendliche Produkt für $\sin x$ stützt und auf dasselbe die Vietaschen Wurzelsätze anwendet. SPIESS bemerkt, dass dieser Beweis nur mit funktionentheoretischen Mitteln streng erbracht werden könne.

Ich teile daher hier eine elementare Gestaltung der Eulerschen Beweisidee mit, die ich vor mehreren Jahren gefunden habe.

---

[1]) Dies folgt aus den wenigen bekannten Aussagen über den sphärischen Minimalabstand bei n auf der Kugeloberfläche verstreut liegenden Punkten bzw. über den grösstmöglichen Wert, den dieser noch annehmen kann. Zahlreiche neue Ergebnisse wurden hier kürzlich von B. L. VAN DER WAERDEN (Zürich) und K. SCHÜTTE (Marburg an der Lahn) erzielt: *Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz?*, Math. Ann. *123*, 96–124 (1951). Vgl. die Besprechung von E. TROST, El. Math. *7*, 23 (1952).

[2]) Speiser-Festschrift (Orell Füssli, Zürich 1945).