Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 7 (1952)

Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

Aufgaben

Aufgabe 124. Dem Einheitskreis ist ein reguläres n-Eck $P_1P_2 \ldots P_n$ einbeschrieben. P sei ein Punkt der Kreisperipherie. Berechne

$$\overline{PP}_1^2 + \overline{PP}_2^2 + \cdots + \overline{PP}_n^2.$$

J. MOLNÁR.

Solution: Soit z_k l'affixe complexe du point P_k et z celle du point P. On a

$$\overline{PP_k} = |z_k - z| \qquad \text{et} \qquad \overline{PP}_k^2 = (z_k - z)\,(\bar{z}_k - \bar{z}) = z_k \bar{z}_k - \bar{z} z_k - z \bar{z}_k + z \bar{z}.$$

Tous ces points se trouvent sur le cercle unité, donc $z_k \bar{z}_k = z \bar{z} = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{PP}_k^2 = 2n - z \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k - \bar{z} \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

Mais, les points P_k étant les sommets d'un polygone régulier, on a

$$\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{z}_k = 0,$$

d'où enfin

$$\overline{PP}_1^2 + \overline{PP}_2^2 + \cdots + \overline{PP}_n^2 = 2n.$$

P. BOLLI, Petit-Lancy, Genève.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), J. BINZ (Paris), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. KLÖTZLER (Leipzig), R. LAUFFER (Graz), A. MARET (Neuchâtel), E. PLÜSS (Murgenthal), F. THOMISSEN (Heerlen), G. TROMP (Sittard), J. ULČAR (Skopje, Jugoslawien), G. VLAHAVAS (London), A. UNTERBERGER (Bludenz).

Aufgabe 125. If n is an integer greater than 1, the least prime factor of n is less than the least prime factor of $2^n - 1$. G. HIGMANN, Manchester.

Lösung: Aus $2^n - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ (p Primzahl) folgt nach dem Satz von FERMAT, dass n mit $p - 1$ einen von Eins verschiedenen gemeinsamen Teiler hat, nämlich den Exponenten, zu dem 2 (mod p) gehört. Daher gibt es zu jedem Primteiler p von $2^n - 1$ einen Primteiler p' von n mit $p' \leqq p - 1$. B. MARZETTA, Basel.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), F. GOLDNER (London), W. SCHWAB (Kerzers), F. THOMISSEN (Heerlen), G. TROMP (Sittard).

Aufgabe 126. Démontrer qu'il existe pour tout nombre naturel m un nombre naturel n, tel que les chiffres consécutifs du nombre m forment les chiffres initiaux du nombre 2^n (c'est-à-dire que $2^n = m \cdot 10^k + r$, où k et r sont naturels et $r < 10^k$).

W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

Lösung: Sind $0 < a$, $0 < b_1 < b_2$ irrationale Zahlen, dann gibt es bekanntlich unendlich viele Paare positiver, ganzer Zahlen p, q so, dass

$$b_1 < a p - q < b_2$$

ist. Es hat daher die Ungleichung

$$\log m < n \log N - k \log 10 < \log (m + 1) \tag{1}$$

für natürliches m, $N > 1$ unendlich viele ganze positive Lösungspaare k, n, sofern N keine Potenz von 10 ist (in diesem Fall ist $\log N$ nämlich nach dem Satz von GELFOND-

SCHNEIDER transzendent!). Ist k_i, n_i ein solches Lösungspaar, dann ist wegen (1)

$$m < N^{n_i} : 10^{k_i} < m + 1$$

und daher

$$N^{n_i} = m \cdot 10^{k_i} + r_i, \qquad \text{wobei} \qquad 0 < r_i < 10^{k_i}.$$

Es gibt daher für ein gegebenes natürliches $N \geqq 2$, das keine Potenz von 10 ist, und für jedes natürliche m unendlich viele natürliche n, so dass

$$N^n = m \cdot 10^k + r; \quad 0 < r < 10^k.$$

R. LAUFFER, Graz.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), F. GOLDNER (London). Man vergleiche auch den Aufsatz von W. SIERPIŃSKI, *Sur les puissance du nombre* 2, Ann. Soc. polonaise Math. *23*, 246–251 (1950).

Aufgabe 127. Von einem Dreieck ABC sei CA Durchmesser eines Kreises (A) und CB Durchmesser eines Kreises (B). Die beiden Kreise schneiden sich ausser in C noch im Höhenfusspunkt C_2 auf AB. Ferner sei C Mittelpunkt einer symmetrischen Strahleninvolution, von der CA und CB ein Paar bilden. Ein beliebiges Paar dieser Involution schneide (A) ausser in C in U und U' und (B) in V und V'. Man beweise:

1. UU' und VV' schneiden sich auf CC_2. 2. UV' und VU' schneiden sich auf AB. 3. Die Winkelhalbierenden von UU' und VV' wie auch die von UV' und VU' sind parallel zu den Doppelstrahlen der Involution. A. STOLL, Zürich.

Lösung: Die Bezeichnungen sind so zu wählen, dass U, V, C auf derselben Geraden liegen.

1. Da die Punkte U, U' sich auf (A) im Gegensinn mit gleicher Geschwindigkeit bewegen, bleibt die Richtung von UU' konstant, nämlich parallel zur Höhe AA_2. Entsprechend bleibt VV' parallel BB_2. Die Parallelenbüschel UU', VV' sind wegen der umkehrbar eindeutigen Zuordnung ihrer Strahlen projektiv, und da die unendlich ferne Gerade sich selber entspricht (als Verbindungslinie der imaginären Kreispunkte), durchläuft der Schnittpunkt T von UU' und VV' eine Gerade, die durch C und den Höhenschnittpunkt des Dreieckes ABC hindurchgehen muss, also die Gerade CC_2.

2. Die Verbindungslinie von T mit dem Schnittpunkt S von UV' mit VU' hat als vierter harmonischer Strahl zu UU', VV', CC_2 ebenfalls konstante Richtung. Jedem Punkt T (und damit jedem Strahl TS) entspricht eindeutig ein Strahl CS und umgekehrt jedem Strahl CS zunächst dasjenige Paar der Involution (und damit ein eindeutig bestimmter Strahl TS), das zu CC_2, CS und zu den Doppelstrahlen der Involution gleichzeitig harmonisch ist. Rückt T nach C, so fallen die Strahlen TS und CS zusammen, der Schnittpunkt zugeordneter Strahlen der projektiven Büschel TS, CS beschreibt also eine Gerade, die durch C_2 und den Schnittpunkt von AB mit A_2B_2 geht, also die Gerade AB.

3. Der erste Teil der Behauptung folgt sofort aus $UU' \parallel AA_2$, $VV' \parallel BB_2$. Der zweite Teil ergibt sich, wenn man beachtet, dass das Viereck $UV'U'V$ ein Kreisviereck ist [der Diagonalenschnittpunkt T liegt ja auf der Potenzlinie von (A) und (B)]. $U'V$ hat also gegenüber VV' den entgegengesetzt gleichen Richtungsunterschied wie $V'U$ gegenüber UU', die Winkelhalbierenden von $U'V$ und $V'U$ sind also parallel zu denen von UU' und VV'. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Weitere Lösungen sandten R. LAUFFER (Graz) und A. UNTERBERGER (Bludenz).

Aufgabe 128. Man konstruiere diejenigen Kreise, welche durch den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel gehen und die Hyperbel doppelt berühren.

H. BÖHEIM, Graz.

Lösung des Aufgabenstellers: Von den vier Lösungen sind nur zwei reell. Ihre Mittelpunkte bilden mit den zwei Paaren von Berührungspunkten ein regelmässiges Sechseck, dessen Umkreis durch die beiden reellen Brennpunkte F_1 und F_2 der Hyperbel geht, während das Zentrum M dieses Kreises im Mittelpunkt der Hyperbel liegt.

Beweis: Ist die gleichseitige Hyperbel k durch ihre Asymptoten und F_1, F_2 bestimmt und zeichnet man dem Kreis durch die Brennpunkte das regelmässige Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ ein, dessen Ecken P_1, P_4 auf der Nebenachse liegen, so ist durch die Asymptoten und P_2 eine Hyperbel $\bar{k}$ bestimmt. Der zu MP_2 konjugierte Durchmesser von $\bar{k}$ gehört der symmetrischen Involution an, welche die Asymptoten als Doppelstrahlen besitzt, und schliesst daher mit der Nebenachse denselben Winkel ein wie MP_2 mit der Hauptachse, nämlich 30°. Er ist daher parallel zu P_2P_4. P_2P_4 ist daher die Tangente an $\bar{k}$ in P_2. P_1P_2 und P_2P_4 sind zwei konjugierte Normalstrahlen von $\bar{k}$, welche auf der Nebenachse das Paar P_1, P_4 der Fokalinvolution herausschneiden müssen. Da nun diese Fokalinvolution aus F_2 (P_2 liegt zwischen P_2 und P_3) durch eine Rechtwinkelinvolution projiziert wird, muss F_2 ein Brennpunkt von $\bar{k}$ sein, das heisst $\bar{k}$ ist mit k identisch. Der Kreis mit dem Mittelpunkt P_1 und durch P_2 geht von selbst durch M und berührt k in P_2 und P_6. Entsprechendes gilt für den Kreis mit dem Mittelpunkt P_4, der durch P_3 geht.

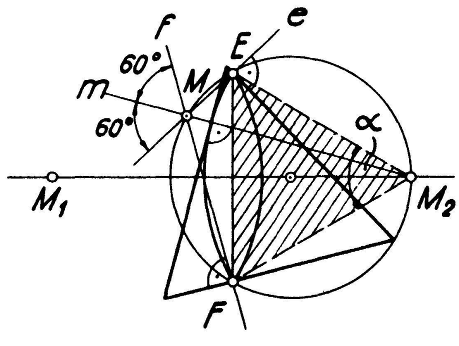
Die Aufgabe lässt auch eine sehr einfache rechnerische Behandlung zu. Weitere Lösungen sandten J. Binz (Paris), L. Kieffer (Luxemburg), R. Klötzler (Leipzig), R. Lauffer (Graz), A. Schwarz (Seuzach), R. Spranck (Luxemburg), A. Unterberger (Bludenz).

Aufgabe 129. Als «Linse» bezeichnen wir ein Flächenstück, das aus zwei kongruenten, längs der Sehne zusammengefügten Kreissegmenten mit dem Zentriwinkel $\alpha < 180°$ besteht. Man beweise, dass man einem gleichseitigen Dreieck neben dem Inkreis ($\alpha = 180°$) noch genau zwei Linsen ($\alpha = 60°$ und $\alpha = 120°$) so einbeschreiben kann, dass sie sich im Dreieck frei drehen können und dabei ständig alle drei Seiten berühren.

E. Trost, Zürich.

Lösung: Die Linse ist dann und nur dann im Dreieck beweglich, wenn in jeder Lage die (zu den Dreieckseiten orthogonalen) Bahnnormalen in den Berührungspunkten der Linse mit den Dreieckseiten durch einen Punkt M, das jeweilige Momentanzentrum, gehen.

1. Ist $\alpha \leqq 60°$, so liegen die «Eckpunkte» E und F der Linse auf zwei Dreieckseiten, und die dritte Seite des Dreiecks berührt einen Linsenbogen (vgl. die Figur). Die drei



Bahnnormalen e, m, f, für die $\sphericalangle(e, m) = \sphericalangle(m, f) = 60°$ gilt, sollen sich in M schneiden. Der Kreis durch E, M, F liegt zur Linsenachse M_1M_2 symmetrisch. M_2 muss auch auf diesem Kreis liegen, weil zu den von e, m bzw. m, f gebildeten gleichen Peripheriewinkeln gleiche Bogen gehören müssen. Das Viereck $EMFM_2$ ist somit ein Sehnenviereck, und α muss 60° sein. Ist a die Seite des gegebenen gleichseitigen Dreiecks, so findet man $\overline{EF} = a\sqrt{3}/2$.

2. Ist $60° < \alpha \leqq 120°$, dann geht nur eine Dreiecksseite durch eine Ecke, etwa E, die andern beiden berühren die Linsenbogen, und die entsprechenden Bahnnormalen m_1

und m_2 gehen durch M_1 bzw. M_2. Sie sollen sich mit der Normalen e in E im Punkt M schneiden. Der Kreis durch M_1MM_2 liegt symmetrisch zur Linsensehne EF und muss aus denselben Gründen wie vorhin auch durch E gehen. Das Dreieck M_1M_2E muss also gleichseitig sein, das heisst $\alpha = 120°$. Hier ist $\overline{EF} = 3\,a/4$.

3. Für $\alpha > 120°$ sind in Teilen der Linsenbewegung zwei Seiten des Dreiecks Tangenten an einen Linsenbogen. Die zugehörigen Bahnnormalen gehen daher etwa durch M_1. Die dritte Dreiecksseite berührt dann den anderen Linsenbogen, und die zugehörige Normale geht durch M_2. Damit wieder in jeder Linsenlage ein Momentanzentrum existiert, muss $M_1 = M_2$ sein. α ist also 180°, und die Linse ist der Inkreis. In diesem Fall ist $\overline{EF} = a\sqrt{3}/3$. A. UNTERBERGER, Bludenz.

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), R. LAUFFER (Graz), R. SPRANCK (Luxemburg).

Neue Aufgaben

159. Gegeben ist eine Ellipse e. Man konstruiere jene logarithmische Spirale, für die e ein Schmiegkegelschnitt ist. R. BEREIS, Wien.

160. Es sind $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{2k}$ und $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{2k+1}$ zu bestimmen. P. BUCHNER, Basel.

161. Eine Kegelfläche zweiter Ordnung mit der Spitze S werde von einer Ebene e_1 in einem Kegelschnitt K_1 geschnitten. F sei ein Brennpunkt von K_1. Man beweise: Liegt die Ebene e_2 spiegelbildlich zu e_1 in bezug auf die in F errichtete Normalebene zu FS, so schneidet e_2 den Kegel in einem Kegelschnitt K_2 mit demselben Brennpunkt F. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

162. Bei einem Kugelausschnitt von gegebenem Volumen V sei r der Radius der Kugel, d der Durchmesser des Kantenkreises, h die Höhe der Kugelkappe ($0 < h \leqq 2\,r$, so dass auch nichtkonvexe Teile der Kugel und die ganze Kugel zugelassen sind). Man stelle die Oberfläche O dieses Körpers als Funktion der unabhängigen Variablen r dar und bestimme die Extremwerte der Oberfläche. R. LAUFFER, Graz.

163. Démontrer que m étant un nombre naturel quelconque et s le nombre des chiffres du nombre m (en représentation décimale), il existe un nombre naturel n tel que les s premiers chiffres du nombre n^2 coïncident respectivement avec les chiffres du nombre m. W. SIERPIŃSKI, Varsovie.

Nachtrag zur Lösung der Aufgabe 115. Eine Lösung der Aufgabe 115 wurde auch von R. LAUFFER (Graz) vorgelegt.

Literaturüberschau

JOHANNES KEPLER: *Gesammelte Werke*

Band XIII: Briefe von 1590–1599 (Briefe Band I), XVII und 432 Seiten;
Band XIV: Briefe von 1599–1603 (Briefe Band II), 520 Seiten.

Herausgegeben von M. CASPAR. C. H. Becksche Verlagsbuchhandlung, München und Berlin (1945 bzw. 1949).

MAX CASPAR und der seither verstorbene Mitherausgeber der gesammelten Werke KEPLERS, WALTHER VON DYCK, haben uns 1930 mit einer Sammlung übersetzter Briefe beschenkt (2 Bände, Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin 1930).