

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 7 (1952)  
**Heft:** 4

**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 14.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$E_A$  der Grösse dieser Art und eines (dimensionslosen) Tensors  $m$ -ter Stufe  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_m}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), dessen Koordinaten die Masszahlen der Koordinaten von  $A_{i_1 i_2 \dots i_m}$  bezüglich  $E_A$  sind, dargestellt werden. Letzterer kann dann noch als Produkt einer Zahl  $\alpha$  und eines Einstensors, das heisst eines dimensionslosen Tensors  $m$ -ter Stufe, dessen Betrag eins ist, angegeben werden ( $A_{i_1 i_2 \dots i_m} = \alpha E_A \cdot 1_{i_1 i_2 \dots i_m}$ ; zum Beispiel Richtungskosinus  $\cos \alpha_i = e_i$  eines Vektors). Dann kann mit diesen Symbolen, falls die angegebenen Einschränkungen beachtet werden, nach den Regeln der gewöhnlichen Arithmetik und des Tensorkalküls gerechnet werden. Auch hier zeigt sich die Unzweckmässigkeit des üblichen symbolisch-anschaulichen Vektorkalküls, der diese «Permanenz» nicht zulässt (sogenannte innere und äussere «Produkte»). Verwendet man affine Koordinatensysteme (Achsen verschieden geeicht und schiefwinklig), so tritt an Stelle der invarianten Form  $x_i x_i$  die metrische Grundform  $g_{ik} x_i x_k$ , das heisst als (dimensionsloser) metrischer Fundamentaltensor  $g_{ik}$ , statt des Einheits-tensors  $\delta_{ij} = 1$  ( $i = j$ ) bzw.  $0$  ( $i \neq j$ ) zweiter Stufe, der übrigens nur beim Übergang von kontra- zu kovarianten Koordinaten vorkommt.

Überblicken wir nochmals den Gedankengang, so erscheint die Grössengleichung als das Ursprüngliche. Der Psychologe, Genetiker und Erkenntnistheoretiker wird vielleicht geneigt sein, zu sagen, wir rechnen mit Zahlen wie mit Grössen – und nicht umgekehrt. Doch das geht über die in der Mathematik übliche Analyse der Relationensysteme auf Grund einer *a priori* gegebenen Logik hinaus.

K. OTT, Zürich.

## Kleine Mitteilungen

### Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser

Die Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser mit Hilfe der perspektiven Affinität stützt sich bekanntlich auf die Aufsuchung eines zugeordneten Paares rechter Winkel, deren Scheitel der Mittelpunkt der Ellipse und der Mittelpunkt eines passenden affinen Kreises sind. Dabei wird die Affinitätsachse so gewählt, dass diese Scheitel nicht zusammenfallen (siehe FLÜKIGER oder E. MÜLLER, Band 1). Es gibt indes eine interessante Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, wenn die erwähnten Mittelpunkte zusammenfallen, insbesondere wenn als Affinitätsachse die Gerade eines der gegebenen konjugierten Durchmesser gewählt wird; eine Möglichkeit, die nebst einer neuen Konstruktion einen neuen Zugang zur Rytzschen Konstruktion erschliesst.

Wir lösen vorerst, *absichtlich elementar*, die Hilfsaufgabe:

Bei gegebener Affinitätsrichtung, gegebener Affinitätsachse und gegebenem Affinitätsverhältnis soll das perspektiv-affine Rechtwinkelpaar konstruiert werden, dessen gemeinsamer Scheitel  $S$  auf der Affinitätsachse gegeben ist.

Seien  $\sphericalangle(a_1, b_1)$  und  $\sphericalangle(a_2, b_2)$ , wobei  $a_1 \perp b_1$  und  $a_2 \perp b_2$ , die gesuchten rechten Winkel und  $g$  irgendeine Gerade in der Affinitätsrichtung, welche ihre Schenkel schneidet. Dann müssen die Schnittpunkte  $A_1, A_2$  bzw.  $B_1, B_2$  (Figur 1) von  $g$  mit  $a_1$  und  $a_2$  bzw. mit  $b_1$  und  $b_2$  zugeordnete Punkte sein. Zieht man beispielsweise durch  $A_1$  die Gerade  $\bar{a}_2$  parallel zu  $a_2$  und ist  $T$  ihr Schnittpunkt mit der Affinitätsachse  $s$ , so gilt  $AA_2/AA_1 = AS/AT$ , wenn  $A$  der Schnittpunkt von  $g$  mit  $s$  ist. Nun ist aber auch

$AB_2/AB_1 = AA_2/AA_1$ . Daher  $AB_2/AB_1 = AS/AT$ , und somit muss die  $B_1$  und  $T$  verbindende Gerade  $\bar{b}_2$  parallel zu  $b_2$  sein. Hieraus folgt nun zweierlei: erstens  $\bar{a}_2 \perp \bar{b}_2$ , zweitens die Konstruierbarkeit der Lage des Punktes  $T$ , weil  $AS/AT$  gleich dem Wert des gegebenen Affinitätsverhältnisses ist. Andererseits sieht man von  $S$  und  $T$  aus die Strecke  $A_1B_1$  je unter einem rechten Winkel, folglich liegen die Punkte  $A_1, B_1, S$  und  $T$  auf einem Kreise mit Mittelpunkt auf  $g$ , woraus die Konstruktion des Rechtwinkelpaares unmittelbar folgt. In Figur 2 ist diese Konstruktion unter der Annahme

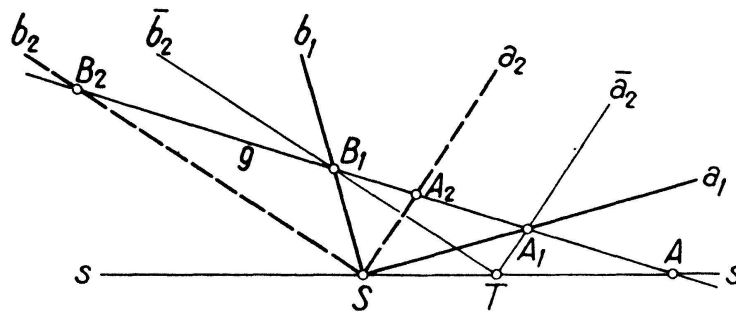


Fig. 1

durchgeführt worden, dass ein beliebiges zugeordnetes Punktepaar  $P_1$  und  $P_2$  und der Scheitel  $S$  auf  $s$  gegeben sind.  $A_1S$  und  $B_1S$  ergeben den einen und die Parallelen durch  $S$  zu  $A_1T$  und  $B_1T$  den zugeordneten rechten Winkel.

Das eingangs formulierte Problem ist nun leicht zu lösen. Sind nämlich  $C_2D_2$  und  $E_2F_2$  die gegebenen konjugierten Ellipsendurchmesser, so mache man beispielsweise die

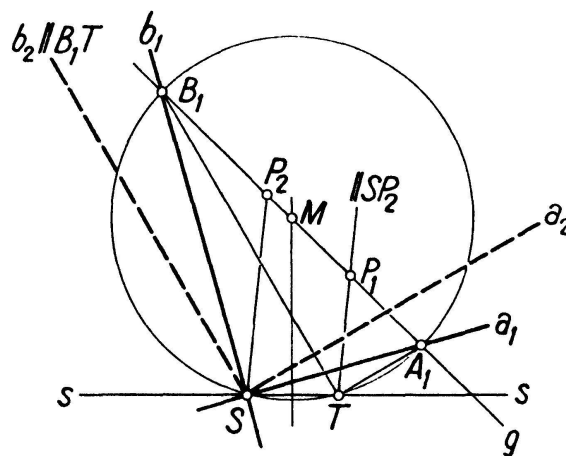


Fig. 2

Gerade  $E_2F_2$  zur Affinitätsachse  $s$ , dann spielt der Ellipsenmittelpunkt die Rolle von  $S$  in der Hilfsaufgabe. Der zu  $C_2D_2$  affine Kreisdurchmesser (Länge  $E_2F_2$ ) ist  $C_1D_1$ , somit sind  $C_1$  und  $C_2$  ein Paar zugeordneter Punkte, welche die Rolle von  $P_1$  und  $P_2$  der Hilfsaufgabe übernehmen. Die Gerade  $C_1C_2$  ist als Gerade  $g$  zu deuten. Zieht man nun durch  $C_1$  (Figur 3) bzw.  $C_2$  (Figur 4) die Parallele zu  $C_2S$  bzw.  $C_1S$ , so ergibt ihr Schnittpunkt mit  $s$  den Punkt  $T$ , und so weiter.

Die Figur 3 enthält die neue Konstruktion, während die Figur 4 direkt auf die Rytzsche Konstruktion führt.

*Anmerkung.* Der Figur 4 lassen sich durch Anbringen einiger Hilfslinien ( $Q_1Q_2$  bzw.  $V_1V_2$  verlängert bis zum nochmaligen Schnitt mit Kreis über  $E_2F_2$ ; den neuen Schnittpunkt  $\bar{Q}_1$  bzw.  $\bar{V}_1$  mit  $S$  verbunden, ferner die Gerade  $B_2T$  eingezeichnet, siehe Figur 5) die bekannten Rytzschen Beziehungen:  $C_1B_2 = SV_2$  und  $C_1A_2 = SQ_2$  leicht entneh-

men. Die erste folgt aus der Kongruenz der Dreiecke  $SB_2C_1$  und  $SV_2\bar{V}_1$ . Es ist nämlich  $SC_1 = S\bar{V}_1$ ,  $\varepsilon = \varepsilon'$  (korrespondierende Winkel an Parallelen) und  $\gamma' = \sphericalangle \bar{V}_1$ . Letzteres ist so einzusehen:  $\gamma = \bar{\gamma}$  (Peripheriewinkel über  $\widehat{A_2T}$ ), aber  $\gamma = \gamma'$  (gleichufrige Normalwinkel) und  $\bar{\gamma} = \sphericalangle V_1$  (gleichsinnige Parallelwinkel, ist doch  $\sphericalangle B_2TA_2 = 90^\circ$ ) und schliesslich  $\sphericalangle V_1 = \sphericalangle \bar{V}_1$ .

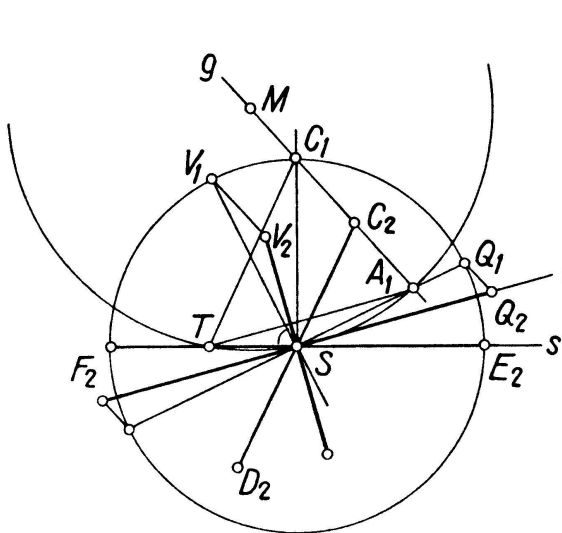


Fig. 3

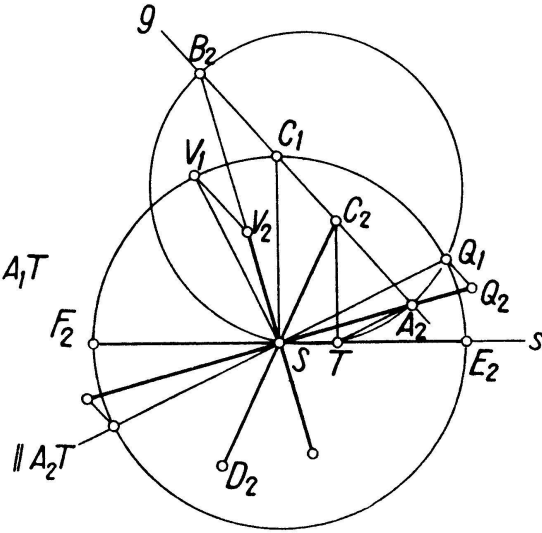


Fig. 4

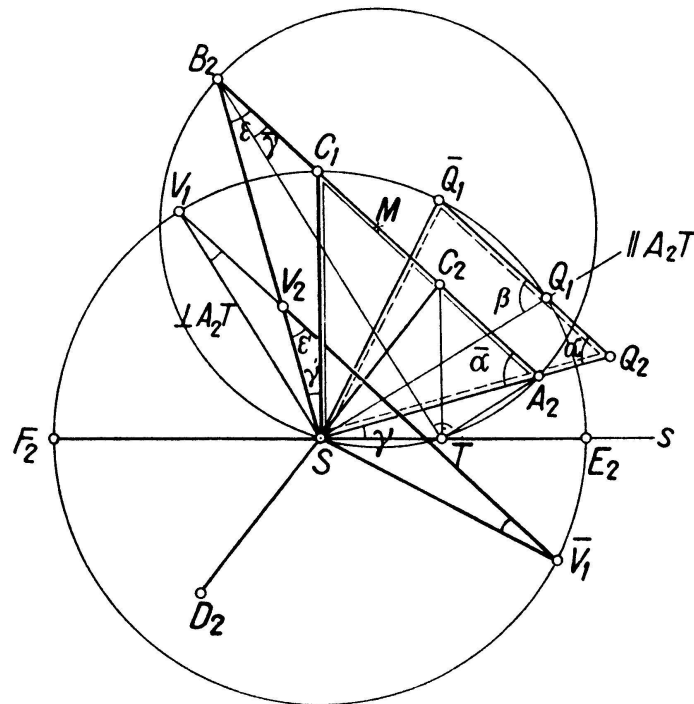


Fig. 5

Die zweite Beziehung folgt aus der Kongruenz der Dreiecke  $C_1SA_2$  und  $SQ_2\bar{Q}_1$ . Es ist nämlich  $S\bar{Q}_1 = SC_1$ , ferner  $\alpha = \bar{\alpha}$  und  $\sphericalangle \bar{Q}_1 = \sphericalangle C_1SA_2$ . Letzteres ist so einzusehen:  $\sphericalangle C_1SA_2 = 90^\circ - \gamma$ , aber  $\sphericalangle \bar{Q}_1 = \beta$  und  $\beta = \sphericalangle B_2A_2T$  (gleichsinnige Parallelwinkel) und schliesslich  $\sphericalangle B_2A_2T = 90^\circ - \bar{\gamma} = 90^\circ - \gamma$ .

V. KRACKOWSKI, Zürich.

### Zu einer Formel in der Voellmyschen Logarithmentafel

Wir betrachten die allgemeine Kurve zweiter Ordnung

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

für den «parabolischen» Fall

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Dann erhalten wir durch eine Rotation des Koordinatensystems:

$$x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha,$$

$$y = \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha,$$

mit

$$\cos 2 \alpha = \frac{C - A}{C + A}, \quad \sin 2 \alpha = -\frac{2 B}{C + A},$$

die Gleichung

$$(A + C) \bar{y}^2 + 2 d \bar{x} + 2 e \bar{y} + F = 0,$$

wo

$$d^2 = -\frac{\Delta}{A + C} \quad \text{und} \quad e^2 = D^2 + E^2 + \frac{\Delta}{A + C},$$

mit

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Im ausgearteten Falle,  $\Delta = 0$ , haben wir also die Gleichung eines Parallelenpaares:

$$(A + C) \bar{y}^2 + 2 e \bar{y} + F = 0$$

mit

$$e^2 = D^2 + E^2.$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist

$$\begin{vmatrix} A + C & e \\ e & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix},$$

und die beiden Parallelen sind demnach

$$\left. \begin{array}{l} \text{reell und verschieden} \\ \text{zusammenfallend} \\ \text{imaginär} \end{array} \right\} \text{ für } \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} \begin{cases} < 0 \\ = 0. \\ > 0 \end{cases}$$

Aus dem skizzierten Beweis folgt, dass dieses Kriterium ohne Fallunterscheidung anwendbar ist, und ich möchte deshalb vorschlagen, es an der entsprechenden Stelle der Formelsammlung unserer Logarithmentafel (Diskussion der Kegelschnitte als Kurven zweiter Ordnung) zu verwenden. Die Möglichkeit eines Missverständnisses,

wenn eine der Determinanten  $\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}$  oder  $\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix}$  Null ist, würde damit behoben.

OSWALD WYLER, Evanston (Ill., USA.)