Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 7 (1952)

Heft: 4

Artikel: Zahlen- oder Grössengleichung?

Autor: Ott, K.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16357

Zahlen- oder Grössengleichung?

Die lange umstrittene Frage, ob die Funktionsgleichungen, welche die Zusammenhänge der physikalischen und geometrischen Grössen darstellen, nur als Zahlengleichheiten oder aber als Beziehungen dieser Grössen selbst – das heisst ihres in unserm Bewusstsein dem transzendenten «Ding an sich» zugeordneten «Modells» – aufzufassen sind[1]), widerspiegelte sich in Inkonsequenzen mancher Lehrbücher[2]) und führte zu einer Vernachlässigung der Massstabfragen, die sich unter anderem in Sätzen äussert, wie zum Beispiel «Die Masszahl der Fläche eines Rechtecks ist gleich dem Produkt der Masszahlen der Seiten», was offensichtlich nur bei geeigneter Wahl der Einheiten stimmt. Nur der feste Ausdruck «Maßzahl einer Grösse bezüglich einer Einheit» ist sinnvoll.

Die sogenannten *Axiome der Messbarkeit* gestatten nun ebenfalls eine Lösung dieser Frage, auch für den irrationalen Fall und Tensoren beliebiger Stufe. H. WEBER[3]) erblickt – sinngemäss wiedergegeben – das Wesen einer «messbaren Menge» in den folgenden, durch das Messverfahren zu realisierenden Bestimmungen[4]). (Grosse Buchstaben bezeichnen stets Grössen, kleine Buchstaben reine Zahlen):

(1) Existenz der Relationen $=$ und $<$ für beliebige Elemente derselben, welche den üblichen Postulaten genügen.

(2) Existenz einer eindeutigen «Summe» $A+B$ von A und B (intensive Verknüpfung nach LANDOLT), für welche das kommutative und das assoziative Gesetz gelten, und $(A+B) > A$ und $> B$ ist (deshalb das Zeichen $+$).

(3) Ist $A < B$, so existiert X derart, dass $A + X = B$ ist (Subtraktion).

(4) Zu jeder Grösse gibt es eine kleinere.

(5) Falls $n\,B$ $(= B\,n)$ die Summe der n gleichen Grössen B darstellt (intensive Potenz nach LANDOLT), so gilt das Archimedische Axiom.

(6) Falls n und A gegeben sind, so existiert B derart, dass $n\,B = A$ ist.

O. HÖLDER[5]) setzt statt (5, 6) die Dedekindsche Stetigkeit voraus. Die Relation $<$ und die Postulate, welche sich auf sie beziehen, erlauben den für den Praktiker allerdings bedeutungslosen inkommensurablen Fall zu erfassen. Die Nebenbedingung $A < B$ in (3) folgt aus der Tatsache, dass die Gleichung $A + X = B$ in gewissen Fällen (absolute Temperatur, Masse, als Beträge von Tensoren erscheinende Grössen) physikalisch nicht lösbar ist. Zu beachten ist auch, dass das Rechnen mit Grössen von der Einführung relativer Masszahlen unabhängig ist. Das angegebene Axiomensystem legt den Begriff «*Grösse gleicher Art*» fest und erlaubt den Beweis folgender Sätze[6]):

a) Sind A_1 und A_2 zwei beliebige Grössen gleicher Art, so existiert stets eine und nur eine absolut-reelle Zahl z, und umgekehrt gibt es bei gegebenem A_2 zu jeder

---

1) Vergleiche M. LANDOLT, *Grösse, Masszahl und Einheit* (Rascher, Zürich 1943), S. 37.

2) Siehe E. ROTH-DESMEULES, *Über das Rechnen mit Grössen*, El. Math. *4*, Nr. 5, 105 (1949).

3) *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik*, Bd. I (Teubner, Leipzig 1934), S. 134.

4) Vergleiche auch CARNAP, *Physikalische Begriffsbildung* (G. Braun, Karlsruhe 1926).

5) O. HÖLDER, *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, Ber. Sächs. Ges. Wiss. *53*, 1 (1901). Siehe auch G. VERONESE, Atti R. Accad. Lincei [4], Mem. Cl. Sci. fis. *6*, 617 (1889).

6) Vergleiche O. HÖLDER, *Die Arithmetik in strenger Begründung* (Springer, Berlin 1929); H. WEBER, l. c., S. 136 ff.

solchen Zahl z eine Gösse A_1 derart, dass $A_1 = z\,A_2 = A_2\,z$ ist (falls $z = p/q$ rational ist, so bedeutet $A_1 = z\,A_2$, dass $q\,A_1 = p\,A_2$ ist).

b) Sind z_1, z_2 absolut-reelle Zahlen und ist A irgendeine Grösse, so ist

$$z_1(z_2 A) = (z_1 z_2) A \qquad \text{(assoziatives Gesetz),}$$

c) $$\left.\begin{array}{ll} z(A_1 \pm A_2) = z\,A_1 \pm z\,A_2 & (A_1 > A_2) \\ \text{und} \quad (z_1 \pm z_2)\,A = z_1 A \pm z_2 A & (z_1 > z_2) \end{array}\right\} \text{(distributive Gesetze).}$$

Diese Sätze besagen, dass nach Wahl einer willkürlichen Grösse E_A jede Grösse A einer bestimmten Art als *Produkt* einer *Einheit* E_A der Grösse dieser Art und einer absolut-reellen Zahl z, der *Masszahl von A bezüglich E_A* erscheint, da für die angegebene Verknüpfung von Grösse und Zahl die Axiome der Multiplikation gelten ($A = z\,E_A = z \cdot E_A$; $E_A = 1 \cdot E_A$). Ist $A_1 = z\,A_2$ (a), so heisst A_1 das Produkt von z und A_2, umgekehrt A_2 der Quotient A_1/z von A_1 und z. Nach b) wird eine Grösse mit einer Zahl multipliziert bzw. dividiert, indem man mit ihrer Masszahl dieselbe Operation vornimmt (Einheitenwechsel). Nach c) addiert oder subtrahiert man zwei gleichartige Grössen, indem man ihre Masszahlen bezüglich derselben Einheit addiert bzw. subtrahiert. Man kann also nach Wahl einer Grösse E_A alle Grössen derselben Art umkehrbar eindeutig, stetig und ähnlich durch die absolut-reellen Zahlen individuell kennzeichnen, eine Abbildung, welche bezüglich der Addition und Subtraktion von Grössen und ihrer Multiplikation und Division mit einer Zahl isomorph ist. Ist $A_1 = z\,A_2$ (a), so heisst ferner z der *Quotient* A_1/A_2 oder $A_1 : A_2$ von A_1 und A_2 (A_1, A_2 sind Grössen gleicher Art). Falls $z = p/q$ rational ist, nennt man A_1/A_2 gewöhnlich das Verhältnis von A_1 und A_2 und sagt, A_1 verhalte sich zu A_2 wie p zu q, fasst also die Masszahlen als «Verhältnisse» zweier Grössen derselben Art auf. H. WEBER (l. c., S. 138) zeigt, dass der Quotient A_1/A_2 gleich dem Quotienten der Masszahlen von A_1, A_2 bezüglich einer beliebigen Einheit ist, ein Satz, der in der Schule noch oft der Definition des Begriffs «Verhältnis von A_1 und A_2» dient.

Die angegebenen Axiome und Sätze besagen auch, dass in dem Bereich, der aus den absolut-reellen Zahlen und allen Grössen einer bestimmten Art besteht, mit Ausnahme der Addition und Subtraktion einer Zahl und einer Grösse, der Multiplikation zweier Grössen und der Division einer Zahl durch eine Grösse, nach den Gesetzen, die für absolut-reelle Zahlen gelten, gerechnet werden kann. Existiert zu jeder Grösse A eine und nur eine Grösse A', welche A hinsichtlich der zur Definition der Addition zweier Grössen verwendeten Wirkung aufhebt (Temperaturänderungen, elektrische Ladungen, kollineare Vektorgrössen gleicher Art, Drehmomente oder Flächen orientierter Parallelogramme gleicher Stellung), so kann, falls A' mit $-A$ bezeichnet wird, wie üblich mit *Vorzeichen + und –* gerechnet werden, und die Nebenbedingung $A < B$ in (3) fällt weg (Positive und negative Masszahlen, Grössen und Einheiten).

Der *physikalische Zusammenhang von Grössen* verschiedener Art, der hier die messende Geometrie umfasst, insbesondere der Begriff der *Proportionalität von Grössen*, erlauben nun, eine Multiplikation, deren Iteration und Umkehrungen für gleich- und verschiedenartige Grössen zu definieren. Grundlegend ist der Begriff des Quotienten zweier gleichartiger Grössen.

α) Sind A_1, A_2 zwei Grössen gleicher Art und ist $A_1 = z\,A_2$ und, falls B_1, B_2 zwei Grössen derselben oder einer andern Art sind, $B_1 = z'\,B_2$, so sagt man $A_1/A_2 \gtreqless B_1/B_2$, wenn bzw. $z \gtreqless z'$ ist (A_1 verhält sich zu A_2 wie B_1 zu B_2 im Gleichheitsfalle), aber $A_1/A_2 \gtreqless B_2/B_1$, wenn bzw. $z \gtreqless 1/z'$ ist (A_1 verhält sich zu A_2 umgekehrt wie B_1 zu B_2).

Hier sei auf EUKLIDS Definition dieser Gleichheit hingewiesen, deren Sinn bekanntlich darin liegt, dass sie für inkommensurable Grössen und für Paare ungleichartiger Grössen auch möglich bleibt. Der heutige Begriff der reinen, gebrochenen und irrationalen Zahl macht die Redeweise der «Proportionenlehre» überflüssig – wovon in den Schulbüchern allerdings noch nichts zu bemerken ist!

α') Ist $B_1 = z^x\,B_2$ bzw. $B_1 = z^{-x}\,B_2$ und $A_1 = z\,A_2$, x positiv-reell, so sagt man

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^x \quad \text{bzw.} \quad \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^x$$

oder: A_1 verhält sich zu A_2 wie bzw. umgekehrt wie die x-te Potenz von B_1 zu B_2 (auch wie die $-x$-te Potenz von B_1 zu B_2; EUKLID sagt, A_1 zu A_2 sei das x-fache von B_1 zu B_2 bzw. B_2 zu B_1, für natürliche Zahlen x).

β) *Definition:* Eine variable Grösse Z ist *proportional* zu A^a, B^b, C^c, ... und *umgekehrt proportional* zu K^k, L^l, M^m, ... ($A, B, C, \dots, K, L, M, \dots$ = variable Grössen derselben oder verschiedener Art; E_A, E_B, ... = beliebige Einheiten derselben; a, b, ... = positiv-reelle Zahlen), wenn ein Zusammenhang besteht, der jedem zusammenbestehenden Wertesystem $A = \alpha\,E_A$, $B = \beta\,E_B$, $C = \gamma\,E_C, \dots, K = \varkappa\,E_K$, $L = \lambda\,E_L, \dots$ einen Wert $Z = \zeta\,(\alpha, \beta, \dots, \varkappa, \dots)\,E_Z$ so zuordnet, dass $Z_1/Z_2 = (A_1/A_2)^a$ ist [bzw. $Z_1/Z_2 = (K_2/K_1)^k$], wo A_1, A_2 [bzw. K_1, K_2] irgend zwei Werte von A [bzw. K] sind, Z_1, Z_2 die zugeordneten Werte von Z, falls alle andern Grössen ihre beliebigen Werte beibehalten (und entsprechend für $B^b, \dots$ bzw. $L^l, \dots$). Man sagt, Z habe *bezüglich A* die *Dimension a* usw. Zweckmässig spricht man auch von «proportional zu K^{-k}» statt von «umgekehrt proportional zu K^k».

γ) Gelten die Voraussetzungen β), so folgt:

Satz: Zu jedem System von Einheiten $E_A, E_B, \dots, E_K, \dots$ existiert stets eine und nur eine Zahl ω derart, dass

$$\zeta\,(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varkappa, \lambda, \mu, \dots) = \omega\,\alpha^a\,\beta^b\,\gamma^c \dots \varkappa^{-k}\,\lambda^{-l}\,\mu^{-m} \dots$$

ist, für *jedes* zusammenbestehende Wertesystem von $A, B, C, \dots, K, L, M, \dots, Z$.

Beweis: Sind

$$Z_{1,1,1,\dots,1,1,1,\dots} = \zeta\,(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \varkappa_1, \lambda_1, \mu_1, \dots)\,E_Z \quad \text{und} \quad Z_{2,2,2,\dots,2,2,2,\dots}$$

die mit $\quad A_1 = \alpha_1\,E_A, \quad B_1 = \beta_1\,E_B, \dots \quad$ bzw. $\quad A_2, B_2, \dots$

zusammenbestehenden Werte von Z, so ist nach β)

$$\frac{\zeta(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \dots, \varkappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)}{\zeta(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \varkappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)} = \frac{\alpha_1^a}{\alpha_2^a}; \quad \frac{\zeta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \dots, \varkappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)}{\zeta(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \dots, \varkappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)} = \frac{\beta_1^b}{\beta_2^b} \quad \text{usw.}$$

Dann $\quad \dfrac{\zeta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \varkappa_1, \lambda_2, \mu_2, \dots)}{\zeta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \varkappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)} = \dfrac{\varkappa_2^k}{\varkappa_1^k} \quad$ usw., und durch Multiplikation:

$$\frac{\zeta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \varkappa_1, \lambda_1, \mu_1, \ldots)}{\zeta(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots, \varkappa_2, \lambda_2, \mu_2, \ldots)} = \frac{\alpha_1^a}{\alpha_2^a} \cdot \frac{\beta_1^b}{\beta_2^b} \cdot \frac{\gamma_1^c}{\gamma_2^c} \cdots \frac{\varkappa_2^k}{\varkappa_1^k} \cdot \frac{\lambda_2^l}{\lambda_1^l} \cdot \frac{\mu_2^m}{\mu_1^m} \cdots$$

oder

$$\frac{\zeta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \varkappa_1, \lambda_1, \mu_1, \ldots)}{\dfrac{\alpha_1^a \beta_1^b \gamma_1^c \cdots}{\varkappa_1^k \lambda_1^l \mu_1^m \cdots}} = \frac{\zeta(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots, \varkappa_2, \lambda_2, \mu_2, \ldots)}{\dfrac{\alpha_2^a \beta_2^b \gamma_2^c \cdots}{\varkappa_2^k \lambda_2^l \mu_2^m \cdots}} = \omega$$

wählt man $\omega E_Z = E_Z^*$ als Einheit von Z, welche man als *die zu* $E_A, E_B, E_C, \ldots E_K, \ldots$ *kohärente Einheit von* Z bezeichnet, so ist

$$Z = \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \cdots}{\varkappa^k \lambda^l \mu^m \cdots} E_Z^*$$

für *jedes* zusammenbestehende Wertesystem $A, B, C, \ldots, K, \ldots, Z$. E_Z^* ist der Wert von Z für $\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \varkappa = \lambda = \mu \cdots = 1$.

δ) *Definition:*

$$Z = \frac{A^a B^b C^c \cdots}{K^k L^l M^m \cdots}$$

ist die durch $A, B, C, \ldots, K, \ldots$ eindeutig bestimmte, zu $A^a, B^b, \ldots$ proportionale, zu $K^k, L^l, \ldots$ umgekehrt proportionale Grösse Z, das heisst falls

$$A = \alpha E_A, \quad B = \beta E_B, \quad \ldots, \quad K = \varkappa E_K, \ldots$$

ist, diejenige Grösse Z, deren Masszahl

$$\zeta = \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \cdots}{\varkappa^k \lambda^l \mu^m \cdots}$$

und deren Einheit die zu $E_A, E_B, \ldots, E_K, \ldots$ kohärente Einheit E_Z^* ist.

Für diese Verknüpfung gilt

$$A B = B A, \quad A B C = A(B C), \quad A(B_1 + B_2) = A B_1 + A B_2, \quad \frac{A}{B} B = A,$$

was ihre Bezeichnung als Multiplikation bzw. Division rechtfertigt. Für

$$\alpha = \beta = \gamma = \cdots = \varkappa = \lambda = \mu = \cdots = 1$$

folgt aus (δ):

$$E_Z^* = \frac{E_A^a E_B^b E_C^c \cdots}{E_K^k E_L^l E_M^m \cdots}.$$

Man kann also E_Z^* nach den Regeln des «Buchstabenrechnens» aus den Einheiten von $A, B, \ldots, K, \ldots$ bestimmen, nicht nur die Masszahl ζ.

Beispiele: 1. Wirkt die Kraft $F = f$ kg längs des Weges $S = s$ m, so ist die Arbeit W proportional zu F und S (Definition!). Folglich: $F \cdot S = (f \cdot s) E_w^* = W$, wo E_w^* die zu kg und m kohärente Arbeitseinheit ist, das heisst die Arbeit der Kraft 1 kg längs des Weges 1 m, und welche gleich kg · m oder kgm ist.

2. Legt ein Punkt in der Zeit $T = t$ s den Weg $S = s$ m zurück, so ist seine (durchschnittliche) Geschwindigkeit V proportional zu S, umgekehrt proportional zu T (Definition). Folglich[1])

$$\frac{S}{T} = \frac{s\,\mathrm{m}}{t\,\mathrm{s}} = \frac{s}{t} E_V^* = V, \qquad E_V^* = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \mathrm{m/s},$$

wo E_V^* die Geschwindigkeit darstellt, die er hat, falls er in 1 s 1 m zurücklegt.

Man kann demnach in dem Bereich, der durch Aufnahme *aller* Grössen zum Bereich der reellen Zahlen entsteht, nach den Regeln der gewöhnlichen Arithmetik rechnen, falls man Grössen als Exponenten, ferner Operationen erster Stufe mit ungleichartigen Grössen ausschliesst (Homogenität der Gleichungen bezüglich der Dimensionen).

Die physikalischen und geometrischen Grössen, welche im *mehrdimensionalen Raum* existieren und wirken, weisen oft einen *Symmetriecharakter* auf, der die Messresultate von den Richtungen der Achsen des Koordinatenssystems, das der Messung zugrunde liegt, abhängig macht. Da die geometrischen und physikalischen Objekte vom Koordinatensystem unabhängig sind, müssen sie sich bei Drehungen desselben invariant verhalten. Wir setzen fest[2]): Eine *Tensorgrösse* $A_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ $(i = 1, 2, 3)$ m-ter Stufe ist (im dreidimensionalen euklidischen Raum) ein System von 3^m vom (kartesischen) Koordinatensystem abhängigen Grössen gleicher Art, seinen Koordinaten in dem betreffenden Koordinatensystem, die sich bei einer Drehung des Koordinatensystems ($x_i = a_{ij} \bar{x}_j$, wo $a_{ij} a_{ik} = 1$ für $j = k$, 0 für $j \neq k$ ist, oder die quadratische Form $x_i x_i$ invariant bleibt[3]) nach dem Gesetz

$$A'_{i_1 i_2 \ldots i_m} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_m j_m} \bar{A}_{j_1 j_2 \ldots j_m} \tag{7}$$

beziehungsweise

$$\bar{A}_{j_1 j_2 \ldots j_m} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_m j_m} A_{i_1 i_2 \ldots i_m} \tag{8}$$

transformieren. Die Variablen x_i, $\bar{x}_j$ können nicht nur die Masszahlen von Längen bezüglich der gleichen Einheit vertreten, wie es in der analytischen Geometrie üblich ist, sondern, da die a_{ij} Zahlen (Richtungskosinus) sind, auch diese Längen selbst. Die rechte Seite von (7) bzw. (8) ist eine homogene, lineare Form in den Grössen gleicher Art $\bar{A}_j\ldots$ bzw. $A_i\ldots$ mit Zahlenkoeffizienten, so dass links eine Grösse derselben Art steht und diese Beziehungen als Grössengleichungen aufgefasst werden können. Die Operationen der Tensoralgebra (Addition, Multiplikation, Verjüngung) sind mit Grössen als Tensorkoordinaten durchführbar, da dabei nur Additionen gleichartiger Grössen und Multiplikationen vorkommen, und zwar immer symmetrisch und homogen in allen Koordinaten. Das bekannte «äussere Produkt» zweier Vektoren (Tensoren erster Stufe), das sich hier nicht einzufügen scheint, ist eben gar kein Vektor[4]). Nach Wahl einer beliebigen Grösse E_A derselben Art kann jede solche Tensorgrösse m-ter Stufe $A_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ $(i = 1, 2, 3)$ auf Grund der Sätze a), b), c) als Produkt der Einheit

[1]) Vergleiche J. WALLOT, *Dimensionen, Einheiten, Maßsysteme*, in: GEIGER und SCHEELE, *Handbuch der Physik*, Bd. 2 (Springer, Berlin 1926), S. 2ff.

[2]) Vergleiche A. DUSCHEK und A. HOCHRAINER, *Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung*, I. Teil: *Tensoralgebra* (Springer, Wien 1946), S. 60.

[3]) In einem Produkt ist über gleiche Indizes von 1 bis 3 zu summieren.

[4]) Vergleiche F. KLEIN, *Elementare Mathematik vom höheren Standpunkt*, Teil II: *Geometrie* (Teubner, Leipzig 1913), S. 106 ff. Auch H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie* (Springer, Berlin 1921), S. 30ff.

E_A der Grösse dieser Art und eines (dimensionslosen) Tensors m-ter Stufe $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_m}$ $(i = 1, 2, 3)$, dessen Koordinaten die Masszahlen der Koordinaten von $A_{i_1 i_2 \dots i_m}$ bezüglich E_A sind, dargestellt werden. Letzterer kann dann noch als Produkt einer Zahl α und eines Einstensors, das heisst eines dimensionslosen Tensors m-ter Stufe, dessen Betrag eins ist, angegeben werden ($A_{i_1 i_2 \dots i_m} = \alpha\, E_A \cdot 1_{i_1 i_2 \dots i_m}$; zum Beispiel Richtungskosinus $\cos\alpha_i = e_i$ eines Vektors). Dann kann mit diesen Symbolen, falls die angegebenen Einschränkungen beachtet werden, nach den Regeln der gewöhnlichen Arithmetik und des Tensorkalküls gerechnet werden. Auch hier zeigt sich die Unzweckmässigkeit des üblichen symbolisch-anschaulichen Vektorkalküls, der diese «Permanenz» nicht zulässt (sogenannte innere und äussere «Produkte»). Verwendet man affine Koordinatensysteme (Achsen verschieden geeicht und schiefwinklig), so tritt an Stelle der invarianten Form $x_i\, x_i$ die metrische Grundform $g_{ik}\, x_i\, x_k$, das heisst als (dimensionsloser) metrischer Fundamentaltensor g_{ik}, statt des Einheitstensors $\delta_{ij} = 1$ $(i = j)$ bzw. 0 $(i \neq j)$ zweiter Stufe, der übrigens nur beim Übergang von kontra- zu kovarianten Koordinaten vorkommt.

Überblicken wir nochmals den Gedankengang, so erscheint die Grössengleichung als das Ursprüngliche. Der Psychologe, Genetiker und Erkenntnistheoretiker wird vielleicht geneigt sein, zu sagen, wir rechnen mit Zahlen wie mit Grössen – und nicht umgekehrt. Doch das geht über die in der Mathematik übliche Analyse der Relationensysteme auf Grund einer *a pricri* gegebenen Logik hinaus.

K. Ott, Zürich.

Kleine Mitteilungen

Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser

Die Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser mit Hilfe der perspektiven Affinität stützt sich bekanntlich auf die Aufsuchung eines zugeordneten Paares rechter Winkel, deren Scheitel der Mittelpunkt der Ellipse und der Mittelpunkt eines passenden affinen Kreises sind. Dabei wird die Affinitätsachse so gewählt, dass diese Scheitel nicht zusammenfallen (siehe Flükiger oder E. Müller, Band 1). Es gibt indes eine interessante Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, wenn die erwähnten Mittelpunkte zusammenfallen, insbesondere wenn als Affinitätsachse die Gerade eines der gegebenen konjugierten Durchmesser gewählt wird; eine Möglichkeit, die nebst einer neuen Konstruktion einen neuen Zugang zur Rytzschen Konstruktion erschliesst.

Wir lösen vorerst, *absichtlich elementar*, die Hilfsaufgabe:

Bei gegebener Affinitätsrichtung, gegebener Affinitätsachse und gegebenem Affinitätsverhältnis soll das perspektiv-affine Rechtwinkelpaar konstruiert werden, dessen gemeinsamer Scheitel S auf der Affinitätsachse gegeben ist.

Seien $\sphericalangle (a_1, b_1)$ und $\sphericalangle (a_2, b_2)$, wobei $a_1 \perp b_1$ und $a_2 \perp b_2$, die gesuchten rechten Winkel und g irgendeine Gerade in der Affinitäsrichtung, welche ihre Schenkel schneidet. Dann müssen die Schnittpunkte A_1, A_2 bzw. B_1, B_2 (Figur 1) von g mit a_1 und a_2 bzw. mit b_1 und b_2 zugeordnete Punkte sein. Zieht man beispielsweise durch A_1 die Gerade $\bar{a}_2$ parallel zu a_2 und ist T ihr Schnittpunkt mit der Affinitätsachse s, so gilt $AA_2/AA_1 = AS/AT$, wenn A der Schnittpunkt von g mit s ist. Nun ist aber auch