

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 7 (1952)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Zahlen- oder Grössengleichung?  
**Autor:** Ott, K.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16357>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Zahlen- oder Grössengleichung?

Die lange umstrittene Frage, ob die Funktionsgleichungen, welche die Zusammenhänge der physikalischen und geometrischen Grössen darstellen, nur als Zahlen-gleichheiten oder aber als Beziehungen dieser Grössen selbst – das heisst ihres in unserm Bewusstsein dem transzendenten «Ding an sich» zugeordneten «Modells» – aufzufassen sind<sup>1)</sup>, widerspiegelte sich in Inkonsequenzen mancher Lehrbücher<sup>2)</sup> und führte zu einer Vernachlässigung der Massstabfragen, die sich unter anderem in Sätzen äussert, wie zum Beispiel «Die Masszahl der Fläche eines Rechtecks ist gleich dem Produkt der Masszahlen der Seiten», was offensichtlich nur bei geeigneter Wahl der Einheiten stimmt. Nur der feste Ausdruck «Maßzahl einer Grösse bezüglich einer Einheit» ist sinnvoll.

Die sogenannten *Axiome der Messbarkeit* gestatten nun ebenfalls eine Lösung dieser Frage, auch für den irrationalen Fall und Tensoren beliebiger Stufe. H. WEBER<sup>3)</sup> erblickt – sinngemäss wiedergegeben – das Wesen einer «messbaren Menge» in den folgenden, durch das Messverfahren zu realisierenden Bestimmungen<sup>4)</sup>. (Grosse Buchstaben bezeichnen stets Grössen, kleine Buchstaben reine Zahlen):

(1) Existenz der Relationen  $=$  und  $<$  für beliebige Elemente derselben, welche den üblichen Postulaten genügen.

(2) Existenz einer eindeutigen «Summe»  $A + B$  von  $A$  und  $B$  (intensive Verknüpfung nach LANDOLT), für welche das kommutative und das assoziative Gesetz gelten, und  $(A + B) > A$  und  $> B$  ist (deshalb das Zeichen  $+$ ).

(3) Ist  $A < B$ , so existiert  $X$  derart, dass  $A + X = B$  ist (Subtraktion).

(4) Zu jeder Grösse gibt es eine kleinere.

(5) Falls  $n B (= B n)$  die Summe der  $n$  gleichen Grössen  $B$  darstellt (intensive Potenz nach LANDOLT), so gilt das Archimedische Axiom.

(6) Falls  $n$  und  $A$  gegeben sind, so existiert  $B$  derart, dass  $n B = A$  ist.

O. HÖLDER<sup>5)</sup> setzt statt (5, 6) die Dedekindsche Stetigkeit voraus. Die Relation  $<$  und die Postulate, welche sich auf sie beziehen, erlauben den für den Praktiker allerdings bedeutungslosen inkommensurablen Fall zu erfassen. Die Nebenbedingung  $A < B$  in (3) folgt aus der Tatsache, dass die Gleichung  $A + X = B$  in gewissen Fällen (absolute Temperatur, Masse, als Beträge von Tensoren erscheinende Grössen) physikalisch nicht lösbar ist. Zu beachten ist auch, dass das Rechnen mit Grössen von der Einführung relativer Masszahlen unabhängig ist. Das angegebene Axiomensystem legt den Begriff «Grösse gleicher Art» fest und erlaubt den Beweis folgender Sätze<sup>6)</sup>:

a) Sind  $A_1$  und  $A_2$  zwei beliebige Grössen gleicher Art, so existiert stets eine und nur eine absolut-reelle Zahl  $z$ , und umgekehrt gibt es bei gegebenem  $A_2$  zu jeder

<sup>1)</sup> Vergleiche M. LANDOLT, *Grösse, Masszahl und Einheit* (Rascher, Zürich 1943), S. 37.

<sup>2)</sup> Siehe E. ROTH-DESMEULES, *Über das Rechnen mit Grössen*, *El. Math.* 4, Nr. 5, 105 (1949).

<sup>3)</sup> *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik*, Bd. I (Teubner, Leipzig 1934), S. 134.

<sup>4)</sup> Vergleiche auch CARNAP, *Physikalische Begriffsbildung* (G. Braun, Karlsruhe 1926).

<sup>5)</sup> O. HÖLDER, *Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass*, *Ber. Sächs. Ges. Wiss.* 53, 1 (1901).  
Siehe auch G. VERONESE, *Atti R. Accad. Lincei* [4], *Mem. Cl. Sci. fis.* 6, 617 (1889).

<sup>6)</sup> Vergleiche O. HÖLDER, *Die Arithmetik in strenger Begründung* (Springer, Berlin 1929); H. WEBER, *l. c.*, S. 136 ff.

solchen Zahl  $z$  eine Grösse  $A_1$  derart, dass  $A_1 = z A_2 = A_2 z$  ist (falls  $z = p/q$  rational ist, so bedeutet  $A_1 = z A_2$ , dass  $q A_1 = p A_2$  ist).

b) Sind  $z_1, z_2$  absolut-reelle Zahlen und ist  $A$  irgendeine Grösse, so ist

$$z_1 (z_2 A) = (z_1 z_2) A \quad (\text{assoziatives Gesetz}),$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{c) } \quad z (A_1 \pm A_2) = z A_1 \pm z A_2 \quad (A_1 > A_2) \\ \text{und} \quad (z_1 \pm z_2) A = z_1 A \pm z_2 A \quad (z_1 > z_2) \end{array} \right\} (\text{distributive Gesetze}).$$

Diese Sätze besagen, dass nach Wahl einer willkürlichen Grösse  $E_A$  jede Grösse  $A$  einer bestimmten Art als *Produkt* einer *Einheit*  $E_A$  der Grösse dieser Art und einer absolut-reellen Zahl  $z$ , der *Masszahl von  $A$  bezüglich  $E_A$*  erscheint, da für die angegebene Verknüpfung von Grösse und Zahl die Axiome der Multiplikation gelten ( $A = z E_A = z \cdot E_A$ ;  $E_A = 1 \cdot E_A$ ). Ist  $A_1 = z A_2$  (a), so heisst  $A_1$  das Produkt von  $z$  und  $A_2$ , umgekehrt  $A_2$  der Quotient  $A_1/z$  von  $A_1$  und  $z$ . Nach b) wird eine Grösse mit einer Zahl multipliziert bzw. dividiert, indem man mit ihrer Masszahl dieselbe Operation vornimmt (Einheitenwechsel). Nach c) addiert oder subtrahiert man zwei gleichartige Grössen, indem man ihre Masszahlen bezüglich derselben Einheit addiert bzw. subtrahiert. Man kann also nach Wahl einer Grösse  $E_A$  alle Grössen derselben Art umkehrbar eindeutig, stetig und ähnlich durch die absolut-reellen Zahlen individuell kennzeichnen, eine Abbildung, welche bezüglich der Addition und Subtraktion von Grössen und ihrer Multiplikation und Division mit einer Zahl isomorph ist. Ist  $A_1 = z A_2$  (a), so heisst ferner  $z$  der *Quotient  $A_1/A_2$*  oder  $A_1 : A_2$  von  $A_1$  und  $A_2$  ( $A_1, A_2$  sind Grössen gleicher Art). Falls  $z = p/q$  rational ist, nennt man  $A_1/A_2$  gewöhnlich das Verhältnis von  $A_1$  und  $A_2$  und sagt,  $A_1$  verhalte sich zu  $A_2$  wie  $p$  zu  $q$ , fasst also die Masszahlen als «Verhältnisse» zweier Grössen derselben Art auf. H. WEBER (l. c., S. 138) zeigt, dass der Quotient  $A_1/A_2$  gleich dem Quotienten der Masszahlen von  $A_1, A_2$  bezüglich einer beliebigen Einheit ist, ein Satz, der in der Schule noch oft der Definition des Begriffs «Verhältnis von  $A_1$  und  $A_2$ » dient.

Die angegebenen Axiome und Sätze besagen auch, dass in dem Bereich, der aus den absolut-reellen Zahlen und allen Grössen einer bestimmten Art besteht, mit Ausnahme der Addition und Subtraktion einer Zahl und einer Grösse, der Multiplikation zweier Grössen und der Division einer Zahl durch eine Grösse, nach den Gesetzen, die für absolut-reelle Zahlen gelten, gerechnet werden kann. Existiert zu jeder Grösse  $A$  eine und nur eine Grösse  $A'$ , welche  $A$  hinsichtlich der zur Definition der Addition zweier Grössen verwendeten Wirkung aufhebt (Temperaturänderungen, elektrische Ladungen, kollineare Vektorgrössen gleicher Art, Drehmomente oder Flächen orientierter Parallelelogramme gleicher Stellung), so kann, falls  $A'$  mit  $-A$  bezeichnet wird, wie üblich mit *Vorzeichen + und -* gerechnet werden, und die Nebenbedingung  $A < B$  in (3) fällt weg (Positive und negative Masszahlen, Grössen und Einheiten).

Der *physikalische Zusammenhang von Grössen* verschiedener Art, der hier die messende Geometrie umfasst, insbesondere der Begriff der *Proportionalität von Grössen*, erlauben nun, eine Multiplikation, deren Iteration und Umkehrungen für gleich- und verschiedenartige Grössen zu definieren. Grundlegend ist der Begriff des Quotienten zweier gleichartiger Grössen.

α) Sind  $A_1, A_2$  zwei Grössen gleicher Art und ist  $A_1 = z A_2$  und, falls  $B_1, B_2$  zwei Grössen derselben oder einer andern Art sind,  $B_1 = z' B_2$ , so sagt man  $A_1/A_2 \cong B_1/B_2$ , wenn bzw.  $z \cong z'$  ist ( $A_1$  verhält sich zu  $A_2$  wie  $B_1$  zu  $B_2$  im Gleichheitsfalle), aber  $A_1/A_2 \cong B_2/B_1$ , wenn bzw.  $z \cong 1/z'$  ist ( $A_1$  verhält sich zu  $A_2$  umgekehrt wie  $B_1$  zu  $B_2$ ).

Hier sei auf EUKLIDS Definition dieser Gleichheit hingewiesen, deren Sinn bekanntlich darin liegt, dass sie für inkommensurable Grössen und für Paare ungleichartiger Grössen auch möglich bleibt. Der heutige Begriff der reinen, gebrochenen und irrationalen Zahl macht die Redeweise der «Proportionenlehre» überflüssig – wovon in den Schulbüchern allerdings noch nichts zu bemerken ist!

α') Ist  $B_1 = z^x B_2$  bzw.  $B_1 = z^{-x} B_2$  und  $A_1 = z A_2$ ,  $x$  positiv-reell, so sagt man

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^x \quad \text{bzw.} \quad \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^x$$

oder:  $A_1$  verhält sich zu  $A_2$  wie bzw. umgekehrt wie die  $x$ -te Potenz von  $B_1$  zu  $B_2$  (auch wie die  $-x$ -te Potenz von  $B_1$  zu  $B_2$ ; EUKLID sagt,  $A_1$  zu  $A_2$  sei das  $x$ -fache von  $B_1$  zu  $B_2$  bzw.  $B_2$  zu  $B_1$ , für natürliche Zahlen  $x$ ).

β) *Definition*: Eine variable Grösse  $Z$  ist *proportional* zu  $A^a, B^b, C^c, \dots$  und *umgekehrt proportional* zu  $K^k, L^l, M^m, \dots$  ( $A, B, C, \dots, K, L, M, \dots =$  variable Grössen derselben oder verschiedener Art;  $E_A, E_B, \dots =$  beliebige Einheiten derselben;  $a, b, \dots =$  positiv-reelle Zahlen), wenn ein Zusammenhang besteht, der jedem zusammenbestehenden Wertesystem  $A = \alpha E_A, B = \beta E_B, C = \gamma E_C, \dots, K = \kappa E_K, L = \lambda E_L, \dots$  einen Wert  $Z = \zeta(\alpha, \beta, \dots, \kappa, \dots) E_Z$  so zuordnet, dass  $Z_1/Z_2 = (A_1/A_2)^a$  ist [bzw.  $Z_1/Z_2 = (K_2/K_1)^k$ ], wo  $A_1, A_2$  [bzw.  $K_1, K_2$ ] irgend zwei Werte von  $A$  [bzw.  $K$ ] sind,  $Z_1, Z_2$  die zugeordneten Werte von  $Z$ , falls alle andern Grössen ihre beliebigen Werte beibehalten (und entsprechend für  $B^b, \dots$  bzw.  $L^l, \dots$ ). Man sagt,  $Z$  habe *bis-züglich*  $A$  die *Dimension*  $a$  usw. Zweckmässig spricht man auch von «proportional zu  $K^{-k}$ » statt von «umgekehrt proportional zu  $K^k$ ».

γ) Gelten die Voraussetzungen β), so folgt:

Satz: Zu jedem System von Einheiten  $E_A, E_B, \dots, E_K, \dots$  existiert stets eine und nur eine Zahl  $\omega$  derart, dass

$$\zeta(\alpha, \beta, \gamma, \dots, \kappa, \lambda, \mu, \dots) = \omega \alpha^a \beta^b \gamma^c \dots \kappa^{-k} \lambda^{-l} \mu^{-m} \dots$$

ist, für jedes zusammenbestehende Wertesystem von  $A, B, C, \dots, K, L, M, \dots, Z$ .  
Beweis: Sind

$$Z_{1,1,1,\dots,1,1,1,\dots} = \zeta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \kappa_1, \lambda_1, \mu_1, \dots) E_Z \quad \text{und} \quad Z_{2,2,2,\dots,2,2,2,\dots}$$

die mit  $A_1 = \alpha_1 E_A, B_1 = \beta_1 E_B, \dots$  bzw.  $A_2, B_2, \dots$

zusammenbestehenden Werte von  $Z$ , so ist nach β)

$$\frac{\zeta(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \dots, \kappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)}{\zeta(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \kappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)} = \frac{\alpha_1^a}{\alpha_2^a}, \quad \frac{\zeta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \dots, \kappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)}{\zeta(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \dots, \kappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)} = \frac{\beta_1^b}{\beta_2^b} \text{ usw.}$$

Dann 
$$\frac{\zeta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \kappa_1, \lambda_2, \mu_2, \dots)}{\zeta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \kappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)} = \frac{\kappa_1^k}{\kappa_2^k} \text{ usw.,}$$

und durch Multiplikation:

$$\frac{\zeta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \kappa_1, \lambda_1, \mu_1, \dots)}{\zeta(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \kappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)} = \frac{\alpha_1^a}{\alpha_2^a} \cdot \frac{\beta_1^b}{\beta_2^b} \cdot \frac{\gamma_1^c}{\gamma_2^c} \dots \frac{\kappa_2^k}{\kappa_1^k} \cdot \frac{\lambda_2^l}{\lambda_1^l} \cdot \frac{\mu_2^m}{\mu_1^m} \dots$$

oder

$$\frac{\zeta(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots, \kappa_1, \lambda_1, \mu_1, \dots)}{\frac{\alpha_1^a \beta_1^b \gamma_1^c \dots}{\kappa_1^k \lambda_1^l \mu_1^m \dots}} = \frac{\zeta(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \dots, \kappa_2, \lambda_2, \mu_2, \dots)}{\frac{\alpha_2^a \beta_2^b \gamma_2^c \dots}{\kappa_2^k \lambda_2^l \mu_2^m \dots}} = \omega$$

wählt man  $\omega E_Z = E_Z^*$  als Einheit von  $Z$ , welche man als *die zu  $E_A, E_B, E_C, \dots, E_K, \dots$  kohärente Einheit von  $Z$*  bezeichnet, so ist

$$Z = \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \dots}{\kappa^k \lambda^l \mu^m \dots} E_Z^*$$

für jedes zusammenbestehende Wertesystem  $A, B, C, \dots, K, \dots, Z$ .  $E_Z^*$  ist der Wert von  $Z$  für  $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \kappa = \lambda = \mu = \dots = 1$ .

$\delta$ ) *Definition:*

$$Z = \frac{A^a B^b C^c \dots}{K^k L^l M^m \dots}$$

ist die durch  $A, B, C, \dots, K, \dots$  eindeutig bestimmte, zu  $A^a, B^b, \dots$  proportionale, zu  $K^k, L^l, \dots$  umgekehrt proportionale Grösse  $Z$ , das heisst falls

$$A = \alpha E_A, \quad B = \beta E_B, \quad \dots, \quad K = \kappa E_K, \dots$$

ist, diejenige Grösse  $Z$ , deren Masszahl

$$\zeta = \frac{\alpha^a \beta^b \gamma^c \dots}{\kappa^k \lambda^l \mu^m \dots}$$

und deren Einheit die zu  $E_A, E_B, \dots, E_K, \dots$  kohärente Einheit  $E_Z^*$  ist.

Für diese Verknüpfung gilt

$$A B = B A, \quad A B C = A (B C), \quad A (B_1 + B_2) = A B_1 + A B_2, \quad \frac{A}{B} B = A,$$

was ihre Bezeichnung als Multiplikation bzw. Division rechtfertigt. Für

$$\alpha = \beta = \gamma = \dots = \kappa = \lambda = \mu = \dots = 1$$

folgt aus ( $\delta$ ):

$$E_Z^* = \frac{E_A^a E_B^b E_C^c \dots}{E_K^k E_L^l E_M^m \dots}.$$

Man kann also  $E_Z^*$  nach den Regeln des «Buchstabenrechnens» aus den Einheiten von  $A, B, \dots, K, \dots$  bestimmen, nicht nur die Masszahl  $\zeta$ .

Beispiele: 1. Wirkt die Kraft  $F = f$  kg längs des Weges  $S = s$  m, so ist die Arbeit  $W$  proportional zu  $F$  und  $S$  (Definition!). Folglich:  $F \cdot S = (f \cdot s) E_w^* = W$ , wo  $E_w^*$  die zu kg und m kohärente Arbeitseinheit ist, das heisst die Arbeit der Kraft 1 kg längs des Weges 1 m, und welche gleich kg · m oder kgm ist.

2. Legt ein Punkt in der Zeit  $T = t$  s den Weg  $S = s$  m zurück, so ist seine (durchschnittliche) Geschwindigkeit  $V$  proportional zu  $S$ , umgekehrt proportional zu  $T$  (Definition). Folglich<sup>1)</sup>

$$\frac{S}{T} = \frac{s \text{ m}}{t \text{ s}} = \frac{s}{t} E_V^* = V, \quad E_V^* = \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{m/s},$$

wo  $E_V^*$  die Geschwindigkeit darstellt, die er hat, falls er in 1 s 1 m zurücklegt.

Man kann demnach in dem Bereich, der durch Aufnahme *aller* Grössen zum Bereich der reellen Zahlen entsteht, nach den Regeln der gewöhnlichen Arithmetik rechnen, falls man Grössen als Exponenten, ferner Operationen erster Stufe mit ungleichartigen Grössen ausschliesst (Homogenität der Gleichungen bezüglich der Dimensionen).

Die physikalischen und geometrischen Grössen, welche im *mehrdimensionalen Raum* existieren und wirken, weisen oft einen *Symmetriecharakter* auf, der die Messresultate von den Richtungen der Achsen des Koordinatensystems, das der Messung zugrunde liegt, abhängig macht. Da die geometrischen und physikalischen Objekte vom Koordinatensystem unabhängig sind, müssen sie sich bei Drehungen desselben invariant verhalten. Wir setzen fest<sup>2)</sup>: Eine *Tensorgrösse*  $A_{i_1 i_2 \dots i_m}$  ( $i = 1, 2, 3$ )  $m$ -ter Stufe ist (im dreidimensionalen euklidischen Raum) ein System von  $3^m$  vom (kartesischen) Koordinatensystem abhängigen Grössen gleicher Art, seinen Koordinaten in dem betreffenden Koordinatensystem, die sich bei einer Drehung des Koordinatensystems ( $x_i = a_{ij} \bar{x}_j$ , wo  $a_{ij} a_{ik} = 1$  für  $j = k$ , 0 für  $j \neq k$  ist, oder die quadratische Form  $x_i x_i$  invariant bleibt<sup>3)</sup>) nach dem Gesetz

$$\bar{A}_{i_1 i_2 \dots i_m} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_m j_m} \bar{A}_{j_1 j_2 \dots j_m} \quad (7)$$

beziehungsweise

$$\bar{A}_{j_1 j_2 \dots j_m} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_m j_m} A_{i_1 i_2 \dots i_m} \quad (8)$$

transformieren. Die Variablen  $x_i, \bar{x}_j$  können nicht nur die Masszahlen von Längen bezüglich der gleichen Einheit vertreten, wie es in der analytischen Geometrie üblich ist, sondern, da die  $a_{ij}$  Zahlen (Richtungskosinus) sind, auch diese Längen selbst. Die rechte Seite von (7) bzw. (8) ist eine homogene, lineare Form in den Grössen gleicher Art  $\bar{A}_{j_1 \dots j_m}$  bzw.  $A_{i_1 \dots i_m}$  mit Zahlenkoeffizienten, so dass links eine Grösse derselben Art steht und diese Beziehungen als Grössengleichungen aufgefasst werden können. Die Operationen der Tensoralgebra (Addition, Multiplikation, Verjüngung) sind mit Grössen als Tensorkoordinaten durchführbar, da dabei nur Additionen gleichartiger Grössen und Multiplikationen vorkommen, und zwar immer symmetrisch und homogen in allen Koordinaten. Das bekannte «äussere Produkt» zweier Vektoren (Tensoren erster Stufe), das sich hier nicht einzufügen scheint, ist eben gar kein Vektor<sup>4)</sup>. Nach Wahl einer beliebigen Grösse  $E_A$  derselben Art kann jede solche Tensorgrösse  $m$ -ter Stufe  $A_{i_1 i_2 \dots i_m}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) auf Grund der Sätze a), b), c) als Produkt der Einheit

<sup>1)</sup> Vergleiche J. WALLOT, *Dimensionen, Einheiten, Maßsysteme*, in: GEIGER und SCHEELE, *Handbuch der Physik*, Bd. 2 (Springer, Berlin 1926), S. 2 ff.

<sup>2)</sup> Vergleiche A. DUSCHKE und A. HOCHRÄINER, *Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung*, I. Teil: *Tensoralgebra* (Springer, Wien 1946), S. 60.

<sup>3)</sup> In einem Produkt ist über gleiche Indizes von 1 bis 3 zu summieren.

<sup>4)</sup> Vergleiche F. KLEIN, *Elementare Mathematik vom höheren Standpunkt*, Teil II: *Geometrie* (Teubner, Leipzig 1913), S. 106 ff. Auch H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie* (Springer, Berlin 1921), S. 30 ff.

$E_A$  der Grösse dieser Art und eines (dimensionslosen) Tensors  $m$ -ter Stufe  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_m}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), dessen Koordinaten die Masszahlen der Koordinaten von  $A_{i_1 i_2 \dots i_m}$  bezüglich  $E_A$  sind, dargestellt werden. Letzterer kann dann noch als Produkt einer Zahl  $\alpha$  und eines Einstensors, das heisst eines dimensionslosen Tensors  $m$ -ter Stufe, dessen Betrag eins ist, angegeben werden ( $A_{i_1 i_2 \dots i_m} = \alpha E_A \cdot 1_{i_1 i_2 \dots i_m}$ ; zum Beispiel Richtungskosinus  $\cos \alpha_i = e_i$  eines Vektors). Dann kann mit diesen Symbolen, falls die angegebenen Einschränkungen beachtet werden, nach den Regeln der gewöhnlichen Arithmetik und des Tensorkalküls gerechnet werden. Auch hier zeigt sich die Unzweckmässigkeit des üblichen symbolisch-anschaulichen Vektorkalküls, der diese «Permanenz» nicht zulässt (sogenannte innere und äussere «Produkte»). Verwendet man affine Koordinatensysteme (Achsen verschieden geeicht und schiefwinklig), so tritt an Stelle der invarianten Form  $x_i x_i$  die metrische Grundform  $g_{ik} x_i x_k$ , das heisst als (dimensionsloser) metrischer Fundamentaltensor  $g_{ik}$ , statt des Einheits-tensors  $\delta_{ij} = 1$  ( $i = j$ ) bzw.  $0$  ( $i \neq j$ ) zweiter Stufe, der übrigens nur beim Übergang von kontra- zu kovarianten Koordinaten vorkommt.

Überblicken wir nochmals den Gedankengang, so erscheint die Grössengleichung als das Ursprüngliche. Der Psychologe, Genetiker und Erkenntnistheoretiker wird vielleicht geneigt sein, zu sagen, wir rechnen mit Zahlen wie mit Grössen – und nicht umgekehrt. Doch das geht über die in der Mathematik übliche Analyse der Relationensysteme auf Grund einer *a priori* gegebenen Logik hinaus.

K. OTT, Zürich.

## Kleine Mitteilungen

### Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser

Die Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus einem Paar konjugierter Durchmesser mit Hilfe der perspektiven Affinität stützt sich bekanntlich auf die Aufsuchung eines zugeordneten Paares rechter Winkel, deren Scheitel der Mittelpunkt der Ellipse und der Mittelpunkt eines passenden affinen Kreises sind. Dabei wird die Affinitätsachse so gewählt, dass diese Scheitel nicht zusammenfallen (siehe FLÜKIGER oder E. MÜLLER, Band 1). Es gibt indes eine interessante Möglichkeit, die Aufgabe zu lösen, wenn die erwähnten Mittelpunkte zusammenfallen, insbesondere wenn als Affinitätsachse die Gerade eines der gegebenen konjugierten Durchmesser gewählt wird; eine Möglichkeit, die nebst einer neuen Konstruktion einen neuen Zugang zur Rytzschen Konstruktion erschliesst.

Wir lösen vorerst, *absichtlich elementar*, die Hilfsaufgabe:

Bei gegebener Affinitätsrichtung, gegebener Affinitätsachse und gegebenem Affinitätsverhältnis soll das perspektiv-affine Rechtwinkelpaar konstruiert werden, dessen gemeinsamer Scheitel  $S$  auf der Affinitätsachse gegeben ist.

Seien  $\sphericalangle(a_1, b_1)$  und  $\sphericalangle(a_2, b_2)$ , wobei  $a_1 \perp b_1$  und  $a_2 \perp b_2$ , die gesuchten rechten Winkel und  $g$  irgendeine Gerade in der Affinitätsrichtung, welche ihre Schenkel schneidet. Dann müssen die Schnittpunkte  $A_1, A_2$  bzw.  $B_1, B_2$  (Figur 1) von  $g$  mit  $a_1$  und  $a_2$  bzw. mit  $b_1$  und  $b_2$  zugeordnete Punkte sein. Zieht man beispielsweise durch  $A_1$  die Gerade  $\bar{a}_2$  parallel zu  $a_2$  und ist  $T$  ihr Schnittpunkt mit der Affinitätsachse  $s$ , so gilt  $AA_2/AA_1 = AS/AT$ , wenn  $A$  der Schnittpunkt von  $g$  mit  $s$  ist. Nun ist aber auch