Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 7 (1952)
Heft: 3

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

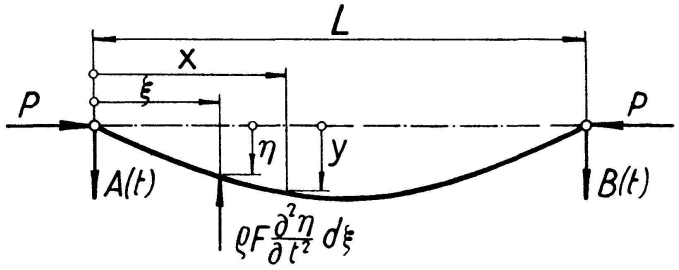
Darin bedeuten $\nu = \frac{P}{P_e}$ und $\omega_e = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{JE}{\varrho F}}$

die kleinste Eigenkreisfrequenz des unbelasteten Stabes.

1. Fall: Wenn $P < P_e$ ist, erhält man als Lösung:

$$y = (c_1 \sin\omega t + c_2 \cos\omega t) \sin\frac{\pi x}{L}.$$

$\omega = \omega_e \sqrt{1-\nu}$ ist die Eigenkreisfrequenz des belasteten Stabes. Da die harmonischen Stabschwingungen infolge der unvermeidlichen Energiedissipation abklingen, bleibt schliesslich $y = 0$, die stabile Gleichgewichtslage des Stabes.



2. Fall: Wenn $P = P_e$ ist, erhält man als Lösung:

$$y = (c_1 t + c_2) \sin\frac{\pi x}{L}.$$

Je nach Anfangsbedingungen bleibt der Stab entweder in jeder ausgelenkten Lage im indifferenten Gleichgewicht, oder, wenn eine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden ist, knickt er mit *konstanter Geschwindigkeit* aus. Die Analogie mit einer Kugel auf einer Ebene ist vollkommen.

3. Fall: Wenn $P > P_e$ ist, erhält man als Lösung:

$$y = (c_1 \sinh\alpha t + c_2 \cosh\alpha t) \sin\frac{\pi x}{L}$$

mit $\alpha = \omega_e \sqrt{\nu - 1}$. Nach einer Störung wird der Stab seine Auslenkung *beschleunigt* vergrössern.

In allen drei Fällen lassen sich die Konstanten aus den Anfangsbedingungen (Störungsursache) berechnen. Wenn auch nur auf kleine Auslenkungen beschränkt, liegt dann der zeitliche Verlauf des Knickvorganges eindeutig fest.

GEORGES V. TORDION, Zürich.

Aufgaben

Aufgabe 118. Man zeige, dass es für die kubische Parabel $y = a x^3 - b x$, $a > 0$, $b > 2\sqrt{2}$, zwei umschriebene und zwei einbeschriebene Quadrate gibt und dass die Flächenverhältnisse der beiden Quadratpaare gleich gross sind.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Lösung: a) Wegen der Zentralsymmetrie der Kurve ist der Ursprung O Mittelpunkt der Quadrate. Der Kreis um O mit Radius r hat mit der kubischen Parabel drei Paare

von Schnittpunkten $P_i(x_i | y_i)$, $Q_i(-x_i | -y_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, die sich aus der Gleichung

$$a^2 z^3 - 2\,a\,b\,z^2 + (b^2 + 1)\,z - r^2 = 0, \qquad z = x^2$$

ergeben. Irgend zwei Wurzeln, etwa z_1 und z_2, geben ein eingeschriebenes Rechteck $P_1 P_2 Q_1 Q_2$. Nach dem Satz von VIETA gilt

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{2\,b}{a} \qquad \text{und} \qquad z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = \frac{b^2 + 1}{a^2}$$

oder nach Elimination von z_3

$$a^2 z_1 z_2 + 2\,a\,b\,(z_1 + z_2) - a^2 (z_1 + z_2)^2 = b^2 + 1. \tag{1}$$

Das Rechteck wird zum Quadrat, wenn seine Diagonalen aufeinander senkrecht stehen. Die Bedingung dafür ist

$$\frac{y_1\,y_2}{x_1\,x_2} = (a\,z_1 - b)\,(a\,z_2 - b) = -1$$

oder

$$a^2 z_1 z_2 - a\,b\,(z_1 + z_2) = -(b^2 + 1). \tag{2}$$

Im Fall des Quadrates gilt ferner $x_2^2 = y_1^2$, so dass $z_1 + z_2 = x_1^2 + y_1^2 = r^2$. Eliminiert man $z_1 z_2$ aus (1) und (2), so erhält man die Gleichung

$$a^2 r^4 - 3\,a\,b\,r^2 + 2\,(b^2 + 1) = 0$$

mit den Lösungen

$$r_{1,2}^2 = \frac{1}{2\,a}\,(3\,b \pm \sqrt{b^2 - 8}).$$

Für das gesuchte Flächenverhältnis ergibt sich somit

$$F_1 : F_2 = r_1^2 : r_2^2 = (3\,b + \sqrt{b^2 - 8}) : (3\,b - \sqrt{b^2 - 8}).$$

b) Wir suchen zuerst die drei Paare von gemeinsamen Tangenten des Kreises $x^2 + y^2 = R^2$ mit der kubischen Parabel. Für die Schnittpunkte der beliebigen, den Kreis in $P(x_0 | y_0)$ berührenden Kreistangente $x\,x_0 + y\,y_0 = R^2$ mit der Parabel findet man die kubische Gleichung

$$a\,y_0\,x^3 + (x_0 - b\,y_0)\,x - R^2 = 0.$$

Die kubische Gleichung $x^3 + p\,x + q = 0$ hat eine Doppelwurzel, wenn $4\,p^3 + 27\,q^2 = 0$. In unserem Falle muss also gelten

$$4\,(x_0 - b\,y_0)^3 + 27\,a\,y_0\,R^4 = 0. \tag{3}$$

Ferner ist

$$x_0^2 + y_0^2 = R^2 \tag{4}$$

Zur Vereinfachung dieses Gleichungssystems, das bei gegebenem R drei Paare paralleler Tangenten, also drei umschriebene Rhomben, liefern würde, benützen wir die orthogonale Transformation

$$x_0 - b\,y_0 = u\sqrt{b^2 + 1}, \qquad b\,x_0 + y_0 = -v\sqrt{b^2 + 1}.$$

Setzen wir noch $4\,(b^2 + 1)^2/27\,a = c$, so geht (3) bzw. (4) über in

$$v = \frac{c\,u^3}{R^4} - b\,u, \tag{5}$$

$$u^2 + v^2 = R^2. \tag{6}$$

Zusammen mit der Bedingung $v_1\,v_2/u_1\,u_2 = -1$ für Normalstellung zweier Rhomben-

seiten bzw. der zugehörigen Berührungsradien ergeben (5) und (6) wieder den unter a behandelten Fall, das heisst den der ursprünglichen Parabel umschriebenen Quadraten entsprechen die der Parabel (5) einbeschriebenen Quadrate. Für den Radius erhält man also

$$R^2 = \frac{R^4}{2c}(3b \pm \sqrt{b^2-8}) \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{R_{1,2}^2} = \frac{1}{2c}(3b \pm \sqrt{b^2-8}).$$

Für das Flächenverhältnis $F_1^* : F_2^* = R_1^2 : R_2^2$ erhält man also bei passender Numerierung denselben Wert wie vorhin. F. STEIGER, Bern.

Herr R. LAUFFER (Graz) weist darauf hin, dass die umschriebenen Quadrate aus den einbeschriebenen durch eine Ähnlichkeitstransformation und nachfolgende Polarisierung am Einheitskreis hervorgehen.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg).

Aufgabe 119. Bezeichnet s den halben Umfang eines Dreiecks, S die Summe der Tangenten der halben Dreieckswinkel und P das Produkt dieser Tangenten, so lässt sich folgende Gleichung vierten Grades aufstellen:

$$x^4 - s(P+S)x^3 + s^2(1+PS)x^2 - 2s^3Px + s^4P^2 = 0.$$

Was ist die geometrische Bedeutung der vier Lösungen dieser Gleichung?
R. LAEMMEL, Zürich.

Lösung: Aus dem Halbwinkelsatz ergibt sich sofort die Relation

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho^2(s-c)+\varrho^2(s-b)+\varrho^2(s-a)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{\varrho^2 s^2}{F^2} = 1.$$

Für den Inkreis bzw. die Ankreise gilt

$$\varrho = sP, \qquad \varrho_a = s\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \qquad \varrho_b = s\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \qquad \varrho_c = s\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &x^4 - s(P+S)x^3 + s^2(1+PS)x^2 - 2s^3Px + s^4P^2 \\ &= (x - sP)(x^3 - sSx^2 + s^2x - s^3P) \\ &= (x-\varrho)(x-\varrho_a)(x-\varrho_b)(x-\varrho_c) = 0. \end{aligned}$$

Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), H. FÄHNDRICH (Bern), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), A. MOÓR (Debrecen), F. THOMISSEN (Heerlen, Holland), G. TROMP (Sittard, Holland), A. UNTERBERGER (Bludenz).

Aufgabe 120. Bezeichne $\mathfrak{G}$ eine endliche p-Gruppe mit den erzeugenden Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_k$, so dass $a_2, \ldots, a_k$ $\mathfrak{G}$ nicht erzeugen. Dann wird $\mathfrak{G}$ auch von $a_1^p, a_2, \ldots, a_k$ nicht erzeugt. L. RÉDEI, Szeged (Ungarn).

Lösung: a_1^p gehört der Φ-Untergruppe von $\mathfrak{G}$ an, welche als Durchschnitt aller maximalen Untergruppen (oder der Untergruppen vom Index p) erklärt ist (vgl. H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, S. 44). Φ besteht anderseits aus genau den Elementen, die aus jedem Erzeugendensystem gestrichen werden dürfen. Würden also die Elemente $a_1^p, a_2, \ldots, a_k$ die ganze Gruppe $\mathfrak{G}$ erzeugen, so müssten schon $a_2, \ldots, a_k$ dasselbe leisten im Widerspruch zur Voraussetzung. A. BAGER, Hjørring (Dänemark).

Aufgabe 121. Sind m und n teilerfremde natürliche Zahlen >1, dann liegt in jedem Intervall $(1, 2)$, $(2, 3)$, ..., $(m+n-2, m+n-1)$ genau je eine der Zahlen $j(m+n)/n$, $k(m+n)/m$ $(j=1, 2, \ldots, n-1;\ k=1, 2, \ldots, m-1)$. R. LAUFFER, Graz.

Lösung: Die $m+n-2$ betrachteten Zahlen müssen sich auf die $m+n-2$ Intervalle verteilen, da alle Zahlen zwischen 1 und $m+n-1$ liegen. Man muss deshalb nur zeigen, dass in keinem Intervall $(N, N+1)$ zwei der Zahlen liegen. In diesem Fall wären die Ungleichungen

$$N < \frac{x(m+n)}{n} < N+1, \qquad N < \frac{y(m+n)}{m} < N+1$$

gleichzeitig in *ganzen* Zahlen x, y lösbar. Aus

$$x = \frac{n(N+\vartheta)}{m+n}, \qquad y = \frac{m(N+\vartheta')}{m+n}, \qquad (0<\vartheta<1,\ 0<\vartheta'<1)$$

würde aber folgen, dass die ganze Zahl

$$x+y = N + \frac{\vartheta n + \vartheta' m}{m+n} < N+1$$

zwischen N und $N+1$ liegt, was für ganzes N unmöglich ist.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), F. GOLDNER (London), B. MARZETTA (Basel), F. THOMISSEN (Heerlen), G. TROMP (Sittard).

Aufgabe 122. Man beweise, dass die Zahl $5^{2n+1}\,2^{n+2} + 3^{n+2}\,2^{2n+1}$ für $n \geqq 0$ stets durch 19 teilbar ist. I. BEREND.

Lösung: Wegen $5^2 \equiv 6 \pmod{19}$ hat man

$$5^{2n+1}\,2^{n+2} + 3^{n+2}\,2^{2n+1} = 2^{n+1}(10\cdot 5^{2n} + 2^n\cdot 3^{n+2}) \equiv 2^{n+1}\cdot 6^n(10+9) \equiv 0 \pmod{19}.$$

Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), J. BINZ (Paris), F. GOLDNER (London), L. KIEFFER (Luxemburg), R. LAUFFER (Graz), B. MARZETTA (Basel), T. THOMISSEN (Heerlen), G. TROMP (Sittard), W. SCHWAB (Kerzers), W. ZULLIGER (Küsnacht).

Aufgabe 123. Im Innern eines Kreises ist ein fester Punkt P gegeben. Durch P sollen zwei aufeinander senkrecht stehende Sehnen so gelegt werden, dass die Summe ihrer Längen möglichst gross ist. P. TURÁN.

Lösung: Sind AB und CD die zwei sich in P senkrecht schneidenden Kreissehnen, O der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises, M und N die Fusspunkte der Lote von O auf AB bzw. CD, so gilt

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4(\overline{AM}^2 + \overline{DN}^2) = 4(2r^2 - \overline{OM}^2 - \overline{ON}^2) = 8r^2 - 4\overline{OP}^2.$$

$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$ hat also für alle aufeinander senkrecht stehenden Sehnen durch P einen konstanten Wert K. Wegen $(\overline{AB} + \overline{CD})^2 = 2K - (\overline{AB} - \overline{CD})^2$ hat $\overline{AB} + \overline{CD}$ seinen maximalen Wert für $\overline{AB} = \overline{CD}$, das heisst jede der Sehnen bildet mit OP den Winkel 45°.

F. GOLDNER, London.

Der minimale Wert von $\overline{AB} + \overline{CD}$ wird angenommen, wenn der Unterschied der Sehnen möglichst gross ist, also wenn die eine Sehne Durchmesser ist (Grenzminimum).

Weitere Lösungen (meist mit Differentialrechnung) sandten A. BAGER (Hjørring), J. BINZ (Paris), H. HOFSTETTER (Oberwangen), L. KIEFFER (Luxemburg), R. KLÖTZLER (Leipzig), R. LAUFFER (Graz), E. PLÜSS (Murgenthal), T. REICH (Glarus), A. SCHWARZ (Seuzach), R. SPRANCK (Luxemburg), F. THOMISSEN (Heerlen), G. TROMP (Sittard), A. UNTERBERGER (Bludenz).

Neue Aufgaben

155. Man beweise: Sind von einer Parabel zwei Tangenten t_1 und t_2 mit dem Schnittpunkt T und mit den Berührungspunkten P_1 und P_2 gegeben, so ist der Brennpunkt der Schnittpunkt des Kreises durch P_1, der t_2 in T berührt, mit dem Kreis durch P_2, der t_1 in T berührt. F. HOHENBERG, Graz.

156. Eine Gummischnur wird um ein Ende mit der Winkelgeschwindigkeit w gedreht und durch die Fliehkräfte gedehnt. Wie gross ist die Länge L der gedehnten Schnur, wenn die ungedehnte Schnur die Länge L_0 hat, die Masse pro Längeneinheit in ungedehntem Zustand m_0 ist und die Dehnung (Verlängerung pro Längeneinheit) infolge der Zugkraft P gleich $e\,P$ ist (Hookesches Gesetz bei Vernachlässigung der Querdehnung)? R. LAUFFER, Graz.

157. Zeige, dass für willkürliche positive ganze Zahlen m und n gilt

$$\prod_k \left\{1 - \left[\frac{(2\,n+1)\,m}{k}\right]^2\right\} = 1,$$

wo k alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Vielfachen von $2\,n+1$ durchläuft.
B. VAN DER POL, Genf.

158. Beweise für ein ganzes $m \geqq 0$

$$\frac{1^{4m+1}}{e^{\pi}+1} + \frac{3^{4m+1}}{e^{3\pi}+1} + \frac{5^{4m+1}}{e^{5\pi}+1} + \cdots = \frac{2^{4m+1}-1}{4\,(2\,m+1)}\,B_{2m+1},$$

wo $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42$, ... die Bernoullischen Zahlen sind.
E. TROST, Zürich.

Literaturüberschau

S. C. VAN VEEN: *Passermeetkunde*

184 Seiten, Verlag J. Noorduijn en Zoon, Gorinchem 1951

Die Probleme der Zirkelgeometrie sind immer von neuem anziehend und lehrreich. Das vorliegende Büchlein gibt in den ersten Kapiteln einen leicht lesbaren und kurzgefassten Überblick über die Konstruktionen in der Ebene, wobei sich der Verfasser meist an die Mascheronischen Lösungen hält und auch eine ganze Reihe von Näherungskonstruktionen anführt, wie zum Beispiel die einfache und überraschend genaue Bestimmung der Länge des Viertelskreisbogens von MASCHERONI. Die klaren und ruhig wirkenden Figuren seien besonders erwähnt, da sie in diesem Gebiete der Geometrie durchaus keine Selbstverständlichkeit sind. Ein weiteres Kapitel befasst sich mit Konstruktionen auf der Oberfläche der Kugel, wo die Zirkelgeometrie besonders wichtig wird, da der Gebrauch des Lineals überhaupt ausgeschlossen ist. Hier erhebt sich aber eine bemerkenswerte Schwierigkeit. Es ist sehr wahrscheinlich unmöglich, auf einer gegebenen Kugel von unbekanntem Radius mit dem Zirkel allein und ohne Zuhilfenahme einer Ebene einen Grosskreis zu konstruieren; ein Beweis dieser Unmöglichkeit ist aber meines Wissens bisher nicht bekannt und wird auch in der vorliegenden Schrift nicht gegeben. Hingegen finden sich in einem Anhang die Unmöglichkeitsbeweise für die Lösung bekannter klassischer Probleme sowie die Theorie des regulären Siebzehnecks. Eine Biographie MASCHERONIS bildet den Schluss. Das Büchlein könnte auch einem reiferen Mittelschüler viele Anregung bieten, sofern er willens wäre, sich etwas in die holländische Sprache hineinzulesen. *W. Lüssy.*