

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 7 (1952)  
**Heft:** 3  
  
**Rubrik:** Kleine Mitteilungen

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Die Tabelle und die Figur 5 zeigen die gute Übereinstimmung der beiden Verteilungen.

Führen wir diese Summenoperationen nicht nur dreimal, sondern  $n$ -mal durch, dann wird nach dem Grenzwertsatz mit wachsendem  $n$  die Übereinstimmung zwischen der Wahrscheinlichkeitsverteilung, auf die die Summenoperation führt, und der

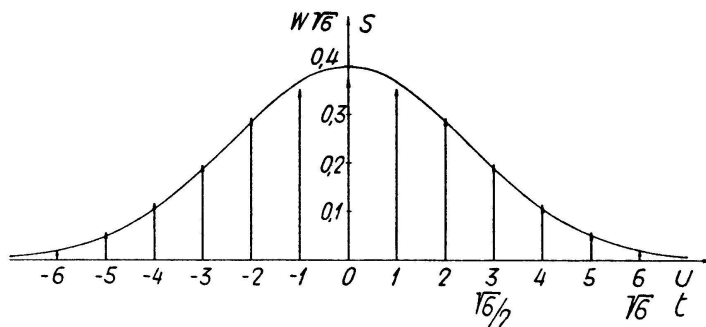


Fig. 5

Normalverteilung immer besser. Geht man von einem Kollektiv mit Gleichverteilung aus, so zeigt unser Beispiel, dass die Konvergenz sehr gut ist. Bei zehnmaliger Wiederholung ergibt sich für  $u = 0$ :  $w\sqrt{20} = 0,392$ . Die Abweichung von  $s = 0,399$  liegt unter 2%. Natürlich lässt der Grenzwertsatz sehr viel allgemeinere Ausgangskollektive zu, und erst darin liegt ja dann seine grosse Bedeutung. P. BUCHNER, Basel.

## Kleine Mitteilungen

### *Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*

Im Anschluss an eine Bemerkung zum Beweis des Satzes von CHOQUET und KREWERAS, dass eine unendliche Punktmenge des  $p$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $R^p$  mit nur ganzzahligen Entfernungen von Punkt zu Punkt notwendigerweise linear sein muss, stellt E. TROST<sup>1)</sup> die Frage nach der Bestimmung der maximalen Anzahl  $N_p$  von Punkten des  $R^p$ , die nicht alle auf einer Geraden liegen und deren gegenseitige Entfernungen ausschliesslich ganzzahlig sind. Eine solche Maximalzahl  $N_p$  existiert nun nicht, für kein  $p$ , denn es gilt der Satz:

*Zu jedem  $n$  lassen sich im  $R^2$   $n$  Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$  so bestimmen, dass alle Entfernungen  $\overline{P_i P_k}$  ganzzahlig sind und dass je drei dieser Punkte nicht auf einer Geraden liegen.*

Es lassen sich also wohl beliebig viele, niemals aber unendlich viele Punkte mit der gewünschten Eigenschaft finden; und in der Tat bedeutet ja «endlich» nicht notwendigerweise auch «beschränkt».

Der leitende Gedanke des Beweises ist folgender. Zunächst darf man als Masszahlen der Entfernungen  $\overline{P_i P_k}$  beliebige rationale Zahlen zulassen. Da die Anzahl der Punkte in jedem Falle endlich ist, lassen sich die Distanzen durch eine anschliessende Streckung stets ganzzahlig machen. Weiter möchten wir zeigen, dass man zu gewissen Punkt-komplexen mit rationalen Entfernungen durch geeignete Spiegelungen, unbeschränkt weitere Punkte so hinzunehmen kann, dass auch die in diesen Erweiterungen neu auftretenden Entfernungen rational werden. Dies führt uns auf die zusätzliche Forderung

<sup>1)</sup> E. TROST, *Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung*, *El. Math.* 6, Nr. 3, 59 (1951).

nach Beschränkung auf solche Komplexe, für die nicht nur die Entfernungen  $\overline{P_i P_k}$ , sondern auch die trigonometrischen Funktionswerte aller Winkel  $\widehat{P_i P_k P_l}$  ( $i \neq k \neq l$ ) rational sind.

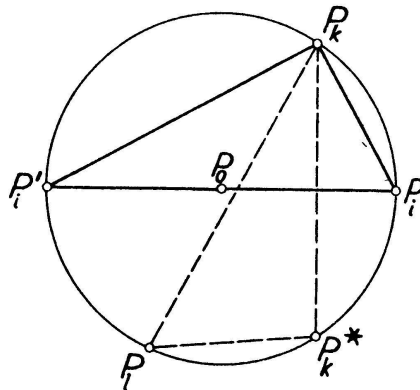
I. Ein Winkel  $\alpha$  möge *rational* heissen, wenn  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  rational sind, das heisst wenn  $\alpha$  auf dem Einheitskreis einen Punkt mit rationalen Koordinaten bestimmt. Die rationalen spitzen Winkel sind genau diejenigen, die in den pythagoreischen Dreiecken auftreten. Nimmt man den Winkel 0 hinzu und addiert ganzzahlige Vielfache von  $\pi/2$ , so erhält man alle rationalen Winkel.

Der Bereich der rationalen Winkel ist bezüglich der Addition und Subtraktion abgeschlossen,

$$\text{mit } \alpha \text{ und } \beta \text{ sind auch } \alpha + \beta \text{ und } \alpha - \beta \text{ rational,} \quad (1)$$

wie man unmittelbar aus den Additions- und Subtraktionstheoremen erschliesst.

Nach einem Satz von H. HADWIGER<sup>1)</sup> ist das Verhältnis eines rationalen Winkels, der kein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi/2$  ist, zum vollen Winkel  $2\pi$  irrational: Ein



rationaler Winkel ist, abgesehen von den ganzzahligen Vielfachen von  $\pi/2$ , nicht rational im üblichen Sinn. Wir werden später von dieser Bemerkung Gebrauch machen. Hier ergibt sie, da nach (1) mit  $\alpha$  auch jedes ganzzahlige Vielfache von  $\alpha$  rational ist, dass die in unserem Sinne rationalen Winkel auf dem Einheitskreis eine (abzählbare) dichte Punktmenge bestimmen.

II. Ein Komplex von Punkten  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  des  $R^2$  heisse *rational*, wenn a) alle Entfernungen  $\overline{P_i P_k}$  und b) alle Winkel  $\widehat{P_i P_k P_l}$  ( $i \neq k \neq l$ ) rational sind.

Ein Dreieck  $\{A, B, C\}$  ist dann und nur dann rational, wenn seine drei Seiten und sein Inhalt rational sind<sup>2)</sup>. Der Beweis ergibt sich leicht aus den Formeln

$$F = \frac{a b \sin \gamma}{2},$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma = 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \quad (\alpha + \beta + \gamma = \pi)$$

und deren zyklischen Vertauschungen. Von Bedeutung für uns ist der Satz

$$\text{Ein Dreieck ist rational, wenn eine Seite und zwei Winkel rational sind.} \quad (2)$$

Denn nach (1) ist auch der dritte Winkel und nach dem Sinussatz sind auch die beiden andern Seiten rational.

III. Wir beschränken uns jetzt auf *rationale Komplexe*  $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ , deren Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$  alle auf einem Kreis um  $P_0$  liegen. (Beispielsweise Komplexe, die aus

<sup>1)</sup> H. HADWIGER, *Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie*, *El. Math.* 1, Nr. 6, 98 (1946).

<sup>2)</sup> In Analogie zu den pythagoreischen Dreiecken könnte man diese Dreiecke im Hinblick auf die Heronsche Flächenformel als «Heronsch» bezeichnen.

den Eckpunkten  $P_1, P_2, P_3$  eines pythagoreischen Dreiecks und dessen Hypotenusenmittelpunkt  $P_0$  gebildet werden.) Sind dann  $P_i, P_k, P_l$  irgendwelche der Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , ist  $P'_i$  der zu  $P_i$  bezüglich  $P_0$ ,  $P_k^*$  der zu  $P_k$  bezüglich  $\overline{P_i P_0 P'_i}$  symmetrische Punkt, so ist mit  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$

- a) auch  $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, P'_i\}$  und  
 b) auch  $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, P'_i, P_k^*\}$  rational.

Beweis: a) Im Dreieck  $P_i P_k P'_i$  sind  $\overline{P_i P_k}$ , die Winkel  $\widehat{P_i P_k P'_i} = \pi/2$  und  $\widehat{P_0 P_i P_k}$  rational. Die Behauptung folgt aus (2) und für die neu auftretenden Winkel durch wiederholte Anwendung von (1).

b) Im Dreieck  $P_k P_l P_k^*$  sind nach Voraussetzung  $\overline{P_k P_l}$ ,  $\widehat{P_k P_k^* P_l} = \widehat{P_k P_i P_l}$ , nach a)  $\widehat{P_k P_l P_k^*} = 2 \widehat{P_k P'_i P_i}$  rational. Die Behauptung folgt wiederum aus (2) und (1).

Nun sind die bei  $P_0$  auftretenden Winkel  $\widehat{P_i P_0 P_k}$  sicher verschieden von  $\pi/2$  und, mit Ausnahme von  $\pi$ , nach einer früheren Bemerkung daher irrational im üblichen Sinn. Die Erweiterungsoperationen a) und b) liefern daher unbeschränkt neue Punkte.

Begnügt man sich bei gegebener Längeneinheit mit rationalen Abständen  $\overline{P_i P_k}$ , so kann man den Kreisradius festhalten. Will man aber ganzzahlige Entfernungen, so muss die Figur gestreckt werden, und der Kreisradius wird mit zunehmendem  $n$  unbegrenzt wachsen.

M. ALTWEGG, Zürich.

Anmerkung der Redaktion: Weitere Beispiele sandten uns R. LAUFFER (Graz) und A. UNTERBERGER (Bludenz).

### Généralisation d'un théorème de géométrie plane

On sait qu'il existe un triangle dont les côtés sont respectivement égaux et parallèles aux médianes d'un triangle donné. Cette proposition est un cas particulier du théorème suivant:

Soient  $A_1 A_2 \dots A_n$  ( $n \geq 3$ ) un polygone convexe et  $M_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) les  $n$  points définis par  $\overrightarrow{A_i M_i} = \lambda \overrightarrow{M_i A_{i+1}}$  ( $\lambda > 0$ ;  $A_{n+1} \equiv A_1$ ).

Il existe au moins un polygone convexe  $P_1 P_2 \dots P_n$  tel que ses côtés soient respectivement égaux et parallèles à  $\overrightarrow{A_i M_{i+k}}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $k$ , entier fixe, non négatif et inférieur à  $n$ ;  $M_{n+p} \equiv M_p$ ).

En effet,

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\vec{s}_{i+k} + \lambda \vec{s}_{i+k+1}}{1 + \lambda} - \vec{s}_i \right) = 0, \quad (\vec{s}_i = \overrightarrow{OA_i}; \vec{s}_{n+p} \equiv \vec{s}_p)$$

et il résulte des hypothèses que l'un au moins des polygones (s'il y en a plusieurs) que l'on peut construire est convexe: celui dans lequel  $\overrightarrow{P_j P_{j+1}} = \overrightarrow{A_j M_{j+k}}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

PAUL BURGAT, Neuchâtel.

### Nochmals zur Elementargeometrie der Ellipse

Angeregt durch den Aufsatz von C. BINDSCHIEDLER, *Zur Elementargeometrie der Ellipse* [El. Math. 3, Nr. 6, 105 (1948)], habe ich geprüft, wie man den umgekehrten Weg einschlagen, insbesondere wie man «von Satz B zu Satz A» gelangen könnte. Hier folgt nun ein Beweis der monofokalen Eigenschaft der Punkte der Ellipse, ausgehend von deren bifokaler Definition, wobei strikte angestrebt wurde, nur ganz elementargeometrische Begriffe und Sätze zu benutzen, etwa entsprechend den Kenntnissen eines 15–16jährigen Mittelschülers. Aus einer umfangreichen französischen und deutschen Literatur sind mir nämlich nur solche Beweise bekannt, welche die Mittel der analytischen Geometrie verwenden oder zum mindesten mit Hilfe von Polaren, Potenzlinie,

Haupt- und Leitkreisen zum Ziel kommen<sup>1)</sup>; ferner gibt es noch stereometrische Beweise dieses Überganges von der bifokalen zur monofokalen Definition (mit Hilfe der Dandelinschen Kugeln), wobei aber meistens noch Trigonometrie verwendet wird<sup>2)</sup>.

In der Figur 1 ist  $P$  ein Punkt der Ellipse ( $2a, 2c$ ), mit den Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$  ( $\overline{F_1F_2} = 2c$ ) und  $\overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a (= r_1 + r_2)$ . Die  $x$ - und die  $y$ -Achse sollen, wie üblich,

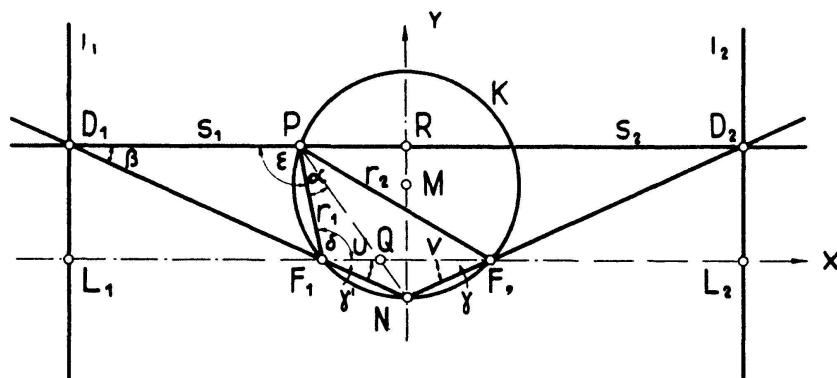


Fig. 1

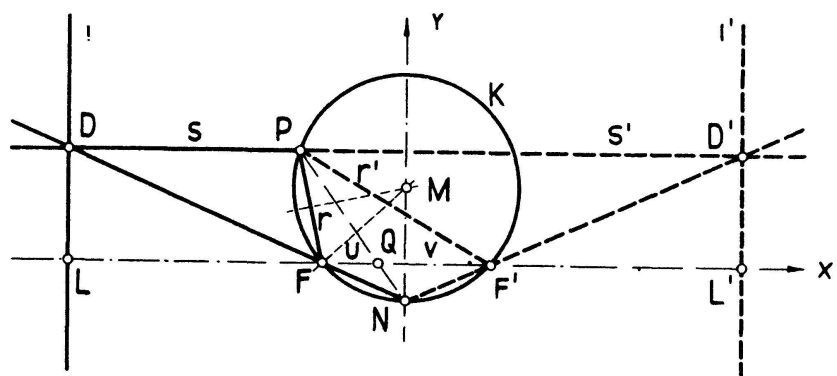


Fig. 2

Symmetrieachsen der Kurve sein.  $K$  sei ferner der Umkreis des Dreiecks  $F_1PF_2$ ,  $N$  derjenige Schnittpunkt von  $K$  mit der  $y$ -Achse, welcher nicht auf der gleichen Seite der  $x$ -Achse liegt wie  $P$ . Schliesslich seien  $D_1$  bzw.  $D_2$  die Schnittpunkte der Geraden  $NF_1$  bzw.  $NF_2$  mit der Parallelen zur  $x$ -Achse durch  $P$ .  $PN$  ist offenbar die Winkelhalbierende des Winkels  $F_1PF_2$ . Es seien die von ihr auf  $\overline{F_1F_2}$  bestimmten Abschnitte bezeichnet mit:  $\overline{F_1Q} = u$  und  $\overline{QF_2} = v$ . Nach einem bekannten Satz haben wir dann:

$$u : v = r_1 : r_2. \quad (1)$$

Ferner erhalten wir auf den Parallelen  $F_1F_2$  und  $D_1D_2$ , mit  $\overline{D_1P} = s_1$  und  $\overline{PD_2} = s_2$ :

$$u : v = s_1 : s_2. \quad (2)$$

Schliesslich haben wir  $\alpha = \beta$  (weil  $\alpha = \gamma$ ,  $\beta = \gamma'$  und  $\gamma = \gamma'$ ) und  $\delta = \epsilon$ . Somit sind die Dreiecke  $D_1PF_1$  und  $PF_1Q$  ähnlich. Daraus folgt:

$$r_1 : s_1 = u : r_1. \quad (3)$$

Mit Hilfe korrespondierender Additionen erhalten wir jetzt aus diesen drei Gleichungen der Reihe nach:

Aus (1):  $(u + v) : u = (r_1 + r_2) : r_1$ , das heisst:  $2c : u = 2a : r_1$ ,

<sup>1)</sup> Siehe zum Beispiel: ROUCHÉ und DE COMBEROUSSE, *Traité de géométrie*, Bd. 2 (Gauthier-Villars, Paris 1935), S. 349, und HADAMARD, *Leçons de géométrie élémentaire*, Bd. 2 (Armand-Colin, Paris 1925), S. 200.

<sup>2)</sup> Siehe zum Beispiel E. BENZ, *Leitfaden der Stereometrie* (Orell Füssli, Zürich 1938), S. 143 ff.

$$\text{oder endlich:} \quad u : r_1 = c : a. \quad (4)$$

$$\text{Aus (3) und (4):} \quad r_1 : s_1 = c : a. \quad (5)$$

*Erstes Resultat:* Das Verhältnis der Abstände eines beliebigen Ellipsenpunktes  $P$  von einem Brennpunkt  $F_1$  und von dem zugehörigen Punkt  $D_1$  ist konstant. Jetzt genügt es also noch, zu zeigen, dass  $D_1$  eine Parallele zur  $y$ -Achse beschreibt, wenn  $P$  die Ellipse durchläuft, das heisst hier (aus Symmetriegründen), dass  $\overline{D_1 D_2}$  konstant bleibt. Aus (1) und (2) folgt aber:

$$r_1 : r_2 = s_1 : s_2$$

oder

$$(r_1 + r_2) : r_1 = (s_1 + s_2) : s_1,$$

das heisst:

$$2a : \overline{D_1 D_2} = r_1 : s_1 = c : a,$$

oder

$$\overline{D_1 D_2} = \frac{2a^2}{c} = \text{const},$$

was zu beweisen war. Daraus folgt auch

$$\overline{D_1 R} = \overline{R D_2} = \frac{a^2}{c}.$$

*Satz:* Zu jedem Brennpunkt der Ellipse  $(2a, 2c)$  gehört eine Leitlinie  $l_1$  bzw.  $l_2$ . Sie ist parallel zur kleinen Achse, im Abstand  $d = a^2/c$ . Das Verhältnis der Abstände jedes Ellipsenpunktes von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitlinie ist konstant und gleich  $c/a$ .

Ausgehend von dieser monofokalen Definition muss man zum vollständigen Beweis noch umgekehrt zeigen, dass jeder Punkt  $P$  mit der Eigenschaft  $r : s = \lambda$  auf der ursprünglichen Ellipse liegt, wenn

$$d = \overline{LF} = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{c}{a}$$

gewählt werden (Figur 2).  $LF$  sei nun die  $x$ -Achse und  $l$  die Senkrechte zu ihr im Abstand  $d$  von  $F$ ,  $P$  ein Punkt mit der Eigenschaft  $r : s = \lambda = \text{const}$ . Ferner sei  $k$  derjenige Kreis, welcher durch  $P$  und  $F$  geht und dessen Mittelpunkt  $M$  gleiche Abszisse hat wie sein zweiter Schnittpunkt  $N$  mit der Geraden  $DF$ . (Konstruktion von  $M$ : Mittellot zu  $\overline{PF}$  und  $\sphericalangle MFN = \sphericalangle MNF = \sphericalangle FDL$ , also eindeutig für jedes  $P$ .) Ferner sei  $F'$  der zweite Schnittpunkt von  $k$  mit der  $x$ -Achse,  $D'$  der Schnittpunkt von  $NF'$  mit  $DP$  und  $l'$  parallel  $l$ . Dann liegen offenbar  $l$  und  $l'$  symmetrisch bezüglich  $MN$ , und somit ist  $\overline{F'L'} = \overline{FL} = d$ . Schliesslich sind, wie in Figur 1, die Dreiecke  $DPF$  und  $PFQ$  ähnlich, es folgt also:

$$s : r = r : u \quad \text{oder} \quad u = \frac{r^2}{s}. \quad (1')$$

Ferner haben wir wie vorher:

$$s : s' = u : v = r : r'$$

oder

$$(s + s') : s = (u + v) : u = (r + r') : r. \quad (2')$$

Es ist aber:

$$(s + s') = \overline{LF} + (u + v) + \overline{F'L'} = 2d + (u + v). \quad (3')$$

Aus (1'), (2') und (3') folgt nun:

$$[2d + (u + v)] : (u + v) = s : u = s : \frac{r^2}{s} = s^2 : r^2 = 1 : \lambda^2$$

oder umgeformt:  $2d : (u + v) = (1 - \lambda^2) : \lambda^2,$

das heisst  $u + v = \frac{2d\lambda^2}{1 - \lambda^2} = \text{const.}$  (4')

Hier ist aber  $d = (a^2 - c^2)/c$  und  $\lambda = c/a$ . In (4') eingesetzt, ergibt sich:

$$u + v = \frac{2 \cdot \frac{a^2 - c^2}{c} \cdot \frac{c^2}{a^2}}{1 - \frac{c^2}{a^2}} = 2c.$$

Mit (3') folgt dann:

$$s + s' = \frac{2(a^2 - c^2)}{c} + 2c = \frac{2a^2}{c}.$$

Schliesslich erhalten wir mit (2'):

$$(r + r') : (s + s') = r : s = \lambda, \quad \text{das heisst} \quad r + r' = \lambda(s + s'),$$

oder endlich:

$$r + r' = \frac{c}{a} \cdot \frac{2a^2}{c} = 2a.$$

Aus  $u + v = 2c$  und  $r + r' = 2a$  folgt nun: Die durch  $\lambda$  und  $F$  [mit  $\lambda = c/a$  und  $d = \overline{LF} = (a^2 - c^2)/c$ ] erzeugte Kurve ist mit der ursprünglichen Ellipse  $(2a, 2c)$  identisch, was zu beweisen war.

Bemerkung: Ein ähnlicher Beweis lässt sich für die Hyperbel durchführen, wobei lediglich die korrespondierenden Additionen durch entsprechende Subtraktionen und die innere durch die äussere Winkelhalbierende zu ersetzen sind. B. BARDE, Zürich.

### *Ein geometrischer Ort in der Gnomonik*

Im Frühjahr 1951 wurde im Hofe der Neubadschule zu Basel eine *analemmatische Sonnenuhr*, das heisst eine Horizontaluhr mit verschiebbarem Lotstab gebaut. In ihrer Mitte befindet sich eine grosse Steinplatte, um die ein Kranz von schlanken Granitsteinen in den Boden eingesetzt ist (Figur 1). Will ein Schüler wissen, welche Zeit es ist, so steht er auf die Steinplatte und schaut seinem Schatten nach. Dann liest er auf dem Stein, nach dem sein Schatten hinweist, die Tagesstunde ab.

Einfache und durchsichtige Erklärungen dieser originellen Sonnenuhr scheinen, obwohl sie zu den reizvollsten Anwendungen der Elementarmathematik zählen, noch nicht publiziert worden zu sein<sup>1)</sup>. Der Verfasser möchte diese Lücke ausfüllen und eine einfache Ableitung angeben.

Vorausgesetzt wird einzig eine Formel aus der sphärischen Trigonometrie, die man aus dem Seitenkosinussatz und dem Sinussatz durch Division erhält. Darnach ergibt sich für das Azimut  $A$  der Sonne

$$\text{ctg } A = \sin \varphi \text{ ctg } t - \text{tg } \delta \text{ cosec } t \cos \varphi,$$

worin  $\varphi$  die geographische Breite des Standortes,  $t$  der Stundenwinkel und  $\delta$  die Deklination der Sonne ist.

Um das *Azimut des Schattenstriches* der Sonnenuhr zu erhalten, wendet man diese Formel auf die Gegen Sonne  $S^*$  an und kann dabei setzen  $\varphi^* = \varphi$ ,  $\delta^* = \delta$  und  $t^* = t + 180^\circ$ .

<sup>1)</sup> Vergleiche DE LALANDE, *Problème de Gnomonique*, Hist. Acad. Roy. Sci., Paris 1757, Mém. Math. Phys. S. 483. – M. GRUEY, *Le Cadran solaire de Dijon*, Rev. bourguignonne Enseignement sup. 12, 97 (Dijon 1902). – L. CHOMARD, *Le Cadran analemmatique et la rétrogradation*, Bull. Soc. astron. France (Paris 1906), S. 433.

Dann ergibt sich für das Azimut  $A^*$  des Schattenstriches

$$\operatorname{ctg} A^* = \sin \varphi \operatorname{ctg} t + \operatorname{tg} \delta \operatorname{cosec} t \cos \varphi, \quad (1)$$

und wir entnehmen der Formel, dass der Schattenstrich beim höchsten Sonnenstand, wenn es 12 Uhr «wahre Zeit» ist, nach Norden weist, und dass ferner die Striche 11 Uhr und 13 Uhr, 10 Uhr und 14 Uhr, 9 Uhr und 15 Uhr usw., die bei gleichen Sonnenhöhen entstehen, symmetrisch zur Nordsüdrichtung verlaufen.

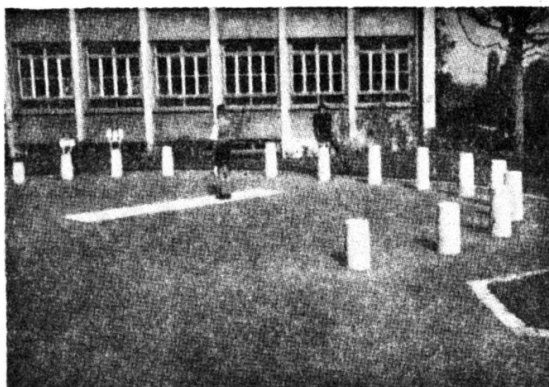


Fig. 1

Wir betrachten zuerst nur den *Schattenstrich um 18 Uhr* und legen hiezu ein Koordinatensystem durch den Mittelpunkt der Steinplatte, dessen  $x$ -Achse von West nach Ost und dessen  $y$ -Achse von Süd nach Nord gerichtet ist (Figur 2). Zur Zeit der *Tag-undnachtgleiche* stehe der Schattenstab im Ursprung  $O$  des Koordinatensystems, und da dann  $\delta = 0$  wird, fällt nach (1) der Schattenstrich um 18 Uhr mit der positiven  $x$ -Achse

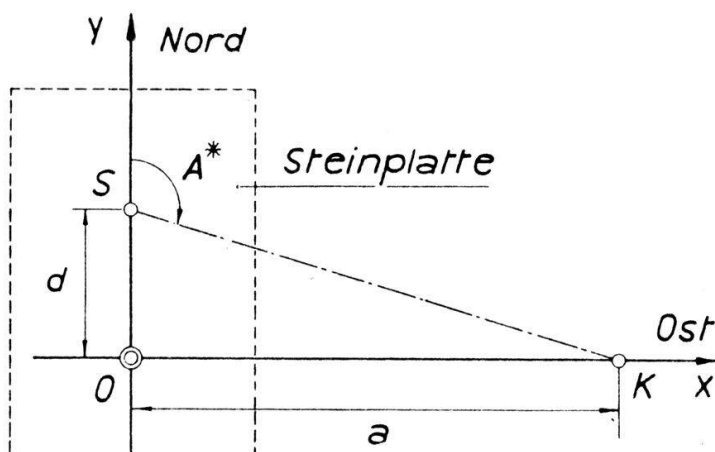


Fig. 2

zusammen. Wir wählen als Bestimmungspunkt für diesen Strich den Punkt  $K(a, 0)$  und legen mit der Wahl der Strecke  $OK$ , die bei der Basler Uhr 5 m misst, zugleich die *Grösse des Zifferblattes* der Sonnenuhr fest.

An *jedem andern Tag* ist  $\delta \neq 0$ , und der Schattenstrich weicht nach (1) um 18 Uhr von der Ostrichtung ab. Soll er trotzdem durch  $K$  gehen, so müssen wir den Standort des Schattenstabes verlegen, und dabei falle er bei der Deklination  $\delta$  der Sonne mit dem Punkte  $S(0, d)$  zusammen. Dann wird

$$d = -a \operatorname{ctg} A^*,$$

wo  $A^*$  das Azimut des Schattenstriches um 18 Uhr ist, das sich nach (1) berechnen lässt. Man erhält

$$d = a \operatorname{tg} \delta \cos \varphi, \quad (2)$$

und hat damit den Standort des Schattenstabes für jede Sonnendeklination  $\delta$  so festgelegt, dass der Schattenstrich jahraus, jahrein um 18 Uhr den Punkt  $K$  trifft. Dem Beobachter wäre nicht gedient, wenn man die zur Berechnung von  $d$  verwendete Deklination  $\delta$  auf der Steinplatte vermerken würde. Wir geben dort das entsprechende Datum an, und zwar in so grossen Abständen, als es für eine zuverlässige Einstellung des Schattenstabes notwendig ist. Daher nennt man die beschriftete Steinplatte auch den *Kalender der Sonnenuhr*. Nach unserer Ableitung gilt der so errechnete und aufgezeichnete Kalender vorerst einzig für den Schattenstrich 18 Uhr und für den Punkt  $K$ , den wir fortan als den *Stundenpunkt* «18» des Zifferblattes der Sonnenuhr betrachten.

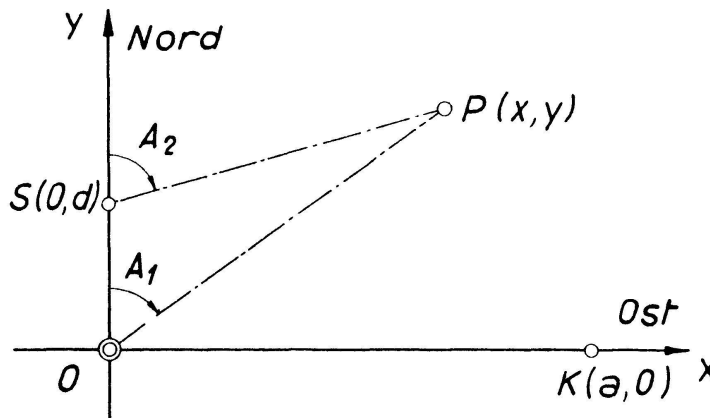


Fig. 3

Gehen wir zu den *Schattenstrichen* 17 Uhr, 16 Uhr, 15 Uhr usw. über, so stellen sich die beiden Fragen:

1. Schneiden einander die Schattenstriche um 17 Uhr, um 16 Uhr, um 15 Uhr usw. ebenfalls in Punkten, die wir als die Stundenpunkte «17», «16», «15» usw. betrachten können?
2. Trifft das Schneiden zu, welches ist der geometrische Ort  $f(x, y) = 0$  der ermittelten Stundenpunkte?

Diese Fragen lassen sich allgemein beantworten, wenn man für den beliebigen Stundenwinkel  $t$  die Gleichungen der beiden Schattenstriche aufstellt, die für den Standort  $O(0, 0)$  sowie für den zu einer beliebigen Deklination  $\delta$  gehörigen Standort  $S(0, d)$  gelten, und die Koordinaten  $x$  und  $y$  des Schnittpunktes  $P$  der Schattenstriche berechnet (Figur 3).

Für den Standort  $O(0, 0)$  erhalten wir

$$y = x \operatorname{ctg} A_1,$$

und da in diesem Falle  $\delta = 0$  ist, so wird nach (1):

$$y = x \sin \varphi \operatorname{ctg} t. \quad (3)$$

Für den Standort  $S(0, d)$  erhalten wir:

$$y = x \operatorname{ctg} A_2 + d,$$

woraus nach (1) und (2) sich ergibt:

$$y = x \sin \varphi \operatorname{ctg} t + x \operatorname{tg} \delta \operatorname{cosec} t \cos \varphi + a \operatorname{tg} \delta \cos \varphi. \quad (4)$$

Schneiden sich die beiden Schattenstriche das ganze Jahr in ein und demselben Punkt,

so dürfen die Koordinaten ihres Schnittpunktes die variable Deklination  $\delta$  nicht mehr enthalten. Das ist der Fall. Denn setzt man die  $y$  in (3) und (4) einander gleich, so erhält man für den *Schnittpunkt* als *Abszisse*

$$x = -a \sin t, \quad (5)$$

und durch Einsetzen dieses Wertes in (3) als *Ordinate*

$$y = -a \sin \varphi \cos t. \quad (6)$$

$x$  und  $y$  enthalten die Sonnendeklination  $\delta$  nicht mehr, und damit ist die erste Frage in positivem Sinne beantwortet.

Gehen wir zur zweiten Frage über und bestimmen den *geometrischen Ort* der soeben ermittelten Schnittpunkte. Dieser ergibt sich, wenn wir aus (5) und (6) den tagein, tagaus variablen Stundenwinkel  $t$  der Sonne eliminieren. Wir erhalten

$$\frac{x^2}{a^2} = \sin^2 t \quad \text{und} \quad \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \varphi} = \cos^2 t,$$

somit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \varphi} = 1. \quad (7)$$

Daraus folgt: Für das ganze Jahr liegen die Schnittpunkte der zur gleichen Tageszeit erzeugten Schattenstrahlen und damit auch die Stundenpunkte der analemmatischen Sonnenuhr auf einer Ellipse, deren Achsen  $2a$  und  $2a \sin \varphi$  in den Haupthimmelsrichtungen verlaufen.

Diese Ellipse ist nur abhängig von der geographischen Breite  $\varphi$  des Standortes der Sonnenuhr und von der Grösse von  $a$ . Für  $\varphi = 0$ , das heisst am Äquator, wird sie zum Durchmesser  $2a$ , für  $\varphi = \pm 90^\circ$ , das heisst an den Polen, zum Kreis mit dem Radius  $a$ .

Die aus dieser Ableitung hervorgehende Konstruktion der analemmatischen Sonnenuhr soll in einer weiteren Arbeit beschrieben werden. HANS STOHLER, Basel.

### Dynamik des Knickvorganges

Ein gerader, homogener Stab, von der Dichte  $\varrho$ , vom konstanten Querschnitt  $F$  und mit der Biegesteifigkeit  $JE$ , wird wie in der Abbildung gelagert und belastet. Je nachdem, ob die axial wirkende Kraft  $P$  kleiner, gleich oder grösser ist als die Eulersche Knicklast, wird sich der Stab im stabilen, indifferenten oder instabilen Gleichgewicht befinden. Diese Zeilen bezwecken, das Verhalten des Stabes nicht nur qualitativ zu beschreiben, sondern auch quantitativ zu erfassen.

Das Biegemoment  $M(x, t)$  infolge der Kraft  $P$ , der Beschleunigungskräfte und der Reaktion wird berechnet und gemäss der vereinfachten Differentialgleichung der elastischen Linie gleich  $-JE y''$  gesetzt:

$$JE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P y + \varrho F \int_{\xi=0}^x \frac{\partial^2 \eta(\xi, t)}{\partial t^2} (x - \xi) d\xi - A(t) x = 0.$$

Die Gleichung wird zweimal partiell nach  $x$  differenziert (die Kraft  $P$  wird konstant vorausgesetzt). Man erhält die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{P}{JE} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\varrho F}{JE} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Mit dem Ansatz  $y = \varphi(t) \sin(\pi x/L)$ , welcher den Randbedingungen bereits genügt, erhält man für  $\varphi(t)$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 (1 - \nu) \varphi = 0.$$

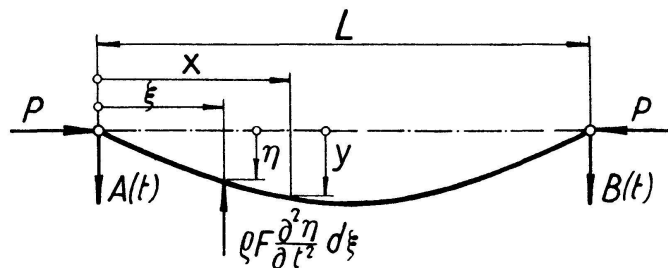
Darin bedeuten  $\nu = \frac{P}{P_e}$  und  $\omega_e = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{JE}{\rho F}}$

die kleinste Eigenkreisfrequenz des unbelasteten Stabes.

1. Fall: Wenn  $P < P_e$  ist, erhält man als Lösung:

$$y = (c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t) \sin \frac{\pi x}{L}.$$

$\omega = \omega_e \sqrt{1 - \nu}$  ist die Eigenkreisfrequenz des belasteten Stabes. Da die harmonischen Stabschwingungen infolge der unvermeidlichen Energiedissipation abklingen, bleibt schliesslich  $y = 0$ , die stabile Gleichgewichtslage des Stabes.



2. Fall: Wenn  $P = P_e$  ist, erhält man als Lösung:

$$y = (c_1 t + c_2) \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Je nach Anfangsbedingungen bleibt der Stab entweder in jeder ausgelenkten Lage im indifferenten Gleichgewicht, oder, wenn eine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden ist, knickt er mit *konstanter Geschwindigkeit* aus. Die Analogie mit einer Kugel auf einer Ebene ist vollkommen.

3. Fall: Wenn  $P > P_e$  ist, erhält man als Lösung:

$$y = (c_1 \sinh \alpha t + c_2 \cosh \alpha t) \sin \frac{\pi x}{L}$$

mit  $\alpha = \omega_e \sqrt{\nu - 1}$ . Nach einer Störung wird der Stab seine Auslenkung *beschleunigt* vergrössern.

In allen drei Fällen lassen sich die Konstanten aus den Anfangsbedingungen (Störungsursache) berechnen. Wenn auch nur auf kleine Auslenkungen beschränkt, liegt dann der zeitliche Verlauf des Knickvorganges eindeutig fest.

GEORGES V. TORDION, Zürich,

## Aufgaben

**Aufgabe 118.** Man zeige, dass es für die kubische Parabel  $y = ax^3 - bx$ ,  $a > 0$ ,  $b > 2\sqrt{2}$ , zwei umschriebene und zwei einbeschriebene Quadrate gibt und dass die Flächenverhältnisse der beiden Quadratpaare gleich gross sind.

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht.

*Lösung:* a) Wegen der Zentralsymmetrie der Kurve ist der Ursprung  $O$  Mittelpunkt der Quadrate. Der Kreis um  $O$  mit Radius  $r$  hat mit der kubischen Parabel drei Paare