

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 7 (1952)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Sur les conditions nécessaires pour l'équivalence des polyèdres euclidiens  
**Autor:** Sydler, J.-P.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-16354>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 11.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires — Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematiklehrer*

El. Math.

Band VII

Nr. 3

Seiten 49–72

Basel, 15. Mai 1952

## Sur les conditions nécessaires pour l'équivalence des polyèdres euclidiens

Deux polyèdres sont dits équivalents lorsque l'un peut se décomposer en tétraèdres avec lesquels on peut construire l'autre. On sait que deux polyèdres quelconques ne sont pas équivalents. Pour le démontrer, DEHN établit sa célèbre condition nécessaire sous forme d'une relation algébrique<sup>1)</sup>.

Reprenant et approfondissant les conditions de DEHN dans le cas euclidien, HADWIGER introduisit l'équivalence mod  $E$  (ce qui se note  $A \approx B$ ): Deux polyèdres sont équivalents mod  $E$  lorsque l'un augmenté d'un cube est équivalent à l'autre<sup>2)</sup>. Cette nouvelle équivalence permet entre autre la soustraction. Elle est basée sur une décomposition des polyèdres que nous utiliserons encore par la suite<sup>3)</sup> et d'après laquelle on a en particulier, si  $P(\lambda_i)$  désigne un polyèdre semblable à un polyèdre  $P$  dans le rapport linéaire  $\lambda_i$ ,

$$\Sigma P(\lambda_i) \approx P(\Sigma \lambda_i).$$

Les classes des polyèdres équivalents peuvent être représentées par les points d'un espace vectoriel  $\mathfrak{S}$ . HADWIGER trouve une condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence: Deux polyèdres équivalents ont les mêmes coordonnées et réciproquement.

Rappelons les conditions nécessaires de DEHN. Considérons un polyèdre quelconque et soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ses angles dièdres,  $a_1, \dots, a_n$  les longueurs des arêtes correspondantes. Il existe un certain nombre d'angles  $\gamma_0'' = \pi, \gamma_1'', \dots, \gamma_{n-k}''$  rationnellement indépendants entre eux et pouvant servir de base rationnelle pour les angles  $\alpha_i$ . En d'autres termes:

$$\alpha_i = \sum_{v=0}^{n-k} s_v^i \gamma_v'' \quad (s_v^i \text{ rationnel})$$

Si  $s_v^i = r_v^i / m_v$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $r_v^i, m_v$  entiers, posons

$$\gamma_v' = \frac{\gamma_v''}{m_v} \quad \text{et l'on a} \quad \alpha_i = \sum_{v=0}^{n-k} r_v^i \gamma_v'.$$

<sup>1)</sup> M. DEHN, *Über den Rauminhalt*, Math. Ann. 55, 465–478 (1902).

<sup>2)</sup> H. HADWIGER, *Zerlegungsgleichheit und additive Polyederfunktionalen*, Comm. Math. Helv. 24, 204–218 (1950).

<sup>3)</sup> J.-P. SYDLER, *Sur l'équivalence des polyèdres*, Comm. Math. Helv. 16, 266–273 (1943/44).

Pour que le polyèdre soit équivalent à un cube, il faut nécessairement que :

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} r_{\nu}^i = 0. \quad (i = 1, \dots, n - k)$$

Pour simplifier les constructions suivantes, définissons encore :

$$\gamma_{\nu} = \gamma'_{\nu} - \delta_{\nu},$$

$\delta_{\nu}$  étant rationnel en  $\pi$  et choisi de telle sorte que  $\gamma_{\nu}$  soit arbitrairement petit. Les conditions de DEHN peuvent s'exprimer ainsi: Si

$$\alpha_i = \sum_{\nu=1}^{n-k} r_{\nu}^i \gamma_{\nu} + \alpha_i^0 \quad (i = 1, \dots, n), \alpha_i^0 \text{ rationnel en } \pi,$$

alors

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\nu} r_{\nu}^i = 0. \quad (i = 1, \dots, n - k) \quad (1)$$

Soit, dans l'espace euclidien, un polyèdre quelconque  $S$  remplissant les conditions de DEHN. Soit  $\mathfrak{S}$  l'ensemble des polyèdres  $S$ . On vérifie que  $\mathfrak{S}$  est un sous-espace linéaire de l'espace  $\mathfrak{H}$ . Supposons-le de dimension  $k$ . Nous avons une classification des polyèdres en disant que  $A$  et  $B$  appartiennent à la même classe si leur différence vérifie les conditions (1). Les classes sont représentées par tous les espaces à  $k$  dimensions parallèles à  $\mathfrak{S}$ .

Quelles sont les caractéristiques d'un polyèdre  $S$ ? Pour l'établir, faisons d'abord quelques considérations géométriques.

Désignons par  $T(a; \alpha; \tau)$  un tétraèdre  $ABCD$  ayant les propriétés suivantes:  $\overline{AB} = a$ ;  $\overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD}$ ; l'angle dièdre le long de  $AB$  est égal à  $\alpha$ ; les angles dièdres le long de  $AC, AD, BC, BD$  sont rationnels en  $\pi$ .  $\tau$  désigne l'angle dièdre le long de  $CD$ . Remarquons que la longueur de  $CD$  peut être aussi petite que l'on veut. Si l'on considère donc l'arête  $b$  et l'angle correspondant  $\beta$  d'un polyèdre quelconque, il est possible de trouver un tétraèdre  $T(b; \beta; \tau)$  ou  $n$  tétraèdres  $T(b/n; \beta; \tau)$  appuyés sur l'arête  $b$ , la recouvrant, et entièrement compris dans le polyèdre.

Dès lors, prenons un polyèdre  $S$ . On a

$$\alpha_i = \sum_{\nu=1}^{n-k} r_{\nu}^i \gamma_{\nu} + \alpha_i^0.$$

Le long de l'arête  $a_i$ , enlevons de  $S$   $r_{\nu}^i$  tétraèdres  $T(a_i; \gamma_{\nu}; \tau_{\nu})$  [ $\nu = 1, \dots, n - k$ ]. Plus exactement: Si  $r_{\nu}^i$  est positif, nous enlevons les tétraèdres; si  $r_{\nu}^i$  est négatif, nous les ajoutons au polyèdre. D'après nos conventions pour  $\gamma_{\nu}$  et le choix possible des  $\tau_{\nu}$ ,  $T(a_i; \gamma_{\nu}; \tau_{\nu})$  est tel que les tétraèdres sont ou tout entiers dans le polyèdre ou sans point intérieur commun avec lui. Il est clair que tous les  $T(a_i; \gamma_{\nu}; \tau_{\nu})$  [ $i = 1, \dots, n$ ] sont semblables entre eux et choisis de telle sorte que les conditions soient vérifiées à toutes les arêtes.

Une fois la construction effectuée, l'angle dièdre restant le long de l'arête  $a_i$  est rationnel en  $\pi$ , égal à  $\alpha_i^0$ . Par contre, nous avons introduit de nouvelles arêtes le long

desquelles les dièdres sont ou égaux à  $\tau_\nu$  lorsque  $r_\nu^i$  était négatif ou égaux à  $2\pi - \tau_\nu$  lorsque  $r_\nu^i$  était positif; tous les autres dièdres sont rationnels. Remarquons que les arêtes qui portent les dièdres  $\tau_\nu$  et  $2\pi - \tau_\nu$  ont des longueurs proportionnelles aux  $a_i$ . Le polyèdre  $S$  est devenu un polyèdre  $S''$  complété par  $-r_\nu^i$  tétraèdres  $T(a_i; \gamma_\nu; \tau_\nu)$  [ $i = 1, \dots, n; \nu = 1, \dots, n - k$ ]. Rappelons ici qu'un tétraèdre négatif a un sens d'après HADWIGER, lorsque l'on considère que  $-T \approx E - T$ . Le polyèdre  $S$  vérifie les relations:

$$\sum_{\nu=1}^n a_\nu r_\nu^i = 0. \quad (i = 1, \dots, n - k)$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_i r_\nu^i T(a_i; \gamma_\nu; \tau_\nu) &\approx \sum T(r_\nu^i a_i; \gamma_\nu; \tau_\nu) \approx T(\sum r_\nu^i a_i; \gamma_\nu; \tau_\nu) \\ &\approx T(0; \gamma_\nu; \tau_\nu) \approx 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons donc négliger tous les tétraèdres  $T(a_i; \gamma_\nu; \tau_\nu)$ .

Par conséquent, un polyèdre  $S$  est équivalent à un polyèdre  $P$  ayant les propriétés suivantes:

- 1° Il a  $r_i$  arêtes de longueur  $a_i$  et d'angle dièdre  $\tau_i$ .
- 2° Il a  $r_i$  arêtes de longueur  $a_i$  et d'angle dièdre  $2\pi - \tau_i$ .
- 3° Tous ses autres dièdres sont rationnels en  $\pi$ .

Nous nous proposons de montrer maintenant que tout polyèdre  $P$  est de soi-même équivalent à un polyèdre  $R$  dont tous les dièdres sont rationnels. Nous dirons que  $R$  est un polyèdre rationnel.

Afin de simplifier la démonstration, nous ferons d'abord quelques remarques.

1° Les constructions que nous avons faites nous permettent de supposer que  $P$  a les propriétés suivantes:

- a)  $a_i$  est aussi petit que l'on veut, en particulier plus petit que les autres arêtes de  $P$ .
- b)  $a_i$  est isolé des arêtes  $a_1, \dots, a_n$ , c'est-à-dire qu'il est possible de passer de  $a_i$  à  $a'_i$  sur la surface du polyèdre en ne franchissant que des arêtes dont les dièdres sont rationnels.

c) On peut enlever du polyèdre  $P$  un prisme droit d'arête  $a_i$  entièrement compris dans le polyèdre et on peut le rajouter le long de  $a'_i$  ou inversement.

2° Supposons les deux arêtes  $a_i = AB$  et  $a'_i = A'B'$  telles que  $ABA'B'$  soit un rectangle et que le dièdre  $\alpha_i$  le long de  $AB$  et le dièdre  $2\pi - \alpha_i$  le long de  $A'B'$  aient leurs faces parallèles. Enlevons de  $P$  un prisme droit d'arête  $AB$  ayant le long de  $AB$  et  $A'B'$  des angles  $\alpha_i$  et  $2\pi - \alpha_i$ , tous les autres dièdres étant rationnels. Le polyèdre restant est équivalent à  $P$  et les dièdres  $\alpha_i$  ont disparu.

3° Nommons encore  $U(EF; \gamma; \gamma')$  un tétraèdre  $EFGH$ :  $GH$  est perpendiculaire à  $EFG$ ,  $\overline{HE} = \overline{HF}$ ; les dièdres le long de  $HE$  et  $HF$  sont rationnels;  $\gamma$  et  $\gamma'$  désignent les dièdres le long de  $EF$  et  $GH$ .

4° Montrons encore qu'il existe un polyèdre  $V$  jouissant des propriétés suivantes:

- a) Il est équivalent à un cube.
- b) Une de ses faces est un triangle isocèle  $RST$ ,  $\overline{RS} = \overline{ST}$ .
- c) Les dièdres le long de  $RS$  et  $ST$  sont égaux à  $\alpha$  et  $\varrho - \alpha$  [ $\varrho =$  angle rationnel].
- d) Tous les autres dièdres sont rationnels.

Considérons le polyèdre  $RSTABCD$  : Les faces  $RST$  et  $ABCD$  sont parallèles ; les faces  $BCS$  et  $ADTR$  sont parallèles entre elles et perpendiculaires à  $RST$  ; les dièdres le long de  $RS$  et  $ST$  sont égaux à  $\alpha$  et  $\varrho - \alpha$ . (Nous supposons pour la construction  $\alpha$  et  $\varrho - \alpha > \pi/2$ , ayant toujours la possibilité d'ajouter un prisme rationnel au polyèdre.) Soient  $\beta$  et  $\pi - \beta$ ,  $\gamma$  et  $\pi - \gamma$ ,  $\pi - \alpha$  et  $\alpha$  les dièdres le long de  $AR$  et  $BS$ ,  $TD$  et  $SC$ ,  $AB$  et  $CD$ .

Ce polyèdre est équivalent à un cube, comme somme de deux prismes, de bases  $SBC$  et  $RST$ .

Enlevons de ce polyèdre le long de  $AR$  un tétraèdre  $U(AR, \beta - \varrho, \beta')$ , posé sur la face  $ARSB$ . Ajoutons un tétraèdre parallèle le long de  $BS$  (on pourra ajouter aussi entre ce tétraèdre et la face  $SBC$  un prisme rationnel afin de pouvoir effectuer les constructions suivantes). Le polyèdre ainsi obtenu a deux nouveaux angles  $2\pi - \beta'$  et  $\beta'$  qui vérifient les conditions de 2 ; on pourra donc les supprimer. On pourra de même remplacer les dièdres  $\gamma$  et  $\pi - \gamma$  par des dièdres rationnels. Restent les dièdres  $\pi - \alpha$  et  $\alpha$  le long de  $AB$  et  $CD$ . Procédons de même :

Ajoutons sur la face  $ABCD$  un tétraèdre  $U(AB; \alpha - \varrho; \delta)$ . Soit  $EF$  l'arête du dièdre  $\delta$ , arête perpendiculaire à  $ABCD$ . Si  $M$  et  $N$  désignent les milieux de  $AD$  et  $BC$ , enlevons du polyèdre le tétraèdre  $CDGH$  symétrique de  $ABEF$  par rapport à  $MN$ .

Enfin, si  $\sigma$  et  $\tau$  désignent les angles  $FBM$  et  $FAN$ , enlevons de  $ABEF$  les deux tétraèdres  $U(EF; \sigma; \sigma')$  et  $U(EF; \tau; \tau')$ , les arêtes des dièdres  $\sigma'$  et  $\tau'$  étant parallèles à  $MN$ . En rajoutant au polyèdre les symétriques de ces deux tétraèdres par rapport à  $MN$ , on obtient un polyèdre équivalent au premier dont les dièdres  $\pi - \alpha$  et  $\alpha$  le long de  $AB$  et  $CD$  sont remplacés par dièdres  $\sigma'$  et  $2\pi - \sigma'$ ,  $\tau'$  et  $2\pi - \tau'$ , de faces et d'arêtes parallèles. On peut donc également les supprimer en vertu de 2, prouvant ainsi l'existence du polyèdre cherché. Il est probable qu'il existe des polyèdres plus simples et qui jouissent des propriétés voulues, mais l'existence seule importe pour la suite.

Nous pouvons maintenant passer au cas général.

Soit  $A_0B_0$  l'arête  $a_i$  qui porte le dièdre  $\alpha_i$ . Soit  $A_nB_n$  l'arête  $a'_i$  qui porte le dièdre  $\varrho_i - \alpha_i$ . Imaginons le segment  $A_0B_0$  mobile. On pourra le déplacer sur la surface du polyèdre  $P$  et l'amener en  $A_nB_n$  en ne franchissant que des arêtes dont les dièdres sont rationnels. Soient  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$  la position du segment sur ces arêtes intermédiaires (cf. remarque 1).

Dans la face qui porte les arêtes  $A_iB_i$  et  $A_{i+1}B_{i+1}$ , considérons les rectangles  $B_iA_iRS$  et  $B_{i+1}A_{i+1}RT$ . Construisons sur  $B_iA_iRS$  un prisme triangulaire droit  $B_iA_iRSWX$  ayant le long de  $B_iA_i$  un dièdre  $\alpha_i$ , le long de  $RS$  un dièdre  $\varrho - \alpha_i$ . De même construisons le prisme  $TRA_{i+1}B_{i+1}YZ$  de dièdres  $\alpha_i$  et  $\varrho - \alpha_i$  le long de  $RT$  et  $A_{i+1}B_{i+1}$ . Enfin construisons sur le triangle  $SRT$  un polyèdre  $V$  équivalent à un cube et de dièdres  $\alpha_i$  et  $\varrho - \alpha_i$  le long de  $RS$  et  $RT$  (cf. numéro 4). (Remarque : Pour que toute la construction reste à l'intérieur du polyèdre, on peut éventuellement remplacer les deux prismes et le polyèdre  $V$  par une suite de prismes et de polyèdres  $V$ ).

Si nous enlevons du polyèdre  $P$  les deux prismes et le polyèdre  $V$ , nous obtenons un polyèdre équivalent dont les dièdres le long de  $A_iB_i$  et  $A_{i+1}B_{i+1}$  ont diminué de  $\alpha_i$  et  $\varrho - \alpha_i$ . Tous les nouveaux dièdres introduits sont rationnels. En répétant la construction de  $A_0B_0$  à  $A_nB_n$ , on obtiendra donc un polyèdre équivalent dont les dièdres  $\alpha_i$  et  $\varrho_i - \alpha_i$  auront été remplacés par des dièdres rationnels.

Il suffira d'effectuer la construction pour tous les angles  $\alpha_i$  et l'on aura établi la proposition suivante:

Tout polyèdre  $P$  est équivalent à un polyèdre rationnel  $R$ .

Employons la terminologie de HADWIGER et disons que deux polyèdres  $A$  et  $B$  sont équivalents (mod  $R$ ) lorsque l'un augmenté d'un polyèdre rationnel  $R_1$  est équivalent à l'autre augmenté d'un polyèdre rationnel  $R_2$ . Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

*Pour que deux polyèdres euclidiens soient équivalents (mod  $R$ ), il faut et il suffit qu'ils vérifient les conditions de Dehn.*

Reste une dernière question: Un polyèdre rationnel est-il équivalent à un cube? Si cette propriété était vraie (et nous penchons à le croire), nous pourrions alors affirmer que les conditions de DEHN sont nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres. Nous n'avons pas encore pu éclaircir ce dernier point.

J.-P. SYDLER, Zurich.

### Beispiel zum Grenzwertsatz

W. SAXER<sup>1)</sup> gab einen ausgezeichneten Überblick über die Entwicklung des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit einem einfachen Beispiel kann auch bei Schülern Verständnis für diesen wichtigen Satz erweckt werden.

In einer Urne  $U_1$  befinden sich die Nummern  $x: -2, -1, 0, 1, 2$  in gleicher Anzahl vertreten, so dass die Wahrscheinlichkeit  $w_1(x) = 0,2$  ist, irgendeine bestimmte dieser

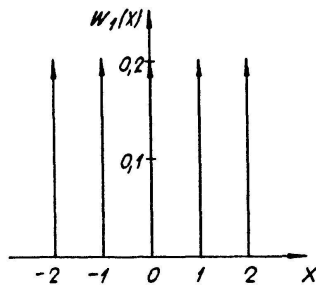


Fig. 1

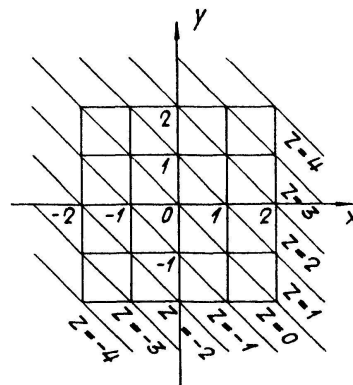


Fig. 2

fünf Nummern zu ziehen. Wir sprechen von einem Kollektiv mit Gleichverteilung (Figur 1). Infolge der symmetrischen Anordnung der Nummern ist der Mittelwert  $\bar{x} = 0$ , und für die Streuung ergibt sich

$$\sigma^2(x) = \frac{2}{5} (1^2 + 2^2) = 2.$$

Zur Urne  $U_1$  trete die Urne  $U_2$  mit gleicher Füllung. Wir ziehen zugleich aus  $U_1$  die Nummer  $x$  mit der Wahrscheinlichkeit  $w_1(x)$  und aus  $U_2$  die Nummer  $y$  mit der

<sup>1)</sup> W. SAXER, *Über die Entwicklung des zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, *El. Math.* 5, 50 (1950).