Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **7 (1952)**

Heft 2

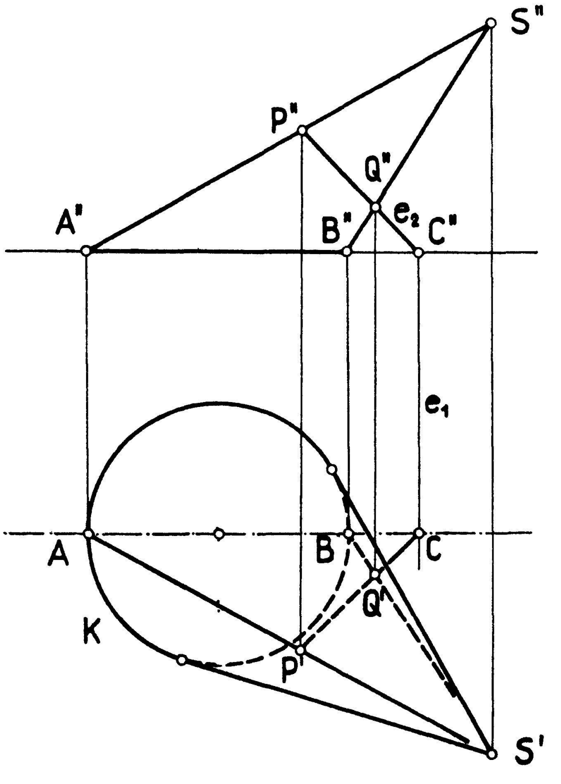
PDF erstellt am: **21.09.2024**

C'est là le sens qualitatif de la célèbre découverte de SCHOTTKY en 1904. Le caractère nettement quantitatif de l'énoncé primitif et des précisions modernes se traduirait par des données numériques exactes sur l'emplacement relatif du *Capitaine*, du *Guide*, de leurs fils et des deux arbres plantés. R. C. YOUNG, Londres.

Kleine Mitteilungen

Zur Perspektive des Kreises

Während die Parallelprojektion des Kreises sich ziemlich einfach behandeln läßt (siehe zum Beispiel FLÜKIGER, *Darstellende Geometrie* [Zürich 1943], S. 43), erfordert die allgemeine perspektivische Abbildung des Kreises beträchtlich mehr Aufwand an Mitteln. Sie läßt sich aber für den Fall des elliptischen Bildes leicht auf die Parallelprojektion des Kreises zurückführen, sobald man eine affine Raumtransformation benützt, die die Punkte einer Ebene fest läßt. (Eine solche kann etwa durch die Fixpunktebene ε, die Affinitätsrichtung und das Affinitätsverhältnis oder auch durch ε und ein Paar homologer Punkte P, P^* bestimmt werden.) Ihre Haupteigenschaften



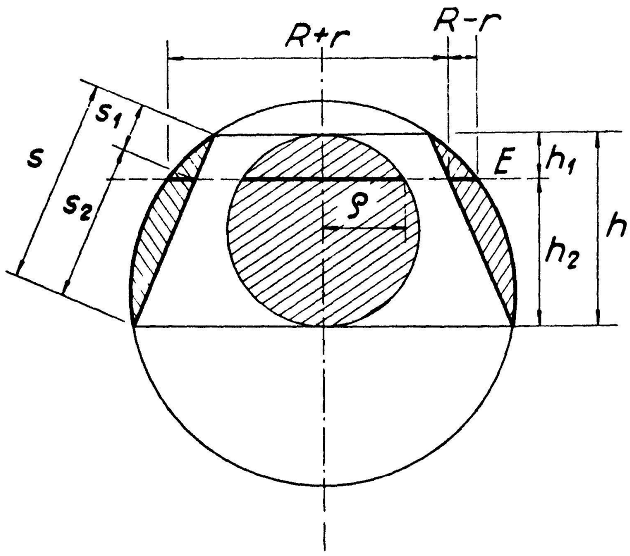
(Geraden werden in Gerade, Ebenen in Ebenen transformiert; Invarianz des Teilverhältnisses) ergeben sich mühelos. Man kann nun den den Kreis projizierenden Kegel so transformieren, daß das durch die Affinität mittransformierte Bild ein Kreis wird, von dem das ursprüngliche eine Parallelprojektion darstellt.

Der Leitkreis K liege in π_1, die Bildebene σ stehe senkrecht auf π_2. Der zu π_2 parallele Durchmesser AB schneide die Spur e_1 von σ in C. Die Schnittlinie der Ebenen SAB und σ schneide die Mantellinien SA, SB in P und Q. Liegt C außerhalb der Strecke AB (was wir voraussetzen dürfen), so liegt nach unserer Voraussetzung C auch außerhalb der Strecke PQ. Zeichnet man nun durch C eine Gerade CP^*Q^* parallel π_2 so, daß $CP^*/CQ^* = CP/CQ$ und $CP^* \cdot CQ^* = CA \cdot CB$, so liefert die Affinität mit π_1 als Fixpunktebene und $P \to P^*$ die gewünschte Transformation, da die Ebene S^*AB parallel π_2 wird und σ^* einen Wechselschnitt zu K im Kegel (S^*, K) liefert.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht.

Eine Herleitung der Volumenformel der Kugelrinde mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri

Die Rinde mit der Höhe h und der Mantellinie s soll mit einer Kugel K vom Durchmesser h verglichen werden, welche die Begrenzungsebenen der zur Rinde gehörenden Kugelschicht berührt.



Eine Ebene E parallel zu den Randkreisen der Rinde teilt s in die Strecken s_1, s_2 und h in h_1, h_2, und es ist:

$$s_1 : h_1 = s_2 : h_2 = s : h.$$

E schneidet die Rinde in einem Kreisring mit den Radien R, r und der Fläche

$$F_R = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)\,(R-r) = \pi\, s_1 s_2,$$

und die Kugel K in einem Kreis mit der Fläche

$$F_K = \pi\,\varrho^2 = \pi\, h_1 h_2.$$

Die Umformungen beruhen auf dem Satz über die Sehnenabschnitte im Kreis. Man hat also

$$F_R : F_K = (s_1 s_2) : (h_1 h_2) = s^2 : h^2.$$

Da dies für jede mögliche Ebene E gilt, so stehen auch die Volumina der Rinde und der Kugel K in dem gleichen Verhältnis

$$V_R : V_K = s^2 : h^2,$$

und daraus folgt sofort das Volumen der Rinde:

$$V_R = \frac{4}{3}\,\pi \left(\frac{h}{2}\right)^3 \frac{s^2}{h^2} = \frac{\pi\, h\, s^2}{6}.$$

H. SCHWARZ, St. Gallen.

Circonscrire un carré à un quadrilatère donné

Soit $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$ les sommets du quadrilatère. Supposons que E_1, E_2, E_3, E_4 soient les côtés du carré circonscrit. Considérons les équations de ces lignes.

$$E_1:\quad x - x_1 = k(y - y_1), \qquad \text{pour} \quad y = 0, \quad x = x_1 - k\,y_1;$$

$$E_2:\quad x - x_2 = -\frac{1}{k}(y - y_2), \qquad \text{pour} \quad x = 0, \quad y = y_2 + k\,x_2;$$

$$E_3:\quad x - x_3 = k(y - y_3), \qquad \text{pour} \quad y = 0, \quad x = x_3 - k\,y_3;$$

$$E_4:\quad x - x_4 = -\frac{1}{k}(y - y_4), \qquad \text{pour} \quad x = 0, \quad y = y_4 + k\,x_4.$$

Mais

$$|(x_3 - k\,y_3) - (x_1 - k\,y_1)| = |(y_4 + k\,x_4) - (y_2 + k\,x_2)|.$$

C'est-à-dire

$$\{(x_3 - k\,y_3) - (x_1 - k\,y_1)\} = \pm\{(y_4 + k\,x_4) - (y_2 + k\,x_2)\}.$$

Donc

$$k^{\mathrm{I}} = \frac{(y_4 - y_2) + (x_3 - x_1)}{(y_3 - y_1) - (x_4 - x_2)} \quad \text{et} \quad k^{\mathrm{II}} = \frac{(y_4 - y_2) - (x_3 - x_1)}{-(y_3 - y_1) - (x_4 - x_2)}.$$

On a pris E_3 parallèle à E_1. Mais on peut prendre aussi E_2, ou E_4, parallèle à E_1, ce qui nous donne quatre autres solutions. On peut les trouver tout de suite en rearrangeant les indices k^{I} et k^{II}:

$$k^{\mathrm{III}} = \frac{(y_4 - y_3) + (x_2 - x_1)}{(y_2 - y_1) - (x_4 - x_3)}, \qquad k^{\mathrm{IV}} = \frac{(y_4 - y_3) - (x_2 - x_1)}{-(y_2 - y_1) - (x_4 - x_3)},$$

$$k^{\mathrm{V}} = \frac{(y_3 - y_2) + (x_4 - x_1)}{(y_4 - y_1) - (x_3 - x_2)}, \qquad k^{\mathrm{VI}} = \frac{(y_3 - y_2) - (x_4 - x_1)}{-(y_4 - y_1) - (x_3 - x_2)}.$$

G. N. Vlahavas, Londres.

Über die Integrationskonstante

Der Anfänger, der einige Gewandtheit in der Integralrechnung erreicht hat, glaubt häufig, dass man die Konstante der Integration einfach vernachlässigen darf. Dieses Verfahren ist nicht erlaubt. Es kann Fehler verursachen, was wir an einem in die Augen springenden Beispiele veranschaulichen wollen. Wir betrachten die Funktion

$$y = \operatorname{tg} x,$$

ihre Differentialquotienten sind

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y'' = (\cos^{-2} x)' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} = 2\operatorname{tg} x\,\frac{1}{\cos^2 x} = 2\,y\,y'.$$

Die Tangensfunktion genügt daher der Differentialgleichung

$$y'' = 2\,y\,y'. \tag{1}$$

$2\,y\,y'$ ist aber zugleich die Ableitung der Funktion y^2, folglich ist

$$y'' = (y^2)'. \tag{2}$$

Wir integrieren auf beiden Seiten, wobei wir die Konstante flott weglassen:

$$y' = y^2. \tag{3}$$

Die Einsetzung der Werte von y und y' ergibt die falsche Formel

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x},$$

woraus wegen der Identität der im allgemeinen nicht verschwindenden Nenner $1 = \sin^2 x$ folgen würde. Ein offenbarer Unsinn; denn x ist doch veränderlich, $\sin^2 x$ kann ja jeden Wert zwischen 0 und 1 annehmen.

Der begangene Fehler wird noch auffallender, wenn wir von der Differentialgleichung (1) ausgehend alle Funktionen aufsuchen, die diese Gleichung erfüllen. Die Gleichung (3) lässt sich in die Form bringen

$$\frac{dy}{y^2} = dx.$$

Durch Integration ergibt sich:

$$-\frac{1}{y} = x + C,$$

wo C eine Konstante bedeutet. Es ist also

$$y = -\frac{1}{x + C}.$$

Nun haben wir den grotesken Widerspruch, dass $\operatorname{tg} x$ ihre eigene Differentialgleichung nicht erfüllt! Die durch Differentiation von $\operatorname{tg} x$ erhaltene Differentialgleichung wird also nur durch die jetzt erhaltene Funktion $y = 1/(x + C)$ erfüllt, deren geometrisches Bild eine gleichseitige Hyperbel ist.

Das falsche Ergebnis ergab sich dadurch, dass bei der Integration der Gleichung (2) die Integrationskonstante unterdrückt wurde. In der Tat, wenn wir diesen Fehler vermeiden, lautet die Gleichung (3) richtig wie folgt

$$y' = y^2 + C;$$

wenn nun $y = \operatorname{tg} x$, $y' = 1/\cos^2 x$ eingesetzt wird, gelangt man zur Gleichung

$$\frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + C,$$

die für $C = 1$ zur Identität wird.

Ebenso leicht ist die Bestimmung sämtlicher die Bedingung (1) erfüllender Funktionen. Die Integration von

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + C$$

ergibt:

$$x = \int \frac{dy}{y^2 + C}.$$

Der Wert dieses Integrals hängt vom Vorzeichen der Konstanten C ab. Für positives $C (= b^2)$ wird:

$$x = \int \frac{dy}{y^2 + b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{b}, \quad \text{das heisst} \quad y = b \operatorname{tg} b\, x.$$

Also für $b = 1$ ist $y = \operatorname{tg} x$, für $C = 0$ erhält man

$$x = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + A.$$

Falls C negativ $(= -b^2)$ ist, wird

$$x = \int \frac{dy}{y^2 - b^2} = \frac{1}{2b} \log \frac{1}{a} \cdot \frac{y - b}{y + b}.$$

$\log a$ ist die Konstante dieser Integration, das heisst

$$a\,e^{2bx} = \frac{y-b}{y+b} \qquad \text{oder} \qquad y = b\,\frac{1+a\,e^{2bx}}{1-a\,e^{2bx}}. \tag{4}$$

Nun ist

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = -i\,\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}} = -i\,\frac{e^{2ix}-1}{e^{2ix}+1}.$$

Bei entsprechender Wahl der Konstanten ($a = 1$, $b = i$) geht also die Formel (4) über in

$$y = \operatorname{tg} x.$$

Die zu Beginn gefundenen Ergebnisse sind also falsch. Wir konnten uns überzeugen, dass der Fehler durch Weglassung der Integrationskonstanten begangen wurde.

RICHARD OBLÁTH, Budapest.

Sur le problème 63 proposé par M. C. Bindschedler

Le problème 63 proposé dans cette Revue (*4*, fasc. 3, 69 [1949]) peut être généralisé de la façon suivante: Trouver le volume et l'aire totale des solides convexes limités par les cônes de révolution circonscrits aux angles solides d'un polyèdre régulier.

Les cônes sont définis par l'axe et le demi-angle au sommet φ. L'axe du cône passe par le centre du polyèdre; l'angle φ est formé par l'axe et l'arête du polyèdre. Deux cônes de sommets A et B (fig. 1) ont comme génératrice commune l'arête AB. La courbe d'intersection des deux cônes se décompose donc en la génératrice AB et une

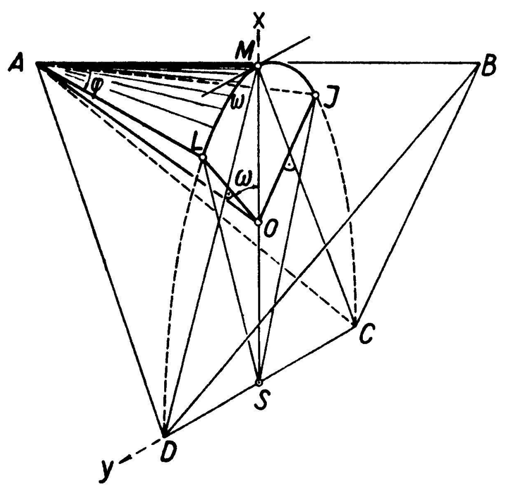


Fig. 1

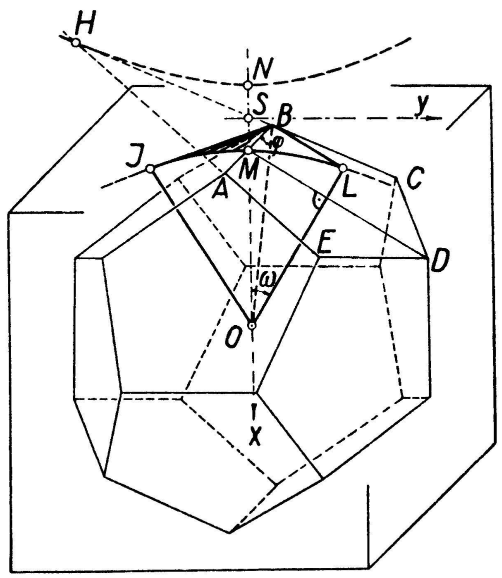


Fig. 2

conique située dans le plan de symétrie de AB. On voit facilement que pour $2\varphi \lesseqgtr \pi/2$, la conique est une ellipse resp. parabole resp. hyperbole.

I. – *Calcul du volume*

De même que les polyèdres réguliers, les solides convexes peuvent être tétrangulés en $2n$ portions égales ou symétriques (n = nombre des arêtes du polyèdre). Ces portions, de forme mi-pyramide mi-cône, ont pour base B la portion utile $OLMJ$ des coniques et pour hauteur la moitié de l'arête c. OL et OJ sont les normales abaissées du centre O sur les faces du polyèdre (fig. 1).

$$\textit{Volume du solide convexe: } \frac{n\,B\,c}{3}. \tag{1}$$

Le problème revient donc à déterminer pour chacun des 5 polyèdres réguliers
1° l'angle φ, le genre et l'équation réduite de la conique;
2° l'aire B de la portion de conique $OLMJ$.
Dans le triangle rectangle AMO (fig. 1)

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{OM}{AM} = \frac{\text{distance centre - arête}}{\text{moitié arête}}.$$

Cette distance s'obtient aisément pour le tétraèdre, l'octaèdre et le cube, tandis que pour l'icosaèdre et le dodécaèdre, construits à l'aide du cube circonscrit, ce sont les deux rapports de la section d'or qui interviennent.

L'axe focal $2\,a$ est donné par $AM \cdot \operatorname{tg} 2\,\varphi$, resp. par $AM \cdot \operatorname{tg}(\pi - 2\,\varphi)$, si $2\,\varphi$ est obtus.

L'axe non focal $2\,b$ resp. le paramètre p se déterminent comme suit:

Si la conique passe par un sommet du polyèdre (tétraèdre, octaèdre, icosaèdre), on substitue les coordonnées de ce sommet dans l'équation réduite.

Quant au dodécaèdre, la deuxième branche (virtuelle) de l'hyperbole (fig. 2) passe par le sommet H du pentagone étoilé obtenu en prolongeant les arêtes de la face ABD.

Quant au cube, le plan limite mené par le sommet A détermine les directions asymptotiques AC et AD qui sont perpendiculaires (arêtes du cube!). L'hyperbole est donc équilatère.

On trouve les résultats suivants:

Polyèdre	$\operatorname{tg}\varphi$	$2\,\varphi$	genre	équation réduite
tétraèdre	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$< \frac{\pi}{2}$	E	$x^2 + 2\,y^2 = \frac{c^2}{2}$
octaèdre	1	$= \frac{\pi}{2}$	P	$y^2 = c\,x$
cube	$\sqrt{2}$	$> \frac{\pi}{2}$	H. équil.	$x^2 - y^2 = \frac{c^2}{2}$
icosaèdre	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$> \frac{\pi}{2}$	H	$x^2 - \frac{2}{1+\sqrt{5}}\,y^2 = \frac{c^2}{4}$
dodécaèdre . . .	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$> \frac{\pi}{2}$	H	$x^2 - \frac{2}{5+3\sqrt{5}}\,y^2 = \frac{c^2}{20}$

L'aire B de la portion utile OLMJ, symétrique par rapport à l'axe focal, est évaluée comme suit pour les différents genres de conique:

$B =$ secteur elliptique $SLMJ - 2 \cdot$ triangle SOL
avec secteur elliptique : $a\,b \arccos x_1/a$

$B =$ segment parabolique $LMJ +$ triangle LOJ
avec segment parabolique : $4/3\,x_1\,y_1$

$B = 2 \cdot$ triangle $SOL -$ secteur hyperbolique LST
avec secteur hyperbolique : $a\,b \operatorname{arc\,ch} x_1/a$.

Le point L (de même que son symétrique J) est l'intersection avec la conique de la normale abaissée du centre O (d'abscisse x_0) sur la face du polyèdre. Vu l'orientation du système d'axes, on trouve, pour le genre ellipse, l'équation de la normale

$$y = \operatorname{tg}\omega\,(x - x_0).$$

Pour le genre parabole et hyperbole on remplace ω par $(\pi - \omega)$. Les équations des normales et les coordonnées $(x_1;\ y_1)$ du point L sont les suivantes:

tétraèdre	$y = \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\,c\right),$	$\frac{2\sqrt{2}}{5}\,c,\quad \frac{3}{10}\,c;$
octaèdre	$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{c}{2}\right),$	$\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\,c,\quad \frac{2-\sqrt{2}}{2}\,c;$
cube	$y = -(x - c\sqrt{2}),$	$\frac{5\sqrt{2}}{8}\,c,\quad \frac{3\sqrt{2}}{8}\,c;$
icosaèdre	$y = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}\left(x - \frac{3+\sqrt{5}}{4}\,c\right),$	$\frac{13+5\sqrt{5}}{44}\,c,\quad \frac{15-\sqrt{5}}{44}\,c;$
dodécaèdre	$y = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left(x - \frac{15+7\sqrt{5}}{20}\,c\right),$	$\frac{45+43\sqrt{5}}{380}\,c,\quad \frac{15\sqrt{5}+21}{76}\,c.$

En substituant les valeurs de x_1 et y_1 dans les formules précédentes, on trouve la base B, puis en remplaçant dans (1) le volume total.

Solide circonscrit

tétraèdre	$n = 6$	$V = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\arccos\frac{4}{5} - \frac{3}{10}\right)c^3;$
octaèdre	$n = 12$	$V = \frac{2}{3}\,(8 - 5\sqrt{2})\,c^3;$
cube	$n = 12$	$V = \left(3 - 2\operatorname{arc\,ch}\frac{5}{4}\right)c^3;$
icosaèdre	$n = 30$	$V = \frac{5}{2}\left[\frac{10+3\sqrt{5}}{11} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\operatorname{arc\,ch}\frac{13+5\sqrt{5}}{22}\right]c^3;$
dodécaèdre	$n = 30$	$V = \frac{1}{2}\left[\frac{210+93\sqrt{5}}{19} - \sqrt{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}}\operatorname{arc\,ch}\frac{43+9\sqrt{5}}{38}\right]c^3.$

II. – *Calcul de l'aire totale*

L'aire du solide convexe se compose des surfaces courbes des $2n$ parties obtenues par tétrangulation. On peut évaluer l'aire latérale d'un cône de révolution à partir de sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe[1]). Si $\gamma = \pi/2 - \varphi$ est l'angle de pente de la génératrice, on a

$$\text{Aire latérale cône} = \frac{\text{Aire projection}}{\cos\gamma} = \frac{\text{Aire projection}}{\sin\varphi}.$$

[1]) Cf. A. Reuschel: *Eine einfache Berechnung der Mantelfläche eines Drehkegelhufes*, El. Math. *4*, fasc. 4, 73 (1949).

Dans notre problème, l'aire à calculer est détachée par un plan sécant incliné sous un angle α sur le plan de projection normal à l'axe. Ce plan sécant détermine une conique c qui se projette en c'. Il vient

$$\text{Aire } c' = \text{Aire } c \cdot \cos\alpha .$$

Et en remplaçant:

$$\text{Aire latérale détachée} = \frac{\text{Aire } c'}{\sin\varphi} = \text{Aire } c \, \frac{\cos\alpha}{\sin\varphi} .$$

Or $\alpha = \varphi$, puisque le plan sécant est normal à la génératrice. D'où

$$\underline{\text{Aire latérale détachée} : \text{Aire conique} \cdot \operatorname{ctg}\varphi .}$$

Il va sans dire que cette formule reste valable, si la conique c se réduit à la portion B symétrique par rapport à l'axe focal. Finalement on trouve donc

$$\underline{\text{Aire totale solide convexe} : 2\, n\, B \operatorname{ctg}\varphi .} \qquad (2)$$

En substituant la valeur de B trouvée plus haut, on a les aires totales suivantes

Solide circonscrit

tétraèdre $\quad A = 6\left(\arccos\frac{4}{5} - \frac{3}{10}\right) c^2;$

octaèdre $\quad A = 4\left(8 - 5\sqrt{2}\right) c^2;$

cube $\quad A = 3\sqrt{2}\left(3 - 2 \operatorname{arc\,ch}\frac{5}{4}\right) c^2;$

icosaèdre $\quad A = \frac{15(\sqrt{5}-1)}{2}\left[\frac{10+3\sqrt{5}}{11} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\operatorname{arc\,ch}\frac{13+5\sqrt{5}}{22}\right] c^2;$

dodécaèdre $\quad A = \frac{3(3-\sqrt{5})}{2}\left[\frac{210+93\sqrt{5}}{19} - \sqrt{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}}\operatorname{arc\,ch}\frac{43+9\sqrt{5}}{38}\right] c^2.$

L. KIEFFER, Luxembourg.

Aufgaben

Aufgabe 107. Ein völlig stetiger Bogen (siehe Aufgabe 106) ohne Singularitäten (Wendepunkte, Spitzen, Doppelpunkte, Doppeltangenten, Ecken, Strecken) werde unter Vermeidung jeder Singularität über seine beiden Enden hinaus unbegrenzt fortgesetzt; dann existieren eine konvexe Hülle und ein konvexer Kern, denen sich der Bogen anschmiegt. Hierbei kann der Kern wie auch die Hülle ein konvexes Vieleck sein; ersterer kann insbesondere in einen Punkt, letztere in eine Gerade ausarten.

L. LOCHER-ERNST, Winterthur.

Lösung: Der einfache Bogen ist durch zwei zueinander duale Eigenschaften charakterisiert: Seine Punkte werden aus jedem fest gewählten umkehrbar eindeutig durch ein stetiges Strahlenbüschel projiziert, seine Tangenten von jeder festen umkehrbar eindeutig in einer stetigen Punktreihe geschnitten. Beim Durchlaufen des Bogens werden